

TEOREMI DI ESTENSIONE

$$W^{1,p}(\Omega) \rightsquigarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

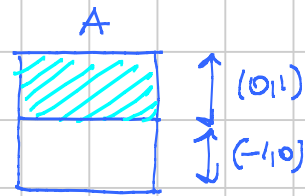
Perché? Perché è il modo più comodo per avere:

→ approssimazione deluxe $\rightsquigarrow$ valori su $\partial\Omega$ di funzioni di Sobolev

→ teo. di immersione $\rightsquigarrow$ teo. di compattezza
— o — o —

CASO MODELLO : Ω è un cilindro

$$A \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \quad \Omega = A \times (0,1) =: C_A^+ \subseteq \mathbb{R}^d$$



Obiettivo: estendere una funzione definita su C_A^+ a

$$C_A := A \times (-1,1)$$

Consideriamo due operatori, cioè l'estensione "per parità" e "per disparità"

$$[Eu](x,y) := \begin{cases} u(x,y) & \text{se } (x,y) \in C_A^+ \\ u(x,-y) & \text{se } x \in A, y \in (-1,0) \end{cases}$$

$\uparrow$ per parità $\uparrow \in A$ $\uparrow \in \mathbb{R}$

$$[\hat{E}u](x,y) := \begin{cases} u(x,y) & \text{se } x \in A, y \in (0,1) \\ -u(x,-y) & \text{se } x \in A, y \in (-1,0) \end{cases}$$

$\uparrow$ per disparità

Il caso $y=0$ è di misura nulla

Teorema (Estensione per continuità)

$d \geq 1$, $A \subset \mathbb{R}^{d-1}$ aperto, C_A e C_A^+ come sopra, $p \in [1, +\infty]$.

Se $u \in W^{1,p}(C_A^+)$, allora $Eu \in W^{1,p}(C_A)$.

Inoltre

- $u \rightarrow Eu$ è lineare
- le derivate di Eu soddisfano

$$\frac{\partial Eu}{\partial x_i} = E\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \quad \forall i = 1, \dots, d-1$$

$$\frac{\partial Eu}{\partial y} = \hat{E}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

- c'è un controllo delle norme

$$\|Eu\|_{1,p,C_A} \leq \text{cost} \cdot \|u\|_{1,p,C_A^+}$$

↑
forse 2

In altre parole: l'applicazione $u \rightarrow Eu$ è un L -estensione forte da C_A^+ a C_A .

Dim Distinguiamo $\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.

Caso $\frac{\partial}{\partial x_i}$ Devo dimostrare che

$$\int_{C_A} Eu(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,y) dx dy = - \int_{C_A} E \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y) \varphi(x,y) dx dy$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(C_A)$. Ora

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,y) \dots + \int_A dx \int_{-1}^0 dy u(x,-y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\dots) \\ &= \dots + \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,-y) \end{aligned}$$

$$= \int_A dx \int_0^1 dy \, u(x,y) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,-y) \right\}$$

$$= \int_{C_A^+} u(x,y) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x,y) dx dy$$

$$\psi(x,y) := \varphi(x,y) + \varphi(x,-y)$$

$$-RHS = \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y) \cdot \psi(x,y) dx dy \quad (\text{stessi conti})$$

Ci siamo ridotti a dim. che

$$\int_{C_A^+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dy = - \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi dx dy$$

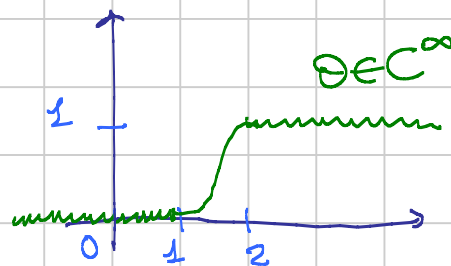
Questo NON è ovvio perché $\psi \notin C_c^\infty(C_A^+)$

Trucco di approssimazione:
considero funzione Θ come
in figura.

