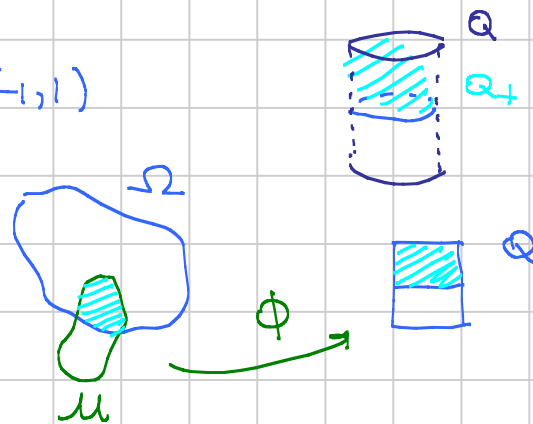


Def. Diciamo che Ω è di classe C^1 se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno U di x ed una funzione

$$\Phi: U \rightarrow Q = B_{d-1}(0,1) \times (-1,1)$$

tale che

- Φ è invertibile
- Φ e Φ^{-1} sono di classe C^1
- $J\Phi$ e $J\Phi^{-1}$ sono limitati
- $\Phi(U \cap \Omega) = Q^+ = B_{d-1}(0,1) \times (0,1)$
- $\Phi(U \cap \partial\Omega) = B_{d-1}(0,1) \times \{0\}$



Teorema (Esistenza di $\pm$ -estender)

$d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto.

Supponiamo che

- Ω è di classe C^1
- $\partial\Omega$ è compatto

Allora esiste un $\pm$ -estender $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Prop. 1 (Composizione interna di funzioni di Sobolev)



A, B aperti in $\mathbb{R}^d$, $\Phi: A \rightarrow B$ t.c.

- Φ invertibile
- Φ e Φ^{-1} di classe C^1
- $J\Phi$ e $J\Phi^{-1}$ limitati (in A e B , risp.)

Allora $u \in W^{1,p}(B) \Leftrightarrow u \circ \Phi \in W^{1,p}(A)$

Inoltre

$$\frac{\partial (\mu \circ \phi)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x)$$

chain rule di Analisi 2

Lemma (Partizione dell'unità)

Supponiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ con $\partial\Omega$ compatto.

Siano $A_1, \dots, A_n$ aperti con $A_i \subset \mathbb{R}^d$ t.c.

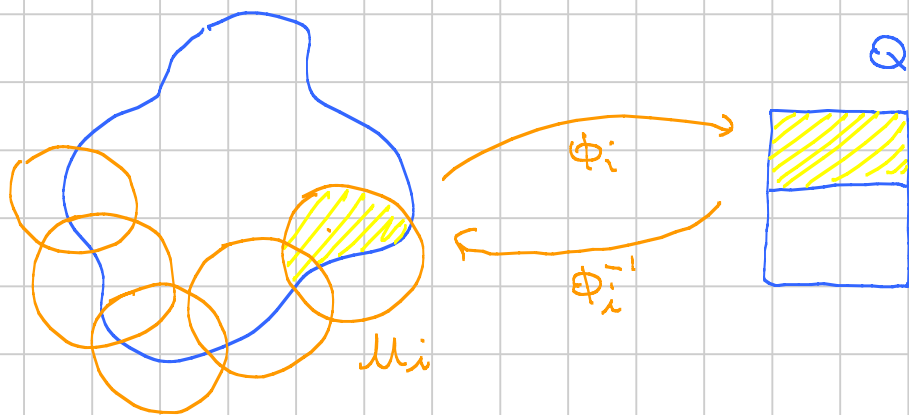
$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Allora esistono funzioni $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ di classe C^∞ t.c.
 $\uparrow$ c'è anche lei!

- $0 \leq \psi_i(x) \leq 1$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$
- $\text{supp } \psi_i \subseteq A_i$ per $i = 1, \dots, n$
- $\text{supp. } \psi_0 \subseteq \Omega$ [Cometto dopo video] [N.B. $\text{supp } \psi_0$ non è necess. cpt.]
- vale

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \text{Clos}(\Omega)$$

Dim Teo. $\partial\Omega$ è compatto e C^1 , quindi ricopro con un numero finito di U_i come nella def. di aperto C^1



Piano • Pongo $u_i = u|_{\Omega_i}$

• Mediante ϕ_i diventa v_i in $\mathbb{Q}^+$

• Estendo v_i ad una v_i^+ in $\mathbb{Q}$

• Mediante ϕ_i^- diventa $\hat{u}_i$ in $\mathcal{M}_i$

• Pseudo partizione dell'unità e pongo

$$\hat{u}(x) := \sum_{i=0}^n \hat{u}_i \cdot \psi_i$$

$\uparrow$
 $v_{i0} \quad \hat{u}_0 = u$

Dico che è l'estensione cercata

→ Linearità è ovvia

→ verifico che estenda: per $x \in \Omega$ vale $\hat{u}_i(x) = u(x)$ e quindi

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=0}^n u(x) \psi_i(x) = u(x)$$

