

Immersioni di Sobolev $d \geq 1$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $p < d$
 per $d=1$ è $\emptyset$

Tesi: $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ con $p^* = \frac{dp}{d-p}$ $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{d}\right)$

Disug. Gagliardo $\varphi(x) := \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i)$ tutto C_c^∞ , allora

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|\varphi_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}$$

Dim. imm. Sobolev

Step 1 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $p=1$, $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ ovviamente

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) dt$$

più, basta
 estremo + piccolo del supporto

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^x \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\dots) \right| dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\dots) \right| dt$$

$\varphi_i(\hat{x}_i)$

$\forall i=1, \dots, d$

$$\Rightarrow |u(x)|^d \leq \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i)$$

$$\Rightarrow |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i)^{\frac{1}{d-1}}$$

$\varphi_i(\hat{x}_i)$

[Aggiunto dopo video:
 per via dei valori
 assoluti questa sta solo
 in $C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, quindi serve
 Gagliardo con regolarità
 C_c^∞ , che si ottiene facile]

Dalla disug. di Gagliardo deduciamo che

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi_i(\hat{x}_i)^{d-1} d\hat{x}_i \right\}^{\frac{1}{d-1}} \\
 &= \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_i(\hat{x}_i) d\hat{x}_i \right\}^{\frac{1}{d-1}} \\
 &= \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\hat{x}_i \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\dots, x_i, \dots) \right| dx_i \right\}^{\frac{1}{d-1}} \\
 &\quad \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)| dx
 \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)| dx \right\}^{\frac{d}{d-1}}$$

Portando l'esponente a sx otteniamo

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

Step 2 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, p generico

Per ogni $r \geq 0$ pongo $v(x) := |u(x)|^r u(x)$
 $= \varphi(u(x))$ con $\varphi(\sigma) = |\sigma|^2 \sigma$

Osservo che $\nabla v(x) = \varphi'(u(x)) \nabla u(x) = (r+1) |u(x)|^r \nabla u(x)$
 $\uparrow$
 $\varphi'(\sigma) = (r+1) |\sigma|^r$

Applico il caso 1 alla funzione $v(x)$:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \right\}^{\frac{d-1}{d}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}(n+1)} dx \right\}^{\frac{d-1}{d}} \\ &= \|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}(n+1)}}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(x)| dx = (n+1) \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{1}{p'}} |\nabla u(x)| dx \\ &\leq (n+1) \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{p'n} dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= (n+1) \|u\|_{L^{p'n}}^n \cdot \|\nabla u\|_{L^p} \end{aligned}$$

Mettendo insieme $\text{LHS} \leq \text{RHS}$:

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}(n+1)}}^{n+1} \leq (n+1) \|u\|_{L^{p'n}}^n \cdot \|\nabla u\|_{L^p}$$

Vorrei che le 2 norme di u fossero la stessa, quindi

$$\frac{d}{d-1}(n+1) = p'n = \frac{p}{p-1}n \Leftrightarrow n \left(\frac{p}{p-1} - \frac{d}{d-1} \right) = \frac{d}{d-1}$$

$$\Leftrightarrow n \frac{\cancel{pd} - p - \cancel{d} + d}{(p-1)(\cancel{d-1})} = \frac{d}{\cancel{d-1}} \Leftrightarrow n = \frac{d(p-1)}{d-p}$$

Quindi $n+1 = \frac{dp - \cancel{d} + \cancel{d} - p}{d-p} = \frac{p(d-1)}{d-p}$ e infine

$$\frac{d}{d-1}(n+1) = \frac{d}{\cancel{d-1}} \frac{p(\cancel{d-1})}{d-p} = \frac{dp}{d-p} = p^* = p'n$$

Semplificando abbiamo

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq \underbrace{(n+1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{costante che dipende da } d \text{ e da } p}} \|\nabla u\|_{L^p}$$

Step 3 p generico, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

Per approx. esiste $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c.

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d) \quad \nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x) \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

Per il caso precedente

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \cdot C(d,p)$$

$\{|\nabla u_n(x)|\}$ è di Cauchy in $L^p(\mathbb{R}^d)$, quindi per linearità e per la disug.

$\{u_n(x)\}$ è di Cauchy in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$, quindi ha un limite in L^{p^*} , che verifica la disug.

Vorrei che il limite fosse proprio u

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^p \\ u_n \rightarrow v \quad \text{in } L^{p^*} \end{array} \right\} \xrightarrow{?} u = v$$

↑
Sì, perché a meno di s.succ. la convergenza è pure puntuale q.o.

— 0 — 0 —

Caso $p=d$ Tesi: $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $q \in [p, \infty)$
↑ escluso

Ipotesi: $u \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$

Dim: allo step 2 precedente abbiamo ottenuto:

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(n+1)}^{n+1} \leq (n+1) \|u\|_{L^{p/n}}^n \cdot \|\nabla u\|_{L^p}$$

Nel caso speciale $p = d$ diventa

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(n+1)} \leq (n+1) \|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}n} \cdot \|\nabla u\|_{L^d}$$

Idea brutale: esponente a sx è meglio di quello a dx, quindi se ho stima in uno spazio, ho stima in uno spazio migliore (di quanto migliore? $\frac{d}{d-1}$)

Formalmente dimostriamo che $u \in L^{p + \frac{kd}{d-1}}(\mathbb{R}^d)$

Passo base è l'ipotesi: $u \in L^p$

Per passare da k a $k+1$ si tratta di scegliere il valore giusto di n .

Supponiamo per hp induttiva

$$u \in L^{p + \frac{kd}{d-1}} =: L^{q_k} \quad \text{con} \quad \|u\|_{L^{q_k}} \leq C(p, d, k) \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\text{Sceggo } n \text{ t.c. } \frac{d}{d-1}n = p + \frac{kd}{d-1} \quad \leadsto \quad n = \frac{p(d-1)}{d} + k$$

e dalla disug. di sopra ottengo che so stimare la norma di u nello spazio con esponente

$$\frac{d}{d-1}(n+1) = q_{k+1} \quad (\text{conto facile})$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{q_{k+1}}} &\leq \|u\|_{L^{q_k}}^{\frac{n}{n+1}} \|\nabla u\|_{L^p}^{\frac{1}{n+1}} (n+1) \\ &\leq (n+1) C(p, d, k)^{\frac{n}{n+1}} \underbrace{\|\nabla u\|_{L^p}^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|\nabla u\|_{L^p}^{\frac{1}{n+1}}}_{\|\nabla u\|_{L^p}^1} \end{aligned}$$

Esempio di ottimalità

Voglio, fissato p , una funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$,
ma $u \notin W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$ per ogni $q > p$.

Con un po' di pazienza si vede che

$$u(x) = \frac{e^{-|x|} \text{ ~~~~~~ evitiamo seccature a } +\infty}{|x|^{\frac{d}{p}-1} |\log x|}$$

Con conti di analisi 1-2 si vede che per $|x| \sim 0$

$$|\nabla u(x)| \sim \frac{e^{-|x|}}{|x|^{\frac{d}{p}} |\log x|}$$

$$\text{e quindi } |\nabla u(x)|^p \sim \frac{e^{-p|x|}}{|x|^d |\log x|^p}$$

e questo converge a mala pena con il pbm. in $x=0$.

Ci chiediamo: per quali q vale che $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$?

Facendo il conto si vede che è per $q \leq p^*$.

— 0 — 0 —