

SPAZI DI SOBOLEV

Dim. qualunque
Ordine qualunque
Aperto qualunque

Definizioni

Teo. approssimazione

- " immersione
- " estensione
- " compattezza
- " traccia (versione basic)

Applicazioni

DEFINIZIONI

Def. (Derivate W-deboli)

 $d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ multiindice (Analisi 2).Siano $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $v \in L^1_{loc}(\Omega)$.Si dice che v è la derivata W-debole di u di ordine α se

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

$\parallel$
 $D^{\alpha} u$

Proprietà basic① UnicitàSiano v_1 e $v_2 \dots$ allora ... FLCV② Linearietà

$$D^{\alpha}(au + bv) = a D^{\alpha} u + b D^{\alpha} v$$

[Esercizio]

③ Compatibilità classica Se $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, allora...

④ Passaggio al limite

Siano $\{u_m\}$ e $\{v_m\}$ in $L^1_{loc}(\Omega)$. Supponiamo che

$$(i) \quad v_m = D^\alpha u_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad u_m \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^1(\Omega') \text{ per ogni } \Omega' \subset\subset \Omega$$

$$(iii) \quad v_m \rightarrow v_\infty$$

] basta
debole

$$\text{Allora } v_\infty = D^\alpha u_\infty$$

Dim

$$\int_{\Omega} u_m(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_m(x) \varphi(x) dx$$



$$\int_{\Omega} u_\infty(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\infty(x) \varphi(x) dx$$

Oss. 1 - Mi è bastato che $u_m \rightarrow u_\infty$ e $v_m \rightarrow v_\infty$ in $L^1(\Omega')$ con Ω' che contiene il supporto di φ

2 - In realtà ho usato solo

$$\begin{array}{ccc} u_m \rightarrow u_\infty & \text{debole in } L^1(\Omega') \text{ per ogni } \Omega' \subset\subset \Omega. & \\ v_m \rightarrow v_\infty & \text{--- o ---} & \end{array}$$

Def. (Derivate H-deboli)

$d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, α multi-indice, u e v in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Diciamo che v è la derivata H-debole di u di ordine α se esiste $\{u_m\} \subseteq C^\infty(\Omega)$ (volendo anche a supporto cpt.) t.c.

$$(i) \quad u_m \rightarrow u \quad \text{in } L^1(\Omega') \text{ per ogni } \Omega' \subset\subset \Omega$$

$$(ii) \quad D^\alpha u_m \rightarrow v \quad \text{" "}$$

↑ derivate vere

Speranza : v è derivata W -debole $\Leftrightarrow v$ è deriv. H -debole

Facile H -debole $\Rightarrow W$ -debole

Dim. Punto 4+3 precedente

— 0 — 0 —

Esercizio Per le derivate deboli il teorema di inversione dell'ordine di derivazione è automatico.

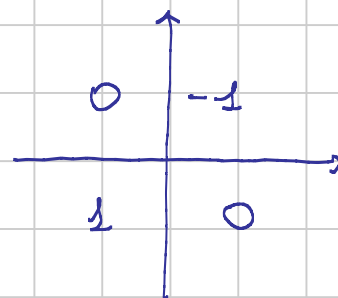
[Si basa tutto su C^∞ dove è vero]

Esercizio (Prima stranezza)

Può succedere, già in $\mathbb{R}^2$, che u_{xy} esista senza che esistano u_x e u_y .

Esempio classico.

• Verifico che $u_{xy} \equiv 0$



$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \cdot \varphi_{xy}(x,y) dx dy \stackrel{?}{=} 0$$

Supponiamo $\varphi \equiv 0$ fuori da $[-R, R]^2$

$$\text{LHS} = \int_{-R}^R dx \int_{-R}^R dy u(x,y) \varphi_{xy}(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-R}^0 dx \int_{-R}^0 dy \varphi_{xy}(x,y) - \int_0^R dx \int_0^R dy \varphi_{xy}(x,y)$$

$$= \int_{-R}^0 dx \varphi_x(x,0) + \int_0^R dx \varphi_x(x,0)$$

$$= [\varphi(x,0)]_{-R}^0 + [\varphi(x,0)]_0^R = \varphi(0,0) - \varphi(0,0) = 0 \quad \text{😊}$$

- Verifichiamo che u_y non esiste (è come la Heaviside nel caso di una variabile)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \varphi_y(x,y) dx \\ &= \int_{-R}^0 dx \int_{-R}^0 dy \varphi_y(x,y) dx - \int_0^R dx \int_0^R dy \varphi_y(x,y) \\ &= \int_{-R}^0 dx \varphi(x,0) + \int_0^R dx \varphi(x,0) = \int_{-R}^R \varphi(x,0) dx = (1) \end{aligned}$$

Questo non si può scrivere come

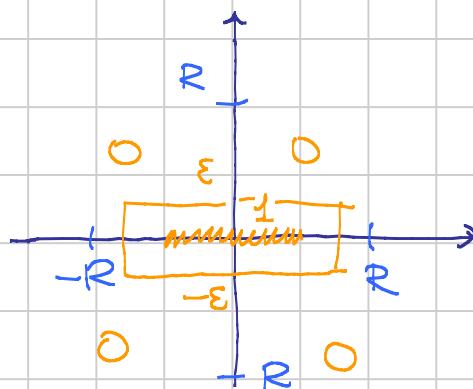
$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) \nabla(x,y) dx dy = (2)$$

Come in una variabile basta usare delle φ come in figura

Usando queste si vede che

(1) $\geq$ costante positiva

(2) $\rightarrow 0$ per convergenza dominata.



Def. (Spazi di Sobolev, definizione W)

$d \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $m \geq 1$ (ordine di derivazione), $p \in [1, +\infty]$

Si indica con $W^{m,p}$ l'insieme delle $u \in L^p(\Omega)$ t.c.

tutte le derivate $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ con $|\alpha| \leq m$.

↑
in senso W

Def. (Spazi di Sobolev, definizione H operativa)

d, Ω, m, p come sopra.

Diciamo che

$$u \in H^{m,p}(\Omega)$$

se esiste

$$\{u_m\} \subseteq C^\infty(\Omega) \quad (\text{importante che non c'è il supporto compatto})$$

tale che

$$\bullet \quad u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

più forte che la richiesta nella def. H

$$\bullet \quad D^\alpha u_n \text{ ha limite in } L^p(\Omega) \text{ per ogni } |\alpha| \leq m$$

Def. (Spazi di Sobolev, definizione H astratta)

Pseudo $C^\infty(\Omega)$ e considero la quantità

$$\|u\|_{m,p,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p$$

Sia $C^{m,p}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ per cui $\|u\|_{m,p,\Omega}$ è finito.

Si verifica facilmente che $C^{m,p}(\Omega)$ è uno sp. vett. e quella è una norma.

Allora $H^{m,p}(\Omega)$ è il completamento di $C^{m,p}(\Omega)$ rispetto alla distanza indotta dalla norma.

Fatto facile : La def. operativa e quella astratta coincidono.

$$\underline{\text{Altro facile}} : \quad \underline{H^{m,p}(\Omega)} \subseteq \underline{W^{m,p}(\Omega)}$$