$\uparrow$
raccolgo

→ posso stimare $\|\hat{u}\|_{1,p,\mathbb{R}^d}$ in termini di $\|u\|_{1,p,\Omega}$

Basta verificare che in ogni passaggio si paga solo una costante e che gli addendi sono un numero finito

$$\|\hat{u}_i \cdot \psi_i\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq C_1 \|\hat{u}_i\|_{1,p,\mathcal{M}_i}$$

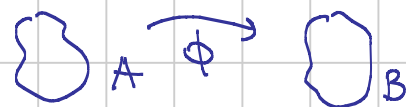
$$\leq C_1 C_2 \|\hat{v}_i\|_{1,p,\mathbb{Q}}$$

$$\leq C_1 C_2 C_3 \|v_i\|_{1,p,\mathbb{Q}^+}$$

$$\leq C_1 C_2 C_3 C_4 \|u_i\|_{1,p,\Omega_i}$$

$$\leq \underbrace{C_1 C_2 C_3 C_4}_{=0} \|u\|_{1,p,\Omega}$$

Dim Prop. composizione



Facciamo la freccia $u \in W^{1,p}(B) \Rightarrow u \circ \phi \in W^{1,p}(A)$

Idea: usare la def. H ed i teoremi di approx.

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u & \text{in } L^p(B) & + \text{ puntuale e dominata} \\ \nabla u_n &\rightarrow \nabla u & \text{in } L^p(B) \end{aligned}$$

Spero che $u_n \circ \phi \rightarrow u \circ \phi$ in $L^p(A)$

$$\nabla(u_n \circ \phi) \rightarrow \nabla(u \circ \phi) \text{ in } L^p(A)$$

È vero che $u_n \circ \phi \rightarrow u \circ \phi$ per q.o. $x \in A$

(qui serve che, detto $E \subseteq B$ l'insieme in cui non si ha conv. puntuale, valga che $\phi^{-1}(E)$ ha misura nulla in A , questo è vero perché la Hp su ϕ garantisce che insiemi di misura nulla vanno in insiemi di misura nulla)

Per concludere che la convergenza in $L^p(A)$ serve una dominazione.

Se $|u_n(x)| \leq g(x) \in L^p(B)$, allora

$$|u_n(\phi(x))| \leq g(\phi(x)) \stackrel{?}{\in} L^p(A)$$

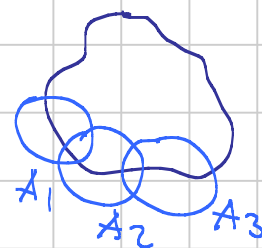
$$\int_A |g(\phi(x))|^p dx = \int_B |g(y)|^p |\text{Det } J\phi^{-1}(y)| dy \quad \text{😊}$$

La cov. delle derivate è uguale (e qui serve la limitatezza di $J\phi$)

Tutto ciò vale per $p < +\infty$. Per $p = +\infty$ occorre mettersi in aperti ben contenuti e usare $p = 2018$.

Dim partizione dell'unità

Aggiungo d'ufficio $A_0 := \Omega$
in modo che



$$\text{Clos}(\Omega) \subseteq \bigcup_{i=0}^n A_i$$

Step 1 Per ogni $k \geq 1$ intero pongo

$$A_{i,k} := \left\{ x \in A_i : d(x, \partial A_i) \geq \frac{1}{k} \right\}$$

Claim: esiste un valore di k per cui

$$\text{Clos}(\Omega) \subseteq \bigcup_{i=0}^n \underbrace{A_{i,k}}_{\hat{A}_i}$$

Osservo che $\hat{A}_i \subset\subset A_i$ per $i = 1, \dots, n$
 $\text{Clos}(\hat{A}_0) \subseteq A_0 = \Omega$

Step 2 Per ogni $i = 0, 1, \dots, n$ trovo $\theta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$
tale che

- $0 \leq \theta_i \leq 1$
- $\theta_i(x) = 1$ in $\hat{A}_i$
- $\theta_i(x) = 0$ fuori di A_i

Step 3 (Novità) Pongo

$$\psi_0(x) := \theta_0(x)$$

$$\psi_1(x) := \theta_1(x) (1 - \theta_0(x))$$

$$\psi_2(x) := \theta_2(x) (1 - \theta_0(x)) (1 - \theta_1(x))$$

⋮

$$\psi_k(x) := \theta_k(x) \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \theta_i(x))$$

Banale: se ψ_i stanno in $[0,1]$ e si annullano fuori di A_i e sono $C^\infty(\mathbb{R}^d)$

Perché sommano a 1 in $\text{Clos}(\Omega)$. Vale la formula

$$1 - \sum_{i=0}^k \psi_i(x) = \prod_{i=0}^k (1 - \psi_i(x)) \quad \forall x \text{ e } \forall k$$

Se $x \in \Omega$, allora $x \in \hat{A}_i$ per qualche i , quindi $\text{RHS} = 0$, quindi $\text{LHS} = 0$, quindi $\sum \psi = 1$.