

Dimostrazione Immersioni compatte

Caso $p > d$ BANALE! L'immersione di Sobolev fornisce stima L^∞ e stima della costante di Hölder.
Concludo con A.A.

Caso $p = d$ Segue dal caso $p < d$.
Ti serve compattezza in un certo L^q . So che sto in L^q perché $p = d$, ma in realtà esiste $p_1 < d$ tale che $q < p_1^*$.
Se una succ. è limitata in $W^{1,p_1}(\Omega)$, allora è limitata pure in $W^{1,p_1}(\Omega)$.
Uso il teorema con p_1 .

Conclusione: basta dim. il caso $p < d$.
Basta dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{F} := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{1,p,\Omega} \leq M\}$$

è compatta in $L^q(\Omega)$ per ogni $q < p^*$.

Step 1 Come sempre poniamo

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{k}\}$$

Claim: $\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k) \rightarrow 0$

Beppo-Levi o passaggio al limite della misura o conv. puntuale dominata delle caratteristiche

Step 2 Voglio dimostrare la equi-continuità in senso L^q degli elementi di $\mathcal{H}$.

Iniziamo dimostrando che

$$\| \tau_R u - u \|_{L^1(\Omega \setminus \Omega_k)} \leq 2 \| u \|_{L^p(\Omega)} \{ \text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k) \}^{1/p'}$$

Osservo che $|\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| \leq |\hat{u}(x+R)| + |\hat{u}(x)|$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_k} |u(x)| dx = \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |u(x)| \cdot 1 dx$$

$$\leq \| u \|_{L^p(\Omega \setminus \Omega_k)} \cdot \| 1 \|_{L^{p'}(\Omega \setminus \Omega_k)}$$

$$\leq \| u \|_{L^p(\Omega)} \cdot \{ \text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k) \}^{1/p'}$$

Idea per il 2° termine.

Step 3 Per ogni $|R| \leq \frac{1}{k}$ dico che

$$\| \tau_R u - u \|_{L^1(\Omega_k)} \leq |R| \cdot \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} \cdot \{ \text{meas}(\Omega) \}^{1/p'}$$

$$u(x+R) - u(x) = \psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt$$

$\uparrow$
vale u , qui non
serve estendere

$$\psi(t) := u(x+tR)$$

$$= \int_0^1 \langle \nabla u(x+tR), R \rangle dt$$

$$|u(x+R) - u(x)| \leq |R| \int_0^1 |\nabla u(x+tR)| dt$$

Integro in dx

$$\int_{\Omega_k} |u(x+R) - u(x)| dx \leq |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega_k} dx |\nabla u(x+tR)| \cdot 1$$

$$\leq |R| \int_0^1 dt \left\{ \underbrace{\int_{\Omega_k} |\nabla u(x+tR)|^p dx}_{''} \right\}^{1/p} \text{meas}(\Omega_k)^{1/p'}$$

$$\int_{\substack{\Omega_k + tR \\ \subseteq \Omega}} |\nabla u(y)|^p dy \leq \int_{\Omega} |\nabla u(y)|^p dy$$

Step 4 Conclude nel caso $q=1$.

Dagli step 2 e 3 abbiamo ottenuto che

$$\begin{aligned} \|\tau_R u - u\|_{L^1(\Omega)} &= \|\tau_R u - u\|_{L^1(\Omega \setminus \Omega_k)} + \|\dots\|_{L^1(\Omega_k)} \\ &\leq 2 \|u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{1/p'} + |R| \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas} \Omega\}^{1/p'} \end{aligned}$$

Formalmente

- ci viene dato $\varepsilon > 0$
- scegliamo Ω_k in modo che il 1° addendo sia $\leq \frac{1}{2} \varepsilon$
- visto il k scegliamo $\delta > 0$ che sia $\leq \frac{1}{k}$ e che per ogni $|R| \leq \delta$ il secondo addendo viene $\leq \frac{\varepsilon}{2}$.

A questo punto nel caso $q=1$ possiamo usare il criterio di compattezza in $L^1(\Omega)$.

