

TEOREMA DI IMMERSIONE

QUELLO CHE SEGUE VALE SOLO IN $\mathbb{R}^d$, cioè $\Omega = \mathbb{R}^d$

Sia $d \geq 1$, sia $p \in [1, +\infty]$ (estremi concessi) e sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Caso 1 Se $p < d$, allora $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ dove p^* risolve

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{d} \quad \text{cioè} \quad p^* = \frac{dp}{d-p}$$

positivo

e vale

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Caso 2 Se $p = d$, allora $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $q \in [p, +\infty)$
(ma non necessariamente $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$)
e vale

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p, q) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Caso 3 Se $p > d$, allora $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e vale

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(p, d) \left\{ \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right\}$$

Inoltre $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ (nel solito senso: esiste una funzione $C^{0,\alpha}$ che coincide con u q.o.) con $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$
e vale

$$|u(y) - u(x)| \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |y - x|^\alpha \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$$

Immersioni per ordine superiore

$d \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$, $m \geq 1$, $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

Caso 1 Se $mp < d$, allora $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ con

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{m}{d} \quad \left(\text{cioè } q = \frac{dp}{d - mp} \right)$$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p, m) \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Caso 2 Se $mp = d$, allora $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $q \in [p, +\infty)$ e vale

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p, q, m) \sum_{|\alpha| = m} \dots$$

Caso 3 Se $mp > d$, allora $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e vale

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p, m) \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Inoltre, detto R il più piccolo intero t.c. $Rp > d$, allora

$$u \in C^{m-R, \alpha}(\mathbb{R}^d) \quad \text{con} \quad \alpha = 1 - \frac{d}{Rp}$$

e vale

$$|D^\beta u(y) - D^\beta u(x)| \leq C(p, d, m) \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |y - x|^\alpha$$

per ogni $(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$ e per ogni $|\beta| \leq m - R$.

Dim. teo. ordine superiore: inclusione a partire da quello di ordine

— o — o —

Quando vale qualcosa del genere in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$?

Quando Ω è abbastanza regolare !!

PROBLEMA DELL'ESTENSIONE

Def. $d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $m \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$

- Si dice (m, p) -estensione una funzione liscia

$$E_{m,p} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$$

tale che

- (i) $E_{m,p} u(x) = u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$
- (ii) esiste $C(m, p) < +\infty$.

$$\|u\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq C(m,p) \|u\|_{m,p,\Omega}$$

- Si dice m -estensione forte una funzione liscia

$$E_m : L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$$

tale che

la sua restrizione a $W^{m,p}(\Omega)$ è una (m, p) -estensione

- Si dice estensione universale una funzione liscia

$$E : L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$$

che va bene per ogni (m, p) .

Fatto 1 Se esiste una (m,p) -estensione, allora vale il teorema di approssimazione deluxe per $W^{m,p}(\Omega)$.

Dim. Prendo $u \in W^{m,p}(\Omega)$, la estendo ad una $\hat{u} = E_{m,p} u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

→ approx $\hat{u}$ con funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

→ queste a maggior ragione approssimano su Ω .

Oss. Si può dimostrare l'approx deluxe senza passare per la (m,p) estensione, e con ipotesi molto più deboli

Fatto 2 Se esiste una $(1,p)$ estensione per Ω , allora l'immersione di Sobolev con i 3 casi a partire da $W^{1,p}(\Omega)$ vale.
L'unica variante è che a dx delle disuguaglianze servono norme complete

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(d,p,\Omega) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

Dim. Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$

→ considero $\hat{u} := E_{1,p} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

→ per il teorema in $\mathbb{R}^d$ ho che $\hat{u} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$

→ restringo ad Ω

immersione in $\mathbb{R}^d$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|\hat{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla \hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

teo. estensione → $\leq \|u\|_{1,p,\Omega}$

Fatto 3 Le immersioni iterate valgono in Ω se Ω ammette una $(1,p)$ estensione (NON serve (u,p))

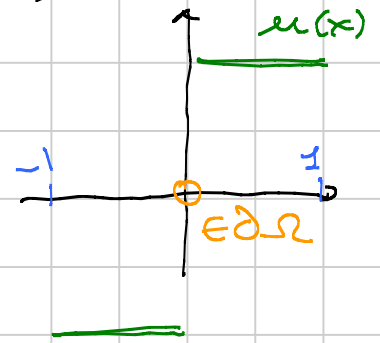
Facendosi per induzione, basta dimostrare il risultato quando si scende di uno sull'ordine.

Esempio 1 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ $\Omega = (-1,0) \cup (0,1)$

Qui non funziona nulla

La $u(x)$ in figura sta in tutti i $W^{1,p}(\Omega)$. Tuttavia

- non si approssima Deluxe
- non è Hölderiana (in questo Ω non vale l'immersione)
- non si estende ad $\mathbb{R}^d$.



Esempio 2 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ limitato, $u \in W^{1,p}(\Omega)$
 $\Rightarrow u$ limitata?
(su un intervallo è vero !!)

Se u è come in figura e sta sotto $|\log x|$, allora

$u \in W^{1,p}(\Omega)$ per ogni (u,p)

ma non è limitata!!!

— o — o —

