

TEOREMI IMMERSIONE COMPATTA (RELLICH-KONDRAKOV)

$d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty]$

Supponiamo che

- per Ω vale il teorema di immersione ($\partial\Omega$ cpt. + C^1 basta)
- Ω limitato.

Allora valgono i seguenti fatti.

Caso $p < d$ L^p immersione

$$W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$$

è compatta per ogni $q \in [1, p^*)$ (ESCLUSO p^*)

Caso $p = d$ L^p immersione di sopra è compatta $\forall q \in [1, +\infty)$

Caso $p > d$ L^p immersione

$$W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C^0(\text{Clos}(\Omega))$$

è compatta.

Def. Una immersione si dice compatta se ogni succ. limitata nello spazio di partenza ha una s.succ. convergente (forte) nello spazio di arrivo.

— o — o —

Ripasso cpt. in spazi metrici

Teorema Sia (X, d) metrico. Allora sono equiv.

- (i) X è compatto per ricoprimenti
- (ii) X è compatto per succ.
- (iii) X è completo + tot. limitato

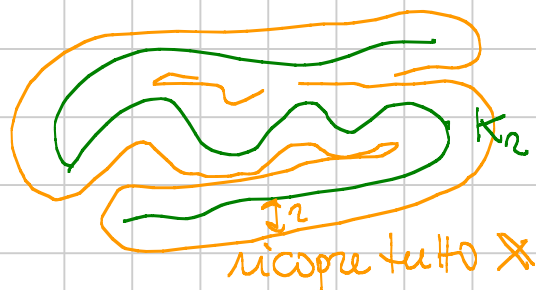
Prop. (Caratt. della totale limitatezza) [Analisi 2]

Sia (X, d) metrico. Allora sono equiv.

- (i) X è totalmente limitato
- (ii) $\forall r > 0 \exists K_r \subseteq X$ tot. lim. (per la metrica ristretta) tale che

$$X \subseteq \bigcup_{x \in K_r} B(x, r)$$

(Ogni punto di X dista meno di r da un elemento di K_r)



Prop. (Caratterizzazione della relativa compattezza)

Sia (X, d) uno sp. metrico COMPLETO.

Sia $S \subseteq X$ un sottoinsieme.

Allora sono equivalenti

- (i) $\text{Clos}(S)$ è compatto
- (ii) ogni successione $\{x_n\} \subseteq S$ ammette una s.succ. conv. (non nec. ad elemento di S)
- (iii) $\forall r > 0$ esiste $K_r \subseteq X$ compatto (ma basta tot. lim.) t.c.

$$S \subseteq \bigcup_{x \in K_r} B(x, r) \quad (S \text{ è contenuto in un } r\text{-intorno di } K_r)$$

Dim Le duplicazioni sono semplici anche se non ovvie.

Quella che serve ora è (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Si dimostra bene (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii)

Dimostro che $\text{Clos}(S)$ è completo + tot. limitato

- Completo segue dall'essere chiuso in un completo
- Tot. limitato segue da (iii) + caratterizzazione della totale limitatezza.

— o — o —

TEOREMA (Criterio di compattezza in $L^p(\Omega)$)
(versione L^p di A.A.)

Siano $d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty)$ ($p = +\infty$ ESCLUSO)

Sia $\mathcal{Y} \subseteq L^p(\Omega)$ un sottoinsieme.

Supponiamo

(i) Ω è limitato (evita fughe orizz.)

(ii) $\mathcal{Y}$ è limitato in $L^p(\Omega)$, cioè (evita fughe vertic.)

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{Y} \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq M$$

(iii) gli elementi di $\mathcal{Y}$ sono equicontinui nel senso L^p del termine, cioè (evita le oscillazioni furiose)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u \in \mathcal{Y} \quad \forall \mathbf{R} \in \mathbb{R}^d \quad |\mathbf{R}| \leq \delta \Rightarrow \|\tau_{\mathbf{R}} u - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$$

dove $\tau_{\mathbf{R}}$ è la traslazione di $\mathbf{R}$ definita da

$$\tau_{\mathbf{R}} u(x) = \hat{u}(x + \mathbf{R})$$

$\uparrow$ u è stata estesa a 0 fuori di Ω

$$\left\{ \int_{\Omega} |\hat{u}(x + \mathbf{R}) - \hat{u}(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \varepsilon \quad \text{se } |\mathbf{R}| \leq \delta$$

unif. su $\mathcal{Y}$

Allora $\mathcal{Y}$ è rel. cpt. in $L^p(\Omega)$.