Invece di usare ψ , uso

$$\psi_k(x,y) = \psi(x,y) \cdot \Theta(ky)$$

↑ rampa velocissima tra 0 e 1



Per ogni $k \geq 1$ vale che

$$\int_{C_A^+} u(x,y) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(x,y) dx dy = - \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y) \psi_k(x,y) dx dy$$

"

↑ $\psi_k \in C_c^\infty(C_A^+)$

$$\int_{C_A^+} u(x,y) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x,y) \Theta(ky) dx dy = - \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y) \psi(x,y) \Theta(ky) dx dy$$

↓ per $k \rightarrow \infty$

LHS voluto

(convergenza dominata)

↓

RHS voluto

Caso $\frac{\partial}{\partial y}$ Come prima devo dim. che

$$\int_{C_A} E u(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_{C_A} \hat{\Xi} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \varphi(x, y) dx dy$$

LHS = (come prima)

$$= \int_A dx \int_0^1 dy \, u(x,y) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,-y) \right\}$$

$$\psi(x, y) := \varphi(x, y) - \varphi(x, -y)$$

RHS = (analogo a prima)

$$= \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \psi(x, y) dx dy$$

↑ il segno - viene fuori dall'estensione per disparità.

Come prima dobbiamo dire che

$$\psi \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \int_{\Omega^+} = - \int_{\Omega^+} \frac{\rho_0}{\rho} \psi$$

Ma ψ non ha supporto compatto. Scrivo la relazione per $\psi_k(x, y) := \psi(x, y) \Theta(ky)$

$$\int_{CA^+} u(x,y) \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) \Theta(ky) dx dy + \int_{CA^+} u(x,y) \psi(x,y) k \Theta'(ky) dx dy$$

$\downarrow$ come prima
 $\downarrow$? Spero !

$$= - \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial y} (x, y) \psi(x, y) \theta(ky) dx dy$$

↓
come prima

Dimostriamo la speranza.

$$\int_{\substack{C_A^+ \\ A \times (0, \frac{2}{k})}} |\mu(x, y)| \cdot \underbrace{|\psi(x, y)|}_{\leq L|y| \leq L \frac{2}{k}} \cdot \underbrace{k \cdot |\theta'(ky)|}_{\leq M} dx dy = \star$$

Osservo che ψ è Lip. e si annulla per $y=0$, quindi

$$|\psi(x, y)| = |\psi(x, y) - \psi(x, 0)| \leq L|y|$$

$$(\star) \leq \cancel{M} L \frac{2}{\cancel{k}} \underbrace{\int_A dx \int_0^{\frac{2}{k}} dy}_{\substack{\downarrow \\ 0 \quad \text{per convergenza} \\ \quad \text{puntuale dominata.}}} |\mu(x, y)|$$

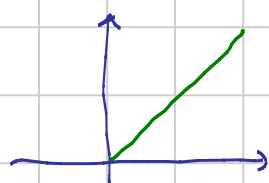
Oss. Allo stesso modo posso estendere

$$A \times (0, +\infty) \rightsquigarrow A \times \mathbb{R}$$

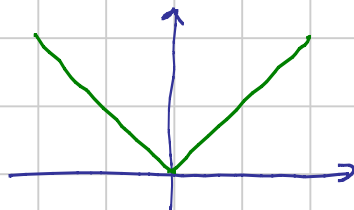
Oss. Nel caso in cui $A = \mathbb{R}^{d-1}$ ho un'estensione da un semispazio a tutto lo spazio.

Domanda L'estensione per parità è un 2-estender?
(cioè $W^{2,p}(C_A^+) \rightsquigarrow W^{2,p}(C_A)$?)

No! Nemmeno nel caso $(0,1) \rightsquigarrow (-1,1)$



$$x \in W^{2,p}([0,1])$$



$$|x| \notin W^{2,p}([-1,1])$$

[Corretto dopo video]

Oss. È NON è nemmeno un 1-estender

Come costruisco un 2-estender?

Il caso vero è estendere da $(0, +\infty) \rightsquigarrow \mathbb{R}$
 $(0,1) \rightsquigarrow (-1,1)$

$$E_2 u(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ a u(-x) + b u(-2x) & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Enusticamente, supponendo u molto regolare, viene fuori

$$a + b = 1$$

$$-a - 2b = 1 \quad \rightsquigarrow \quad a = 3 \quad b = -2$$

... andando a fare la dimostrazione scopriremo che

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0$$

... il che permetterà di avere $|\psi(x)| \leq L|x|^2$ e quindi
esce $\frac{1}{k^2}$.

— o — o —