

Step 2 Voglio $\{u_n\} \subseteq C^\infty(\Omega)$ t.c.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow u \\ D^\alpha u_n \rightarrow v = D^\alpha u \end{array} \right\} \text{ in } L^1(\Omega') \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega$$

Lo so fare fissato Ω' .

Considero

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : |x| < k \text{ e } \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$$

Si nota che $\Omega_k \subset\subset \Omega_{k+1} \subset\subset \Omega$

Fissato k , trovo una succ. $u_n^{(k)}$ che va bene su Ω_k .
In particolare esiste n_k tale che

$$\left. \begin{array}{l} \|u_{n_k}^{(k)} - u\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k} \\ \|D^\alpha u_{n_k}^{(k)} - v\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k} \end{array} \right\} \text{ basta che } \rightarrow 0$$

Dico che la successione $k \rightarrow u_{n_k}^{(k)}$ verifica la tesi per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$.

È facile vedere che $\Omega' \subset\subset \Omega_k$ definitivamente in k .
Ma allora definitivamente

$$\|u_{n_k}^{(k)} - u\|_{L^1(\Omega')} \leq \|u_{n_k}^{(k)} - u\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k}$$

e idem per le derivate.

— o — o —

Lemma (W -Sobolev $\times C_c^\infty = W$ -Sobolev)

Siano $d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty]$, $m \geq 1$, $u \in W^{m,p}(\Omega)$
 $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Allora

$$u\psi \in W^{m,p}(\Omega)$$

e valendo c'è la formula "solita" per le sue derivate

Proposizione (Partizione dell'unità - Caso 1)

$d \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $\{A_k\}$ succ. di aperti t.c.

(i) $A_k \subset\subset A$

(ii) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A$

(iii) il ricopr. è loc. finito, cioè ogni compatto $K \subseteq A$ interseca solo un # finito di A_k .

Allora esiste una part. dell'unità relativa ad A_k , cioè una famiglia $\{\psi_k\}$ di funzioni t.c.

$$\bullet \quad 0 \leq \psi_k(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \quad \psi_k \in C_c^\infty(A_k) \text{ e zero fuori}$$

$$\bullet \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k(x) = 1 \quad \forall x \in A.$$

— o — o —

Dim. MEYERS-SERRIN Sia dato Ω .

Per $k \geq 1$ definisco

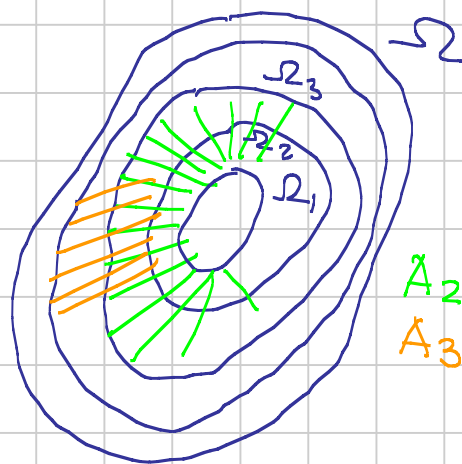
$$\Omega_k := \{x \in \Omega : |x| < k \text{ e } \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$$

Stesse oss. di prima. Per solidariet  posso $\Omega_0 = \emptyset = \Omega_{-1}$

Poniamo per $k \geq 1$

$$A_k := \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega}_k$$

$$B_k := \Omega_{k+2} \setminus \overline{\Omega}_{k-1}$$



Si osserva che $A_k \subset B_k$ e

$\{A_k\}$ sono un ricopr. di Ω loc. finito come nella prop.

Sia $\{\varphi_k\}$ la relativa partizione dell'unit . Posso

$$u_k(x) := u(x) \cdot \varphi_k(x)$$

Per le definizioni vale che

- $u_k \in W^{m,p}(\Omega)$
- il supporto di u_k   contenuto dentro A_k
- $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k(x) = u(x) \quad (\forall x \text{ ci sono al max 2 addendi non nulli})$

Essendo le u_k a supporto compatto io le posso approx bene come voglio su tutto Ω usando le convoluzioni.

