

TEOREMI PRODOTTO E COMPOSIZIONE

$$\boxed{\text{Sobolev} \cdot C_c^\infty = \text{Sobolev}} \quad \begin{aligned} u &\in W^{m,p}(\Omega), \quad \psi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \Rightarrow u\psi &\in W^{m,p}(\Omega) \\ &\in W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

Dim perosa Inclusione su m .

$$\boxed{m=1} \quad \text{Claim: } u\psi \in W^{1,p} \text{ e } D_{x_i}(u\psi) = D_{x_i}u \cdot \psi + u \cdot D_{x_i}\psi$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u\psi D_{x_i}\varphi \, dx &= \int_{\Omega} u \{ D_{x_i}(\psi\varphi) - D_{x_i}\psi \cdot \varphi \} \\ &= \int_{\Omega} u D_{x_i}(\underbrace{\psi\varphi}_{\in C_c^\infty}) - \int_{\Omega} u D_{x_i}\psi \varphi \\ &= - \int_{\Omega} D_{x_i}u \cdot \psi\varphi - \int_{\Omega} u D_{x_i}\psi \varphi \end{aligned}$$

Raccolgo φ e ho Qa tesi.

$$\boxed{m \Rightarrow m+1} \quad u \in W^{m+1,p}(\Omega) \quad |\alpha| \leq m+1$$

$$D^\alpha = D_{x_i} D^\beta \quad (\beta = \text{ciò che rimane tirata fuori } D_{x_i})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u\psi) D^\alpha \varphi &= \int_{\Omega} u\psi D_{x_i} D^\beta \varphi \\ &= \int_{\Omega} u \{ D_{x_i}(\psi D^\beta \varphi) - D_{x_i}\psi D^\beta \varphi \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} u D_{x_i} (\psi D^{\beta} \varphi) - \int_{\Omega} u D_{x_i} \psi \cdot D^{\beta} \varphi \\
&= - \int_{\Omega} \underbrace{D_{x_i} u}_{W^{1,p}} \cdot \underbrace{\psi D^{\beta} \varphi}_{C_c^{\infty}} - \int_{\Omega} \underbrace{u}_{W^{1,p}} \underbrace{D_{x_i} \psi \cdot D^{\beta} \varphi}_{C_c^{\infty}} \\
&\quad \parallel \\
&= \int_{\Omega} \text{Mostro} \cdot \varphi - \int_{\Omega} \text{Mostro} \cdot \varphi \\
&\quad \text{--- o --- o ---}
\end{aligned}$$

Teorema (Prodotto vero) $d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $p \in [1, +\infty]$

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega) \quad v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$$

superfluo in dim 1 SU UN INTERVALLO

Allora $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ e $D_{x_i}(uv) = D_{x_i}u \cdot v + u \cdot D_{x_i}v$

[Dim]

Uso la def. W : $\int_{\Omega} uv D_{x_i} \varphi$ e mi PIANTO 😞

Uso Meyers-Semlin

$$\begin{array}{lll}
u_n \rightarrow u & v_n \rightarrow v & \text{in } L^p(\Omega) \\
D_{x_i} u_n \rightarrow D_{x_i} u & D_{x_i} v_n \rightarrow D_{x_i} v &
\end{array}$$

Spero che

$$\begin{aligned}
&u_n v_n \rightarrow uv \\
&D_{x_i} u_n \cdot v_n + u_n D_{x_i} v_n \rightarrow D_{x_i} u \cdot v + u \cdot D_{x_i} v \\
&\quad \parallel \\
&D_{x_i}(u_n v_n)
\end{aligned}$$

Se fossi stato più attento nel dim. Meyers-Semlin, avrei che, se $u \in L^\infty$, allora uv sono equi- L^∞ (ho fatto solo convoluzioni) $\rightarrow$ a voce nel video

$$\begin{aligned} \|uv_m - uv\|_{L^p} &\leq \|uv_m - u_m v\|_{L^p} + \|u_m v - uv\|_{L^p} \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &\leq \|u_m\|_{L^\infty} \|v_m - v\|_{L^p} + \|u_m - u\|_{L^p} \|v\|_{L^\infty} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Stesso discorso per le derivate.

