

Immersione di Sobolev per $p > d$

Ipotesi : $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con $d > p$

Teri : $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ con $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$

$$\uparrow$$

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C(p,d) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}^d}$$

$$\uparrow$$

$$\text{const. hold} \leq C(p,p) \|\nabla u\|_{L^p}$$

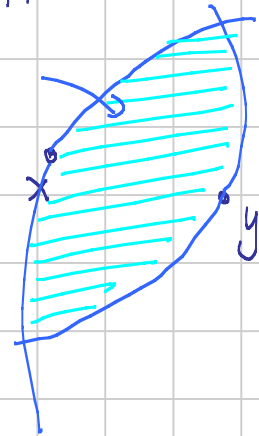
Dim Mostriamo la α -Hölderianità supponendo
 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Dati x e y in $\mathbb{R}^d$,
 ponga

$$\delta := |y - x|$$

$$\text{e } S := B(x, \delta) \cap B(y, \delta)$$

$S =$
 "zona di
 scambio"



Per ogni $z \in S$ vale

$$|u(y) - u(x)| \leq |u(y) - u(z)| + |u(z) - u(x)|$$

Integro in S ottengo

$$\underbrace{\text{meas}(S)}_{C(d) \cdot \delta^d} \cdot |u(y) - u(x)| \leq \int_S |u(y) - u(z)| dz + \int_S |u(z) - u(x)| dz$$

Stimo il 2° integrale al RHS (l'altro è uguale)

$$u(z) - u(x) = \psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt$$

$$\uparrow$$

$$\psi(t) := u(x + t(z-x)) = \int_0^1 \langle \nabla u(x + t(z-x)), z-x \rangle dt$$

e quindi

$$|u(z) - u(x)| \leq \int_0^1 |\langle \nabla u(x + t(z-x)), z-x \rangle| dt$$

$$\leq |z-x| \int_0^1 |\nabla u(x + t(z-x))| dt$$

$$\leq \delta \int_0^1 |\nabla u(x + t(z-x))| dt$$

Ora integro in dz :

$$\int_S |u(z) - u(x)| dz \leq \delta \int_S dz \int_0^1 |\nabla u(x + t(z-x))| dt$$

$$= \delta \int_0^1 dt \int_S |\nabla u(x + t(z-x))| dz$$

$$\leq \delta \int_0^1 dt \int_{B(x, \delta)} \underbrace{1 \cdot |\nabla u(x + t(z-x))|}_{w} dz$$

Pongo $w := x + t(z-x)$, da cui $z = \frac{w-x}{t} + x$

Quando $z \in B(x, \delta)$, dove varia w ? Varia in $B(x, t\delta)$

Quindi

$$\int_S |u(z) - u(x)| dz \leq \delta \int_0^1 dt \frac{1}{t^2} \int_{B(x, t\delta)} \frac{1}{t} |\nabla u(w)| dw$$

$\uparrow$
 dal cambio di variabili

Usando Hölder troviamo

$$\int_S |u(z) - u(x)| dz \leq \delta \int_0^1 dt \frac{1}{t^{\frac{d}{p}}} \left\{ \text{meas}(B(x, t\delta)) \right\}^{\frac{1}{p'}}.$$

$$\left\{ \int_{B(x, t\delta)} |\nabla u(w)|^p dw \right\}^{1/p}$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} C(p, d) \delta \cdot \underbrace{\delta^{\frac{d}{p'}} \int_0^1 dt \frac{1}{t^{\frac{d}{p}}} t^{d(1-\frac{1}{p})}}_{\int_0^1 dt \frac{1}{t^{\frac{d}{p}}}}$$

converge! Nuova costante che dipende da p e da d

Abbiamo ottenuto che

$$\int_S |u(z) - u(x)| dz \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \delta^{1+\frac{d}{p'}}$$

Tornando all'inizio abbiamo

$$C(d) \cdot \delta^d |u(y) - u(x)| \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \delta^{1+\frac{d}{p'}}$$

Resta da fare il conto dei δ

$$\text{LHS} \rightsquigarrow \delta^d \quad \text{RHS} \rightsquigarrow 1 + \frac{d}{p'} = 1 + d\left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1 + \cancel{d} - \frac{d}{p}$$

Abbiamo ottenuto

$$|u(y) - u(x)| \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \cdot |y - x|^{\frac{1}{p}}$$

che è la tesi in questo caso.

Stima L^∞ Dato $x_0 \in \mathbb{R}^d$, sappiamo che

$$\int_{B(x_0, 2018)} |u(x)|^p dx \leq \|u\|_{L^p}^p$$

Per la media integrale sappiamo stimare unif. e in almeno un p.to della palla.

Grazie alla stima sulla costante di Hölder abbiamo stima su $u(x)$ in tutta la palla, quindi anche in x_0 .

Oss. Per come è stata ottenuta la stima su $|u(x)|$ dipende da $\|u\|_{L^p}$ e $\|\nabla u\|_{L^p}$

Caso generale $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e non solo C_c^∞

Le approx della def. H ora convergono pure unif. sui cpt., quindi tutto passa al limite.

Oss. Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, in generale è falso che

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$$

(fare facili controesempi con conetti)



Questo NON è possibile per $p > d$.

[Fatto generale: se $\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^p dx$ converge e

$u(x)$ è UNIF. CONTINUA allora $u(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$]

— o — o —

Oss. Un argomento di riscalamento mostra che le immersioni di Sobolev sono possibili SOLO per gli esponenti "giusti"

Supponiamo di sapere che

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq M \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

Allora per forza $q = p^*$

Dim. Se la disug. vale per $u(x)$, allora vale anche per $u(\lambda x)$. Come riscaliamo LHS e RHS in funzione di λ ?

$$\text{LHS} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} u(\lambda x)^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} u(y)^q \frac{1}{\lambda^d} dy \right\}^{\frac{1}{q}} \\ \sim \frac{1}{\lambda^{d/q}} \cdot \text{norma}$$

$$\text{RHS} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^p |\nabla u(\lambda x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^p |\nabla u(x)|^p \frac{1}{\lambda^d} dy \right\}^{\frac{1}{p}} \\ \sim \lambda^{1 - \frac{d}{p}}$$

Quindi deve succedere che $\frac{1}{\lambda^{d/q}} \leq \lambda^{1 - \frac{d}{p}}$

cioè $\lambda^{1 - \frac{d}{p} + \frac{d}{q}} \geq 1$ per ogni $\lambda > 0$

Questo è possibile solo se $1 - \frac{d}{p} + \frac{d}{q} = 0$, cioè

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{d}$$

Allo stesso modo si vede che l' Hölderianità si ha solo per $d = 1 - \frac{d}{p}$