Per dimostrare il teorema basta, per ogni $\eta > 0$, trovare $v \in C^\infty(\Omega)$ t.c.

$$\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \eta \quad \text{per ogni } |\alpha| \leq m$$

Procediamo in questo modo. Per ogni k posso approx. u_k bene quanto voglio per convoluzione. Allora esiste v_k t.c.

$$\|v_k - u_k\|_{m,p,\Omega} \leq \frac{1}{2^k} \eta$$

Visto che sto usando le convoluzioni per approx u_k , posso supporre anche

$$\text{supporto}(v_k) \subseteq B_k$$

Pongo infine

$$v(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}} v_k$$

Conclusione

$$\begin{aligned} \|v - u\|_{m,p,\Omega} &= \left\| \sum (v_k - u_k) \right\|_{m,p,\Omega} \\ &\leq \sum \|v_k - u_k\|_{m,p,\Omega} \\ &\leq \sum \frac{\eta}{2^k} = \eta \quad \text{😊} \end{aligned}$$

Osservo infine che $v \in C^\infty(\Omega)$ perché in ogni palla cc Ω sto sommando solo un numero finito di funzioni C^∞ .

— 0 — 0 —

Sublemma (Nei ricoprimenti posso risparmiare!)

Siano $\{A_k\}$ e A come nella proposizione.

Allora esistono

$$\hat{A}_k \subset A_k$$

che sono ancora un ricoprimento!

Dim Step 1 Sostituisco A_1 con un $\hat{A}_1 \subset A_1$.

↑ corretto dopo video

Considero

$$A_{1,i} := \{x \in A_1 : \text{dist}(x, \partial A_1) > \frac{1}{i}\}$$

Dico che per i grande va bene!

Se non andasse mai bene, vorrebbe dire che per ogni i esiste

$$x_i \notin A_{1,i} \cup \bigcup_{k \geq 2} A_k$$

Quindi $x_i \notin A_k$ con $k \geq 2$, ma allora $x_i \in A_1$, ma allora a meno di s.succ. non rinominate

$$x_i \rightarrow x_\infty \in \Omega \quad (\text{perché } A_1 \subset \Omega)$$

Dove sta x_∞ ?

- Può stare in A_{27} ? NO! Altrimenti $x_i \in A_{27}$ per i grande
- Può stare in A_1 ? NO! perché $x_i \notin A_{1,i}$, quindi

$$\text{dist}(x_i, \partial A_1) \leq \frac{1}{i} \quad \leadsto \quad x_\infty \in \partial A_1$$

Step 2 Conclusione per induzione. Prima $A_1 \leadsto \hat{A}_1$, poi $A_2 \leadsto \hat{A}_2$ e così via.

— o — o —

Dim. (Partizione dell'unità)

Data $\{A_k\}$ costruisco $\{\hat{A}_k\}$ che rispannia.

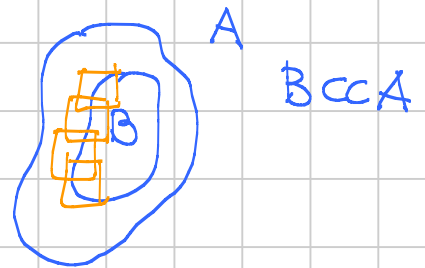
Per ogni k esiste $\Theta_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ t.c.

- $0 \leq \Theta_k(x) \leq 1$ sempre

- $\Theta_k(x) = 1$ su $\hat{A}_k$

- $\Theta_k(x) = 0$ fuori da A_k (anzi $\Theta_k \in C_c^\infty(A_k)$)

[Modo "colto": prendo $\Theta_k = (\chi_{\hat{A}_k} * \varrho_\varepsilon)$



con ε abbastanza piccolo.

Alternativa: per ogni punto in B trovo un rettangolino dove ho una funzione che va bene, poi le sommo e infine trovo]

Pongo $S(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \Theta_k(x)$

e osservo che è C^∞ (la somma è loc. finita) e strett. positiva su tutto A .

Definisco

$$\psi_k(x) := \frac{\Theta_k(x)}{S(x)} \quad \forall x \quad \forall k$$

e ho finito.

— o — o —