Step 5 Concludiamo per ogni $q \in [1, p^*)$ ^{escluso}

Mi serve la piccolezza delle traslate in L^q

IDEA GENERALE: piccolo in L^1 + limitato in L^{p^*}

implica piccolo in L^q per ogni $q < p^*$

Fatto generale di spazi $L^p(\Omega)$ con Ω limitato (ma nemmeno serve)

Siano $p < q < \infty$. Se $f \in L^p$ e $f \in L^1$, allora $f \in L^q$ e

$$\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}^\theta \cdot \|f\|_{L^1}^{1-\theta}$$

per un opportuno $\theta(p, q, 1)$.

Ora
$$\|T_h u - u\|_{L^{p^*}} \leq \underbrace{\|T_h u\|_{L^{p^*}} + \|u\|_{L^{p^*}}}_{\text{limitato perché per } p^* \text{ vale l'immersione}}$$

$\|T_h u - u\|_{L^1}$ piccolo se $|h|$ è piccolo

e di conseguenza

$$\|T_h u - u\|_{L^q} \leq \|T_h u - u\|_{L^1}^\theta \cdot \|T_h u - u\|_{L^{p^*}}^{1-\theta}$$

↑
trovo piccolezza su questo che mi dà
piccolezza voluta su L^1 .

— o — o —

Fatto importante

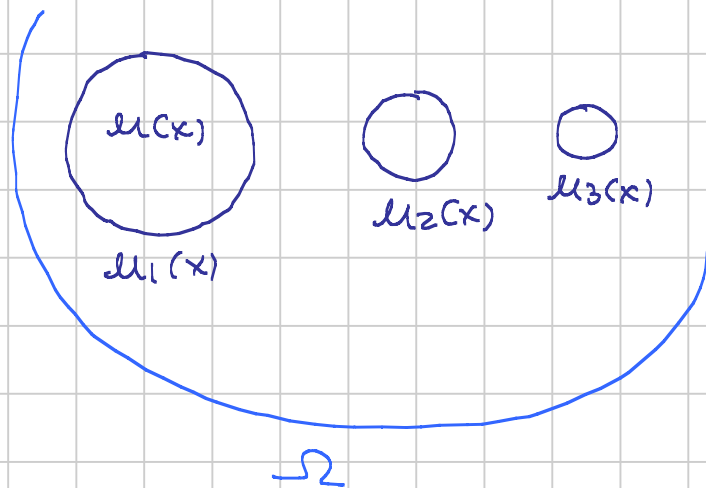
L'immersione NON è compatta per $q = p^*$
cioè se ho una succ. limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ non è detto che questa abbia
s.succ. convergente in $L^{p^*}(\Omega)$.

Idea: sfruttare l'invarianza quando si passa da $u(x)$ a $u(x_h)$.

Detto meglio: quando passo da $u(x)$ a $u(x_h)$
le norme del gradiente in L^p e della funzione
in L^{p^*} riscalano allo stesso modo

Prendo una u con supporto in una palla e la chiamo u_1

Prendo u_2 in una seconda pallina che è una riscalata di u_1 fatta in modo da avere la stessa norma di u_1 in $W^{1,p}$.



Prendo u_3 in una terza pallina disgiunta, e procedo allo stesso modo scegliendo i raggi in modo da non uscire da una palla gigante

In questo modo ho una succ. di funzioni d'unità in $W^{1,p}(\Omega)$.

Le norme $L^{p^*}(\Omega)$ di queste sono d'unità (volendo per l'immersione, o perché riscalano allo stesso modo).

Ma non può avere s.succ. convergenti perché i supporti sono disgiunti e quindi

$$\|u_m - u_n\|_{L^{p^*}} = \|u_m\|_{L^{p^*}} + \|u_n\|_{L^{p^*}} \quad \text{se } m \neq n$$

$$\geq \text{costante positiva}$$

Per i $q < p^*$ accade che $u_m \rightarrow 0$ in L^q

— 0 — 0 —