Dim. Per il criterio precedente basta dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $\mathcal{Y}_\varepsilon \subseteq L^p(\Omega)$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{Y} \quad \exists g \in \mathcal{Y}_\varepsilon \quad \|f - g\|_{L^p} \leq \varepsilon$$

Dato ε , scelgo $\delta > 0$ che mi fa venire ε nell'ipotesi (iii).
Prendo ρ nucleo di convoluzione. Pongo

$$\mathcal{Y}_\varepsilon := \{ \hat{f} * \rho_\delta : f \in \mathcal{Y} \}$$

$\uparrow$ estesa a 0

e dico che questo va bene.

Step 1: verifica distanza

$$(f * \rho_\delta)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x + \delta y) \rho(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) \rho(y) dy$$

$$|(f * \rho_\delta)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x + \delta y) - \hat{f}(x)| \rho(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|\hat{f}(x + \delta y) - \hat{f}(x)|}_{\frac{1}{p}} \rho(y)^{\frac{1}{p'}} dy$$

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x + \delta y) - \hat{f}(x)|^p \rho(y) dy \right\}^{1/p} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) dy \right\}^{1/p'}}_1$$

Elevo alla p e integro su Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(f * \rho_\delta)(x) - f(x)|^p dx &\leq \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x + \delta y) - \hat{f}(x)|^p \rho(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{dy}_{\substack{\text{B(0,1)} \\ \text{ha norma } \leq \delta}} \int_{\Omega} dx |\hat{f}(x + \delta y) - \hat{f}(x)|^p \end{aligned}$$

Per ipotesi (iii) l'integrale in dx è $\leq 1^p$ e quindi

$$\text{LHS} \leq \underbrace{\int_{B(0,1)} \rho(y) dy}_{1} 1^p$$

da cui la tesi.

Step 2 Gli elementi di $\mathcal{M}_1$ sono equilimitati.

$$\begin{aligned} |(f * \rho_\delta)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|\hat{f}(x + \delta y)|}_{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\rho(y)}_{\frac{1}{p'}} dy \\ &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x + \delta y)|^p dy \right\}^{1/p} \cdot \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)^{p'} dy \right\}^{1/p'}}_{\text{costante}} \\ &\quad \omega = \delta y \\ &= \left\{ \underbrace{\frac{1}{\delta^d}}_{\text{FISSO}} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^p d\omega \right\}^{1/p} \cdot \text{costante} \\ &\leq C_1(\delta, p) \cdot \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Step 3 Gli elementi di $\mathcal{M}_1$ sono equicontinui, anzi equi-lip.

Basta una stima unif. sulle derivate

$$\begin{aligned} \nabla(f * \rho_\delta)(x) &= \nabla \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x + \delta y) \rho(y) dy \\ &= \nabla \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \rho\left(\frac{\omega - x}{\delta}\right) \frac{1}{\delta^d} d\omega \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\hat{f}(w)}_{\frac{1}{p}} \underbrace{\nabla \rho\left(\frac{w-x}{\delta}\right) \left(-\frac{1}{\delta}\right) \frac{1}{\delta^d}}_{\frac{1}{p'}} dw$$

Mettendo i valori assoluti e facendo Hölder troviamo

$$\|\nabla(f * \rho_\delta)(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2(p, \delta) \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

Step 4 Grazie agli step 2 e 3 gli elementi di $\mathcal{F}_n$ verificano la hp. di Ascoli - Arzelà in $Clos(\Omega)$ che è limitato, quindi CPT.

Per A.A. la famiglia $\mathcal{F}_n$ è rel. cpt. rispetto alla conv. unif., dunque a maggior ragione in $L^p(\Omega)$.

Oss. L'enunciato si può dire in termini di succ., ma la dim. passa meglio attraverso la caratterizzazione [Provare a fine dim. con la succ.]