

TRACCE DI FUNZIONI DI SOBOLEV

Problema generale : data $u \in W^{1,p}(\Omega)$, come posso definire $u|_{\partial\Omega}$?

In una variabile : le funz. di Sob. sono Hölder, quindi si
 in (a,b) estendono alla chiusura

Notazione $d \geq 1$ $(x,y) \in \mathbb{R}^d$
 $\mathbb{R}^{d-1} \uparrow \uparrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}_+^d := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^d : y > 0 \}$$

CASO MODELLO $\Omega := \mathbb{R}_+^d$ e voglio definire la traccia su $\partial\Omega$.

① Caso modello regolare $d \geq 1$, $p \in [1, +\infty)$, $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$
 $\uparrow$
 tutto

Allora

$$\|u(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p) \|u\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}$$

Oss.

- u è definita ovunque (tutto $\mathbb{R}^d$)
- LHS è solo su $\partial\mathbb{R}_+^d$
- RHS è solo sopra, cioè in $\mathbb{R}_+^d$

Dim Step 1 Ottengo stima migliore per $p=1$

$$u(x,0) = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d-1}$$

$$|u(x,0)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right| dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d-1}$$

Integro

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x,0)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right| dy$$
$$= \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+^d)}$$

Step 3 Applico lo step 1 a

$$v(x,y) = |u(x,y)|^n u(x,y) = \varphi(u(x,y))$$

$\uparrow$
 $\varphi(\sigma) = |\sigma|^n \sigma$

$$\text{LHS} = \|v(x,0)\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x,0)|^{n+1} dx = \|u(x,0)\|_{L^{n+1}(\mathbb{R}^{d-1})}^{n+1}$$

Osservo che

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = (n+1) |u(x,y)|^n \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+^d)} = (n+1) \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x,y)|^n \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right| dx dy \\ &\leq (n+1) \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x,y)|^{np'} dx dy \right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(\dots) \right|^p dx dy \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Mettendo insieme $\text{LHS} \leq \text{RHS}$:

$$\|u(x,0)\|_{L^{n+1}(\mathbb{R}^{d-1})}^{n+1} \leq (n+1) \|u\|_{L^{np'}(\mathbb{R}_+^d)}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}$$

Vonrei che fosse $rp' = p \Leftrightarrow r \frac{p}{p-1} = p \Leftrightarrow r = p-1$

In questo modo $r+1 = p$ e ottengo

$$\|u(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p \leq p \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^{p-1} \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\leq \|u\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}^p}$

da cui da tesi

— o — o —

② $d \geq 2, p \in [1, d)$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$. Allora

$$\|u(x,0)\|_{L^q(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p) \|u\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}$$

con $q := \frac{(d-1)p}{d-p} \leftarrow$ un po' meglio di p , ma un po' peggio di p^*

$\uparrow$ meglio di p tranne nel caso $p=1$

Dim. Come prima arriviamo a

$$\|u(x,0)\|_{L^{r+1}(\mathbb{R}^{d-1})}^{r+1} \leq (r+1) \|u\|_{L^{rp'}(\mathbb{R}_+^d)}^r \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}$$

e ora imponiamo $rp' = p^* = \frac{dp}{d-p}$

$$\Leftrightarrow r \frac{\cancel{p}}{p-1} = \frac{d\cancel{p}}{d-p} \quad \Leftrightarrow r = \frac{d(p-1)}{d-p}$$

$$\Leftrightarrow r+1 = \frac{d(p-1)}{d-p} + 1 = \frac{d\cancel{p} + d - d + p}{d-p} = \frac{p(d-1)}{d-p} = p^* \text{ su codim. } 1$$

— o — o —

③ Definizione della traccia per $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$

$$\text{Tr}: W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^{d-1})$$

(al posto di p posso mettere $\frac{p(d-1)}{d-p}$)

e vogliamo che sia

→ lineare

→ coincide con la restrizione sulle funzioni "decenti"

→ vale una stima

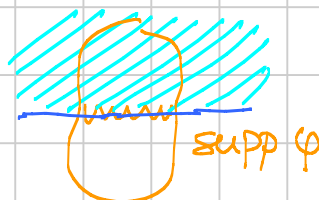
$$\|\text{Tr} u\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p) \|u\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}$$

→ vale una formula di integrazione con estremi

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) dx dy = - \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial y}(\dots) \cdot \varphi(\dots) dx dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \overset{\uparrow}{\text{Tr} u}(x,0) \varphi(x,0) dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$
↑↑ tutto



Dim. Prendo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$

TUTTO

• Per approx. deluxe trovo $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c.

↓↓

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^p(\mathbb{R}_+^d)$$

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ in } L^p(\mathbb{R}_+^d)$$

• Osservo che $\{u_n\}$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}$

• Ma allora le tracce $v_n(x) := u_n(x,0)$ sono di C. in $L^p(\mathbb{R}^{d-1})$

e quindi posso pone

$$\text{Tr } u := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leftarrow \text{limite in } L^p(\mathbb{R}^{d-1})$$

(con p sostituito dall'esp. coniugata).

Le proprietà di linearità, stima e integrazione per parti seguono immediatamente passando al limite.

Sulle funzioni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ che si estendono con continuità fino al bordo, la restrizione coincide con la traccia.

Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \cap C^0(\text{clos}(\mathbb{R}_+^d))$, allora basta estenderla per ribaltamento (rimane continua), poi approssimare per convoluzione e osservare che le convolute convergono bene.

— o — o —

④ Per $p > d$ la traccia è la banale restrizione di una funzione Hölderiana

Basta osservare che $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ con $p > d$ sono α -Hölderiane con $\alpha := 1 - \frac{d}{p}$ fino al bordo.

— o — o —

⑤ Se Ω è C^1 + $\partial\Omega$ cpt. allora si può definire la traccia usando partizioni dell'unità + approx. oblique.

Punto fondamentale: ottenere una stima del tipo

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(p, d, \Omega) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

$\uparrow \uparrow$ $\uparrow \uparrow$

per ogni $u \in C_c^1(\mathbb{R}_+^d)$

$\uparrow$