

Spazi $W_0^{m,p}(\Omega)$ (Di solito si usa $m=1$)

Def. (Astratta) Si tratta del completamento di $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|u\|_{m,p,\Omega}$

Oss. Lo spazio $H^{m,p}(\Omega)$ è la stessa cosa senza il supporto compatto

Oss. Ottengo lo stesso spazio partendo da $C_c^m(\Omega)$.

Def. (Operativa) Si ha che $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ se e solo se esiste $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tale che

- $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$
- $D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $|\alpha| \leq m$.

↑ (derivate W -deboli, oppure possiamo semplificare.
suppone che $\{D^\alpha u_n\}$ è di Cauchy in $L^p(\Omega)$)

Oss. Tutto ciò equivale a dire che $W_0^{m,p}(\Omega)$ è la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$.

Achtung! Non bisogna mai confondere gli spazi

$$W_0^{2,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

Esempio $\Omega = (0,1)$. $p \in (1, +\infty)$

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : \underbrace{u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0}_{\text{segue da A.A.}}\}$$

$$W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : u(0) = u(1) = 0\}$$

In generale $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ sono molto diversi

Fatto 1 Se $\Omega = \mathbb{R}^d$ i due spazi coincidono.

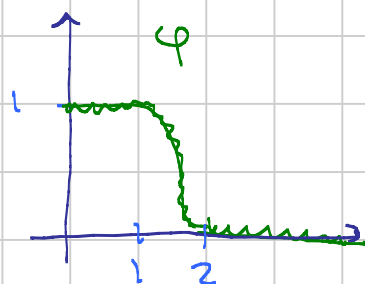
Sostanzialmente si riduce a dim. che ogni funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, con $p \in [1, +\infty)$, si può approx in $\|\cdot\|_{1,p}, \mathbb{R}^d$ con funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Dim. Approx in due fasi.

Step 1 Approx $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ma con supporto cpt.

Data φ come in figura, pongo

$$u_n(x) := u(x) \cdot \varphi\left(\frac{\|x\|}{n}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$



Si osserva che u_n ha supporto contenuto in $B(0, 2n)$ e $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

(basta applicare la conv. dominata

$u_n \rightarrow u$ puntualmente

$\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ puntualmente

ed è tutto dominato).

Step 2 Le u_n si possono approx. per convoluzione con funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

• Dato $\varepsilon > 0$

• Scelgo n tale che $\|u - u_n\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$

• Scelgo $\delta > 0$ t.c. $\|u_n - u_n * \rho_\delta\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$

e concluso che $\|u - u_n * \rho_\delta\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \varepsilon$.

Oss. Questo funziona anche per $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

Fatto 2 $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Allora

$$W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \quad \text{se } d \geq 2 \text{ e } p < d$$

$(= W^{1,p}(\mathbb{R}^d))$ (basta $p \leq d$ ma è più difficile)

(Questo è come dire che i "punti usciti vedono" in questo range $d \geq p$)

La cosa che devo dimostrare è che ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ si può approx con funzioni $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$, cioè $\uparrow \uparrow$ nulle in tutta una pallina centrata nell'origine!!

Step 1 Come prima tronco fuori da una palla grande pagando poco o nulla

$$u_m(x) := u(x) \cdot \varphi\left(\frac{\|x\|}{m}\right)$$

Step 2 Mando a 0 in una pallina centrata nell'origine pagando poco.



$$\hat{u}_m(x) = u_m(x) \cdot \varphi(m\|x\|)$$

Così $\hat{u}_m(x)$ è nulla in $B(0, \frac{1}{m})$

È ovvio che $\hat{u}_m$ è vicina ad u in $L^p(\mathbb{R}^d)$.
Non ovvio è per le derivate

$$\nabla \hat{u}_m(x) = \underbrace{\nabla u_m(x) \cdot \varphi(m\|x\|)}_{\text{buono}} + u_m(x) \underbrace{\varphi'(m\|x\|)}_{\text{limitato}} m \frac{x}{\|x\|}$$

Devo dimostrare che il secondo addendo è piccolo in norma L^p
 Questo segue dal fatto che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_m(x)|^p \underbrace{[\psi'(m\|x\|)]^p}_{\leq C} m^p$$

$\uparrow$
 $B(0, \frac{2}{m})$

Se fosse che $u_m(x)$ è limitata, avrei qualcosa del tipo $\frac{m^p}{m^d}$ che per $d > p$ tende a 0.

Step 3 Conclusione vera.

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Salgo $m \in \mathbb{N}$ tale che $\|u - u_m\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{4}\varepsilon$
 $\uparrow$
 nulla fuori da una palla
- Approssimo u_m per convoluzione e trovo v_m nulla fuori da una palla tale che

$$\|u_m - v_m\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{4}\varepsilon$$

- Moltiplicando v_m per una opportuna $\psi(m\|x\|)$ ottengo una w_m che è nulla anche vicino all'origine e soddisfa

$$\|v_m - w_m\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{4}\varepsilon$$

- A questo punto $\|u - w_m\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \varepsilon$.

Oss. La stessa dim. funziona per $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$
 purché $mp < d$ (ma si può forzare a $mp \leq d$)

Esercizio Dimostrare che per $p \leq d$ si ha

$$\inf_{B(0,1)} \left\{ \int |\nabla u(x)|^p dx : u \in C_c^\infty(B(0,1)) \text{ e } u(0) = 1 \right\} = 0$$

Facile se $\boxed{p < d}$ Prendo una qualunque u che ha le proprietà richieste e poi pongo

$$u_n(x) = u(nx)$$

Questa ha ancora le proprietà richieste e

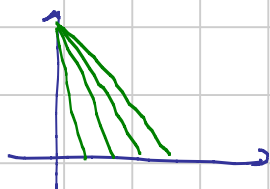
$$\int_{B(0,1)} |\nabla u_n(x)|^p dx = \int_{B(0, \frac{1}{n})} n^p |\nabla u(nx)|^p dx$$

$$\stackrel{ux=y}{=} n^p \int_{B(0,1)} |\nabla u(y)|^p \frac{1}{n^d} dy$$

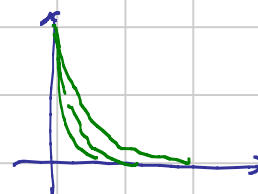
Quindi ok se $p < d$.

Non facile se $\boxed{p = d}$ Non posso, ma vorrei usare funzioni del tipo $1 - \|x\|^\alpha$ con $\alpha < 1$

Per $p < d$



per $p = d$



$$u_n(x) = 1 - \|nx\|^\alpha \quad \text{se } \|x\| \leq \frac{1}{n}$$

Facendo il conto $\|\nabla u_n(x)\| = \alpha n^\alpha \|x\|^{\alpha-1} \cdot n$
e integrando dovrebbe venire
 $\alpha \cdot \text{costante}$.

A quel punto basta mandare $\alpha \rightarrow 0^+$.

— o — o —