

Morale: $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$ solo se $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus$ roba piccolissima e $p \leq d$.

Altra morale: $W_0^{1,p}(\Omega)$ vorrebbero essere le funzioni $W^{1,p}(\Omega)$ nulle al bordo.

Teorema Siano $d \geq 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto QUALUNQUE (anche ferribile). Allora a partire da $W_0^{1,p}(\Omega)$ valgono le immersioni di Sobolev nella versione più ortodossa.

$p < d$ Ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sta in $L^{p^*}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$p = d$ Ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sta in $L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p, +\infty)$ e

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, d, q) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$p > d$ Ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ è $(1 - \frac{d}{p})$ -Hölderiana in $\overline{\Omega}$ e quindi si annulla veramente su $\partial\Omega$.

(e controllo la costante di Hölder con $C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$)

Oss. Per $p > d$ vale l'idea intuitiva che le $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si annullano su $\partial\Omega$, anche se $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Dim. le stesse disuguaglianze valgono in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ perché dimostrato a suo tempo, quindi valgono in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ che è un sottoinsieme.

Per approssimazione valgono nella chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ che è proprio $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Prop. Se $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, allora la funzione $\tilde{u}$, estesa a 0 su tutto $\mathbb{R}^d$, sta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Oss. È un enunciato vero, ma dice poco della struttura di $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Occhio che non è un se e solo se.

Dim. Sappiamo per def. che esiste $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ t.c.
 $u_n \rightarrow u$ e $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ in $L^p(\Omega)$

Ora basta osservare che

$$\hat{u}_n \rightarrow \hat{u} \quad \text{e} \quad \nabla \hat{u}_n = \overset{1}{\nabla u_n} \rightarrow \nabla \hat{u} \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

Teorema Sia $d \geq 1$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto regolare ($\partial\Omega$ di classe C^1 e compatta).

Allova

$$\begin{array}{ccc} u \in W_0^{1,p}(\Omega) & \Leftrightarrow \hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) & \Leftrightarrow \text{Tr } u = 0 \\ \textcircled{1} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{estesa a 0} \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{traccia su } \partial\Omega \end{array} \\ & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{array}$$

Dim. $(1) \Rightarrow (2)$ è vero anche se Ω è snibile

② $\Rightarrow$ ③ Continuità della traccia (basta usare che le approx. della definizione sono nulle su $\partial\Omega$)

② $\Rightarrow$ ① Per le solite storie, basta fare il conto nel caso modello $\Omega = \mathbb{R}_+^d$.

Sotto-enunciato: se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ e la sua estesa sta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, allora in realtà $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$.

Quello che devo fare è approx u con funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$

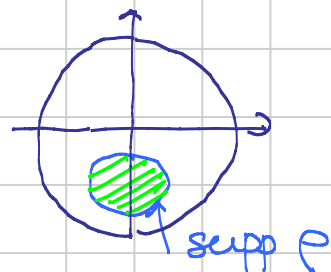
Le classiche convoluzioni sembrano andare male, ma è solo perché considero nuclei simmetrici centrati nell'origine



Se considero ρ nucleo di convoluzione

In questo modo $\hat{u} * \rho_\varepsilon$ si annulla in un intorno della zona di confine $x_d = 0$.

Quindi $\hat{u} * \rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$



e converge addrittura su tutto $\mathbb{R}^d$ a $\hat{u}$.

③ $\Rightarrow$ ② (basta per concludere). Devo dim. che $\text{Tr } u = 0 \Rightarrow \hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, cioè

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

" " " "

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \leadsto \text{Questa sarebbe vera se } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$$

In generale non è vera, ma è vero che

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \text{Tr } u \cdot \varphi$$

— 0 — 0 — 0 perché $\text{Tr } u = 0$

Riassumendo:

- se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ valgono le immersioni di Sobolev senza ulteriori ipotesi su Ω
- se in aggiunta Ω è limitato, allora le immersioni sono pure compatte.
- Se in aggiunta $\text{meas}(\Omega)$ è finita, allora quando si sta in L^{p^*} si sta in L^q con $q < p^*$.

Disuguaglianza di POINCARÉ (Enunciato diseolucativo)

$d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto QUALUNQUE con $\text{meas}(\Omega) < +\infty$, $p \in [1, +\infty]$.

Allora per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vale

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, d, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Dim (diseolucativa) Nel caso $p < d$
Dalle immersioni deduco che

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Essendo su Ω limitato

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega, d) \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

Solito Hölder:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \cdot 1 \, dx \leq \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^{p \cdot \frac{p^*}{p}} \, dx \right\}^{\frac{p}{p^*}} \cdot \{\text{meas}(\Omega)\}$$

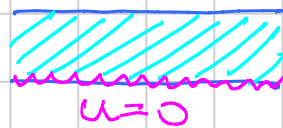
conjugato di $\frac{p^*}{p}$ ↑ ...

Faccio la radice p -esima e concludo.

Oss. Non serve a nulla che $\text{meas}(\Omega) < +\infty$.

Serve abbastanza zona di annullamento abbastanza vicino !!

Esempio classico $\mathbb{R} \times (0,1)$



$$u(x,y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) dt$$

$$|u(x,y)| \leq \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right| dt \leq \left\{ \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right|^p dt \right\}^{1/p} \cdot y^{1/p}$$
$$\leq \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right|^p dt \right\}^{1/p} \leq 1$$

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x,y)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right|^p dt \leq \|\nabla u\|_{L^p}^p$$

Integrando a striscia in $(0,1)$ ottengo

$$\|u\|_{L^p(\text{striscia})} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\text{striscia})}$$