Achtung! Se $p = \infty$, allora non abbiamo $H = W$

Anche per $p = \infty$ posso definire $D_{x_i} u \cdot v + u \cdot D_{x_i} v$ e so che è L^∞

Prendo $\Omega' \subset\subset \Omega$. In questo insieme abbiamo che u e v sono in $W^{1,p}(\Omega')$ con $p = 2018$. Quindi in Ω' posso approssimare in $L^{2018}(\Omega')$ e ottengo che

$$D_{x_i} u \cdot v + u \cdot D_{x_i} v$$

è la derivata debole in senso W del prodotto.

A questo punto ho finito! Se penso alla definizione W , allora

$$\int_{\Omega} uv D_{x_i} \varphi = - \int_{\Omega} (D_{x_i} u \cdot v + u \cdot D_{x_i} v) \varphi$$

per ogni φ . Per questa basta che Ω' che contiene il supporto di φ .

$\uparrow$ sia deriv. debole in

— o — o —

Cosa ci sta sotto Potevamo definire

$$H_{\text{low-cost}}^{u,p}$$

chiedendo la convergenza $D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha u$ solo in $L^p(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$.

$$H^{u,p}(\Omega) \subseteq H_{\text{Lc}}^{u,p}(\Omega) \subseteq W^{u,p}(\Omega)$$

↑
ovvio

↑
solito pass.
al limite

=

↑
TEO. 1 (Low-cost)

Una volta ottenuta l'uguaglianza $H_{\text{Lc}} = W$ possiamo fare i tes. algebrici

$$u_n \rightarrow u \quad \text{solo in } L^p(\Omega') \text{ con } \Omega' \subset \subset \Omega$$
$$D_{x_i} u_n \rightarrow D_{x_i} u$$

e stessa cosa per v

Questo basta per dedurre che

$$u_n v_n \rightarrow u v \quad \text{nello stesso senso}$$
$$D_{x_i} (u_n v_n) \rightarrow D_{x_i} u \cdot v + u \cdot D_{x_i} v$$

Con questo sistema posso fare il Lemma W-Sobolev. $C^\infty =$
W-Sobolev con più facilità (uso tes. approx low cost)

— o — o —

Teo. Composizione (Duval) $d \geq 1, m=1, p \in [1, \infty], \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
 Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $u \in W^{1,p}(\Omega)$

(1) $g \in C^1$

(2) $g(0)=0$ (inutile se $\text{meas}(\Omega) < +\infty$)

(3) $|g'(s)| \leq M \quad \forall s \in \mathbb{R}$

Allora $g(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e $D_{x_i}[g(u)] = g'(u) D_{x_i} u$

Dim. Prendo $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$
 $D_{x_i} u_n \rightarrow D_{x_i} u$ (basta anche low-cost)

Spero che $g(u_n) \rightarrow g(u)$
 $D_{x_i}(g(u_n)) \rightarrow g'(u) D_{x_i} u$
 $g'(u_n) D_{x_i} u_n$] in $L^p(\Omega)$
 oppure low-cost

Perché $g(u) \in L^p$? Da (2) e (3) segue $|g(s)| \leq M|s|$
 e quindi

$$|g(u(x))| \leq M |u(x)|$$

elevo alla p e integro...

A meno di sottosucc. posso supporre che $u_n(x) \rightarrow u(x)$
 per q.o. $x \in \Omega$ ed in maniera dominata e quindi

$g(u_n(x)) \rightarrow g(u(x))$ per q.o. $x \in \Omega$
 ed in modo dominato, da cui la convergenza in L^p .
 Idem per le derivate.

Per $p = \infty$ ci si aggiusta con $p = 2018$.
 — o — o —

Teorema (valore assoluto)

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow |u| \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e}$$

$$D_{x_i} |u| = \operatorname{sign}(u) \cdot D_{x_i} u$$

Dim Prendo $g_n(s) = \sqrt{s^2 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$

Allora $g_n(u) \in W^{1,p}$ e $D_{x_i} g_n(u) = g_n'(u) \cdot D_{x_i} u$

Spero che mandando $n \rightarrow \infty$ ottengo la tesi.

(sto usando la composizione, non quelli di approx)
— o — o —