

Domanda : se $u_n \rightarrow u_\infty$ in Ω in qualche senso, posso dire che $\text{Tr } u_n \rightarrow \text{Tr } u_\infty$ in qualche senso?

Caso modello di $\mathbb{R}_+^d$

↗ (ma poi tutto passa al limite quando $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$)

Se prendo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e faccio la traccia su $y = \frac{1}{k}$ che succede per $k \rightarrow +\infty$?

C'è una dipendenza p' Hölderiana, cioè $(p > 1)$

$$\|u(x, y_2) - u(x, y_1)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq |y_2 - y_1|^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}$$

[Dim.] Supponiamo wlog $y_2 > y_1$

$$u(x, y_2) - u(x, y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy$$

$$\begin{aligned} |u(x, y_2) - u(x, y_1)| &\leq \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{\left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|}_{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{1}_{\frac{1}{p'}} dy \\ &\leq (y_2 - y_1)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Elevo alla p e integro in dx :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, y_2) - u(x, y_1)|^p dx &\leq \\ &\leq (y_2 - y_1)^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dy \\ &\leq \int_0^{+\infty} \dots \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p \end{aligned}$$

Teorema (Dipendenza continua del tracce)

$$d \geq 2 \quad \{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d), \quad \boxed{p > 1}$$

per $p=1$ le tracce esistono ma non funzionano

Supponiamo che

$$(i) \quad u_n \rightarrow u_\infty \text{ in } L^p(\mathbb{R}_+^d)$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right\|_{L^p} \leq M.$$

$$\text{Allora } \text{Tr } u_n \rightarrow \text{Tr } u_\infty \text{ in } L^p(\mathbb{R}^{d-1})$$

(Lo stesso vale per i $q \leq \frac{(d-1)p}{d-p}$)
 $\uparrow$ stesso

Dim. Trucco alla Poincaré con zona di scambio

$$\|u_n(x,0) - u_\infty(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq$$

$$\leq \|u_n(x,0) - u_n(x,y)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \quad (1)$$

$$+ \|u_n(x,y) - u_\infty(x,y)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \quad (2)$$

$$+ \|u_\infty(x,y) - u_\infty(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \quad (3)$$

zona di scambio
 $\downarrow$

vera per ogni $y > 0$. Integro in dy in un intervallo $(0, y_0)$ dopo aver elevato tutto alla p e usato che

$$(a+b+c)^p \leq k(p) (a^p + b^p + c^p)$$

Ottengo

$$\text{LHS} = y_0 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_n(x,0) - u_\infty(x,0)|^p dx$$

Per i 3 termini al RHS ottengo

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} &= \int_0^{y_0} dy \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_m(x,0) - u_m(x,y)|^p dx \\
 &\leq y^{\frac{p}{p-1}} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad y^{p(1-\frac{1}{p})} = y^{p-1} \leq y_0^{p-1} \\
 &\leq y_0^p \left\| \frac{\partial u_m}{\partial y} \right\|^p \leq y_0^p M
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} = \text{uguale a sopra} \leq y_0^p \left\| \frac{\partial u_{\infty}}{\partial y} \right\|^p \leq y_0^p M$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} &\leq \int_0^{y_0} dy \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_n(x,y) - u_{\infty}(x,y)|^p dx \\
 &= \|u_n - u_{\infty}\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1} \times (0, y_0))}^p \\
 &\quad \leq \mathbb{R}_+^d
 \end{aligned}$$

Mettendo insieme abbiamo

$$y_0 \|u_m(x,0) - u_{\infty}(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p \leq 2y_0^p M + \|u_m - u_{\infty}\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p$$

Faccendo il limsup per $n \rightarrow \infty$ ottengo

$$y_0 \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_m(x,0) - u_{\infty}(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p \leq 2y_0^p M$$

Se $p > 1$ basta far tendere $y_0 \rightarrow 0$ per finire.

— 0 — 0 —

Esempio Per $p > 1$ non funziona nemmeno in dimensione 1



$$u_n \rightarrow 0 \text{ in } L^p((0, \infty)) \quad \forall p \geq 1$$

$$\|u_n\|_{L^1((0, \infty))} = 1$$

$$u_n(0) = 1 \not\rightarrow u_\infty(0) = 0$$

Nota bene: le u_n non sono equicontinue in $W^{1,p}((0, \infty))$ se $p > 1$.

Oss. La convergenza delle tracce vale in ogni $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$ con $q < \frac{p(d-1)}{d-p} = p_d^*$

Ragione: $\text{Tr} u_n - \text{Tr} u_\infty$ è limitata in $L^{p_d^*}$ e tende a 0 in L^p , quindi $\rightarrow 0$ in tutti gli L^q intermedi
 $\text{---} 0 \text{---} 0 \text{---}$

Nella dim. precedente, perché possiamo dire che

$$\left\| \frac{\partial u_\infty}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} \leq M$$

Ipotesi: $u_n \rightarrow u_\infty$ in $L^p(\Omega)$

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq M$$

Tesi: u_∞ ammette derivata $\frac{\partial u_\infty}{\partial y}$ e questa soddisfa la stessa stima

Occorre usare che, a meno di s.secc. $\frac{\partial u_n}{\partial y} \rightarrow v_\infty$ debole L^p (cioè permette di passare al limite quando si scontra negli integrali con funz. $L^{p'}$)

Senza due cose

$$① \quad v_\infty = \frac{\partial u_\infty}{\partial y}$$

$$\int u_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \int \frac{\partial u_\infty}{\partial y} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$
$$\int u_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \int v_\infty \varphi$$

$$② \quad \|v_\infty\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf \left\| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

Conseguenza del fatto generale: se $v_n \rightarrow v_\infty$ debole L^1 , allora per ogni ψ convessa

$$\liminf \int \psi(v_n) \geq \int \psi(v_\infty).$$

— 0 — 0 —

Quando siamo con Ω aperto regolare generale, cosa si intende con $L^p(\partial\Omega)$?

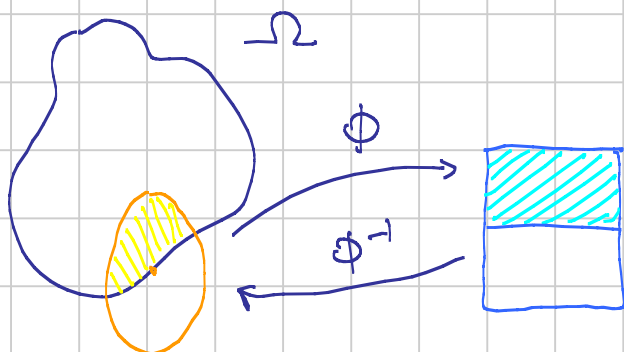
→ Integrale curvilineo nel caso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

→ Integrale superficiale " $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

→ analogo nel caso generale $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

si definisce in modo analogo via parametrizzazione

L'ipotesi di $\partial\Omega$ regolare fornisce la parametrizzazione



Esempio Se $\Omega = (-1,0) \cup (0,1)$ non c'è verso di definire la traccia.