

"Esercizio" Sia  $d \geq 1$ , sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ragionevole.  
 Risolvere

$$\begin{cases} \Delta u = \sin u & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \text{funzione assegnata} \end{cases}$$

Formulazione variazionale

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ |\nabla u(x)|^2 - \cos u(x) \} dx : u \in H^1(\Omega) \right\} + \text{B.C.}$$

Visto precedentemente: se  $u$  è abbastanza regolare e minimizza il funzionale rispetto a perturb.  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ , allora

$$\rightarrow \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx + \int_{\Omega} \sin(u(x)) v(x) dx = 0$$

$F(u+tv)$  e derivo in  $t=0$

$\rightarrow$  con un po' più di regolarità si ottiene  $\Delta u(x) = \sin u(x)$  in  $\Omega$

Per il 1° passaggio basta  $u \in H^1$

$$\begin{aligned} F(u+tv) = & F(u) + t \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 \\ & - \int_{\Omega} \cos(u+tv(x)) \end{aligned}$$

Il 1° pezzo è un pol., il secondo si deriva sotto il segno di  $\int$

Come si trattano le B.C.?

$u|_{\partial\Omega}$  è la traccia di  $u$  su  $\partial\Omega$ , che per  $\Omega$  decente sappiamo definire.

Grosso problema: la traccia è sing. solo su posti strani

[ per la cultura:  $\text{Tr}: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  <sup>↓↓ !!!</sup>  
è surgettiva per  $\Omega$  decente ]

Usata classica: scelgo  $u_0$  data (che assumo faccia quello che voglio sul bordo) e impongo

$$u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

È come dire che  $\text{Tr } u = \text{Tr } u_0$ .

Esistenza del minimo Metodo diretto classico.

Compattezza Sia  $\{u_n\} \subseteq H^1(\Omega)$  tale che

$$F(u_n) \leq M \quad + \text{ B.C.}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx \leq M' \quad (\text{cos è limitato e } \text{meas}(\Omega) < +\infty)$$

quindi esiste  $n_k$  t.c.  $\nabla u_{n_k} \rightharpoonup$  q.c. debole  $L^2(\Omega)$ .

Serve qualcosa che limiti le funzioni.

$$\|u - u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla(u - u_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq c \underbrace{\|\nabla u\|_{L^2}}_{\text{pass. prec.}} + c \underbrace{\|\nabla u_0\|_{L^2}}_{\text{Data}}$$

$\uparrow$   
Polinomi  
(serve  $\text{meas}(\Omega)$  finita)

Se  $\Omega$  è pure limitato valgono le immersioni cpt. e quindi, a meno di s.succ.

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{forte } L^2(\Omega) \quad (\text{e volendo in } L^q \text{ con } q \leq 2^*)$$

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u_\infty \quad \text{debde } L^2(\Omega)$$

Fortunatamente, per la continuità delle tracce,  $Tr u_n \rightarrow Tr u_\infty$  che è quindi sempre la stessa.

$$(\text{sublemma: } u_n - u_0 \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow u_\infty - u_0 \in H_0^1(\Omega))$$

### Semicontinuità

- Parte di gradiente: convessità (o fatto che è norma)
- Parte di funzione: convergenza dominata.

Conclusione: esiste il minimo in  $H^1 + \text{B.C.}$  e questo verifica ELE nella forma integrale

$$-\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = \int_{\Omega} \text{sign}(u(x)) \varphi(x) dx$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Resta "solo" il problema della regolarità

Def. Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto e sia  $f \in L^2(\Omega)$ .

Si dice  $u \in H^1(\Omega)$  è soluz. debole  $\uparrow\uparrow$

dell'eq.  $\Delta u = f$  in  $\Omega$   
se vale

$$-\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$
$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

PRIMO ENORME PASSO

$$H^1 \rightsquigarrow H^2$$

Teorema Se  $\Omega$  è decente e  $u$  è sol. debole, allora  
 $u \in H^2(\Omega)$  e vale

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Oss. Il guadagno è esagerato. Sto assumendo come ipotesi

$$u_{xx} + u_{yy} \in L^2 \quad (\text{in 2 variabili})$$

e come tesi voglio  $u_{xx} \in L^2$ ,  $u_{yy} \in L^2$  e anche  $u_{xy} \in L^2$

Morale ultrabrutale: se controllo  $x^2 + y^2$ , allora  
controllo  $x^2, y^2$  ma pure  $xy$ .

Corollario Stesse ipotesi e in più  $f \in H^k(\Omega)$   
Allora  $u \in H^{k+2}(\Omega)$  e vale

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq c \|f\|_{H^k}$$

Dando per buoni i 2 enunciati, la soluzione di

$$\Delta u = \sin u$$

trovata sopra in  $H^1$  diventa  $C^\infty$ .

•  $\sin u(x) \in L^2$  lo chiamo  $f$  e con il teo. ottengo

$$u \in H^2$$

• se  $u \in H^2$ , allora  $\sin u \in H^2$ : lo chiamo  $f$  e ottengo  $u \in H^4$

• per bootstrap ottengo  $u \in H^k$  per ogni  $k$ , e per  $k$  abbastanza grande abbiamo le immersioni in tutti gli spazi  $C^m$  che vogliamo.

— o — o —

Variaute

$$\Delta u = u^{33}$$

$$\leadsto \min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{34} u^{34} + \text{B.c.} \right\}$$

Esistenza ed unicità del min.  $\leadsto$  gratis (metodo diretto)

Per la regolarità, purtroppo il RHS sta solo in  $L^{\frac{34}{33}}$

Due vie d'uscita

$\rightarrow$  fare teo. regolarità con  $L^p \leadsto W^{2,p}$  (DURISSIMA)

$\rightarrow$  sperare in argomento truncamento che dia  $u \in L^\infty$ .

— o — o —