

TEOREMI DI APPROSSIMAZIONE

Teorema 0 $d \geq 1, \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, α multi-indice
 Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ con $v = D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$
 (stiamo supponendo che esista) $\uparrow$ in senso W

Allora esiste $\{u_n\} \subseteq C^\infty(\Omega)$ (volendo anche a supp. comp.)
 tale che

- $u_n \rightarrow u$ in $L^1(\Omega')$ per ogni $\Omega' \Subset \Omega$
- $D^\alpha u_n \rightarrow v$ " " "

(se u e v sono in $L^p_{loc}(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty)$ (escluso $+\infty$)
 allora la conv. è in $L^p(\Omega')$ per ...)

Teorema 1 (Approssimazione low-cost)

$d \geq 1, \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, m \geq 1, p \in [1, +\infty)$ $\uparrow$ Sia $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Allora esiste

$$\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \quad (\text{definita ovunque})$$

tale che

- $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$
- $D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha u$ in $L^p(\Omega')$ per ogni $\Omega' \Subset \Omega, \forall |\alpha| \leq m$

Teorema 2 ($H=W$, by MEYERS-SERRIN 1964)

d, Ω, m, p, u come sopra.

Allora esiste

$$\{u_n\} \subseteq C^\infty(\Omega)$$

t.c.

- $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$
- $D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha u$ in $L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m$

Teorema 3 (Approssimazione Deluxe)

Tutto come sopra, ma in più supponiamo Ω SUFFICIENTEMENTE REGOLARE.

Allora esiste

$$\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

t.e.

- $u_m \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$
- $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$ in $L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m,$

Differ. fra i vari teoremi

- Teo 1: $\{u_m\}$ molto bella, ma la conv. è brutta
- Teo 2: $\{u_m\}$ minimalista (per quanto ne sappiamo non si estendono nemmeno a $\partial\Omega$), ma conv. ok
- Teo 3: succ. e conv. ok, ma pago in ipotesi su Ω .

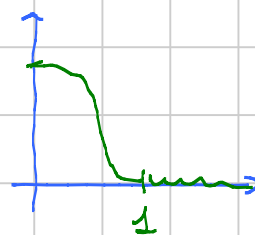
Mollificatori e convulsioni

- Def. (mollificatore) È una $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c. va bene anche meno

(i) $0 \leq \rho(x) \leq 1$

(ii) $\rho(x) = 0$ per $|x| \geq 1$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = \int_{B(0,1)} \rho(x) dx = 1$



Def. (Reg. per convulsione) Data $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ si pone

$$u_\varepsilon(x) = [u * \rho_\varepsilon](x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x + \varepsilon y) \rho(y) dy$$

$x + \varepsilon y = z$

$$= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) dz$$

Oss. Se u è definita solo su Ω , allora u_ε è definita a partire da u estesa a 0 fuori di Ω .

Proprietà Setting come sopra

- $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $D^\alpha u_\varepsilon(x) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{d+|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) D^\alpha \left(\frac{z-x}{\varepsilon} \right) dz$
 $\uparrow$
 C^{k+1} se $\rho \in C^k$

- Se $u \in L^p(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty]$, allora

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

- Se $u \in L^p(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty)$, allora

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\quad} u \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

Lemma (La convoluzione commuta con le W-derivate)

$d \geq 1$, $A \subset\subset B \subseteq \mathbb{R}^d$ aperti, $u \in L^1(B)$ e $v = D^\alpha u \in L^1(B)$.
 Poniamo

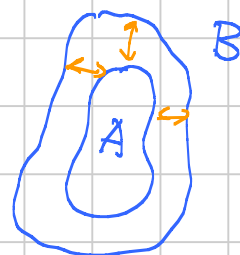
$$\delta := \min \{ d(a, \partial B) : a \in A \} > 0$$

Allora

$$D^\alpha u_\varepsilon = D^\alpha [u * \rho_\varepsilon](x) = [(D^\alpha u) * \rho_\varepsilon](x)$$

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta)$$

Dim
$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) dz$$



Derivando sotto il segno di integrale

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) D^\alpha \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{|\alpha|}} dz$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^d} \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} (-1)^{|\alpha|}}_{D^\alpha \varphi} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) \underbrace{D^\alpha \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right)}_{D^\alpha \varphi} dz$$

$$\varphi(z) := \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^d} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) D^\alpha \varphi(z) dz$$

* posso mettere B

(def. W)

$$= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha u(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) dz$$

* posso mettere B.

$$= [D^\alpha u * \rho_\varepsilon](x)$$

Occhio: io posso usare la (def. W) se ho integrali su B
 Però se $x \in A$ e $\varepsilon \in (0, \delta)$ gli integrali sono
 in $B(x, \varepsilon) \subseteq B$.

— o — o —

Dcu. Approx. Low-cost Prendo $u \in L^p(\Omega)$. La estendo
 a $\hat{u}$ su tutto $\mathbb{R}^d$
 Prendo le convoluzioni u_ε .

- Per le propr. delle convoluzioni $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$
- Quando le derivate: fissato $\Omega' \subset\subset \Omega$ avremo che

$$D^\alpha u_\varepsilon = D^\alpha u * \rho_\varepsilon \quad \text{in } \Omega' \text{ per } \varepsilon \text{ piccolo}$$

$$\downarrow$$

$$D^\alpha u$$

Ora sappiamo che $D^\alpha u \neq 0 \rightarrow D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$

e quindi in particolare $D^\alpha u_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$ in $L^p(\Omega')$.

Dim. ter. o $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ $v = D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$

Step 1 Fissato $\Omega' \subset \subset \Omega$, dico che

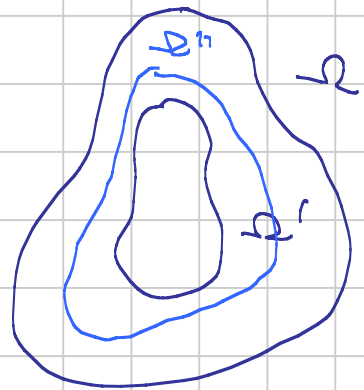
$u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1(\Omega')$ e $D^\alpha u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1(\Omega')$ (*)

Come ho definito u_ε ? Non posso estendere u da Ω a $\mathbb{R}^d$.

Come la aggiustiamo?

Prendo

$$\Omega' \subset \subset \Omega'' \subset \subset \Omega$$



[costruzione a voce nel video]

Estendo u da Ω'' a $\mathbb{R}^d$ e la uso per definire u_ε .

Come nella dim prec. ottengo (*)

NON abbiamo finito, perché la u_ε costruita dipende da Ω' e noi ne vorremmo una che va sempre bene.