

Disuguaglianza POINCARÉ $d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto con $\text{meas}(\Omega) < +\infty$ (ma non serve davvero)

Allora

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Disug. POINCARÉ - SOBOLEV

Ipotesi come sopra

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$\forall q \leq p^*$$

Nella presentazione assumiamo $p < d$, quindi p^* ha senso. Ma→ per $p = d$ funziona quasi uguale→ per $p > d$ è tutto più sempliceDim Possiamo assumere $u \in C_c^\infty(\Omega)$ e quindi pure di $\mathbb{R}^d$.

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(q, p^*, \Omega) \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq$$

$$\uparrow$$

$$q \leq p^*$$

$$+ \text{meas}(\Omega) < +\infty$$

$$\leq C(q, p^*, \Omega) \cdot C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\uparrow$$
 immersione di Sobolev
in versione pura che vale se u ha spt. cpt.

— o — o —

Oss. L'esempio in cui $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$ mostra che
 si può fare a meno in certi casi
 di $\text{meas}(\Omega) < +\infty$

— o — o —

POINCARÉ - WIRTINGER $d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto.

Supponiamo che

(i) Ω è limitato

(ii) Ω è regolare ($\partial\Omega$ cpt. + C^1)

(iii) Ω è connesso.

} o quanto serve per
avere teo. di immersione
cpt.

Allora

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W^{1,p}_0(\Omega)$$

senza 0

dove

$$u_\Omega := \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_{\Omega} u(x) dx = \text{media di } u \text{ in } \Omega$$

Oss. Se Ω non è connesso, allora è banalmente falso

Dim Step 1 Posso supporre $u_\Omega = 0$. Altrimenti basta
considerare $v := u - u_\Omega$

Posso supporre anche che $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ (se è 0 è
banale, altrimenti divido e uso che LHS e RHS sono 1-omog.)

Step 2 Considero

$$\min \left\{ \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} : \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1, \int_{\Omega} u(x) dx = 0 \right\}$$

Se dimostro che il minimo esiste ed è > 0 , allora ho
finito, perché la disug. vale con

$$C(p, \Omega) := \frac{1}{\min}$$

Step 3 Con il metodo diretto mostriamo che min. esiste.

- Compattezza dei sottolivelli Sia $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ una successione tale che

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1, \quad \int_{\Omega} u_n(x) dx = 0, \quad \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M$$

Dalla prima e terza deduciamo che $\{u_n\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$.

Grazie a limitatezza e regolarità di Ω vale il teo. di immersione compatta, cioè esiste

$$u_{n_k} \rightarrow u_{\infty} \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

A meno di estrarre ulteriormente, avremo che

$$\nabla u_{n_k} \rightharpoonup \nabla u_{\infty} \quad \text{in } L^p(\Omega) \text{ debole}$$

- Semicontinuità

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}(x)|^p dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u_{\infty}(x)|^p dx$$

e questo segue dalla convessità della norma p -esima di un vettore

- Passaggio al limite delle cond. aggiuntive : *quasi gratis*

$$1 = \|u_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow \|u_{\infty}\|_{L^p(\Omega)} = 1$$

$$\int_{\Omega} u_{n_k}(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} u_{\infty}(x) dx$$

↑
conv. puntuale per s.succ.
dominata quanto basta

Quindi il min. esiste.

Step 4 Resta da dim. che $u_{ii} \neq 0$.

Se fosse 0, esisterebbe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ t.c.

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = 0 \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} u = 0$$

Dalla prima voni dedurre che $u = \text{costante}$, e a quel punto è incompatibile con 2^a e 3^a.

Questo è vero come fatto generale: se $\nabla u \equiv 0$ quasi ovunque e $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora u è loc. costante.

La maniera più rapida di dimostrarlo è per approx, considerando $u * \rho_{1/m}$ dopo aver esteso u a 0 fuori di Ω e osservato che su $\Omega' \subset \subset \Omega$ il gradiente della convoluzione è la convoluzione dei gradienti.

(Anche la approx della def. 4 vanno bene).

— o — o —

POINCARÉ - SOBOLEV - WIRTINGER

Stesse ipotesi della precedente (quindi 3 hp su Ω).

Allora

$$\|u - u_{\Omega}\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

senza 0

$$\forall q \leq p^*$$

Dim. Riciclando la dim. precedente ci sono problemi per $q = p^*$ (non valgono le immersioni compatte).

Come prima supponiamo media nulla.

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \{ \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \}$$

↑
immersione
Sobolev con

RHS con full norm

Il primo addendo nel RHS lo so stimare
per la Poincaré - Wirtinger
e quindi

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Il caso $q < p^*$ si può fare a scelta

→ ripetendo la dim. e usando Rellich

→ per interpolazione, sfruttando che vale per $q = p$ e per
 $q = p^*$. (Vale anche per $q < p$).

— o — o —