

Separazione punto - convesso

Sia H sp. di Hilbert

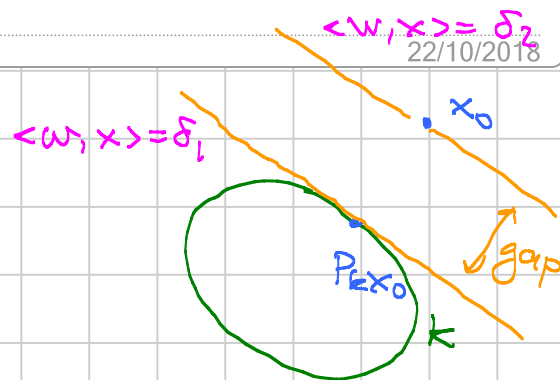
$K \subseteq H$ convesso chiuso $\neq \emptyset$

$x_0 \in H \setminus K$

Allora esiste $w \in H$ ed esistono numeri reali $\delta_2 > \delta_1$ tale che

$$\langle w, x_0 \rangle = \delta_2 \quad (1)$$

$$\langle w, y \rangle \leq \delta_1 \quad \forall y \in K \quad (2)$$



Dim Pongo $w := x_0 - P_K x_0$

$$\delta_2 := \langle w, x_0 \rangle \quad \delta_1 := \delta_2 - \|x_0 - P_K x_0\|^2$$

Allora (1) è ovvio per definizione.

Proviamo (2). Dato $y \in K$ vale

$$\langle w, y \rangle = \langle x_0 - P_K x_0, y \rangle$$

$$= \langle x_0 - P_K x_0, y - P_K x_0 + P_K x_0 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle x_0 - P_K x_0, y - P_K x_0 \rangle}_{\leq 0} + \langle x_0 - P_K x_0, P_K x_0 \rangle$$

$$\leq \langle x_0 - P_K x_0, x_0 + P_K x_0 - x_0 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle x_0 - P_K x_0, x_0 \rangle}_{\delta_2} - \|x_0 - P_K x_0\|^2 = \delta_1.$$

δ_2 — — — — —

Teorema 1 (Convesso + chiuso forte $\Rightarrow$ chiuso debole)

Sia H sp. di Hilbert, e sia $K \subseteq H$ un sottoinsieme.

Supponiamo che

(i) K è convesso

(ii) K è chiuso forte (se $x_n \in K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightarrow x_\infty$, allora $x_\infty \in K$)

Allora K è chiuso debole (se $x_n \in K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightarrow x_\infty$ debole, allora $x_\infty \in K$)

Brutalmente: Da conv. debole non permette di scappare dai convessi chiusi

Dim Sia $x_n \rightarrow x_\infty$.

Supponiamo per assurdo che $x_\infty \notin K$

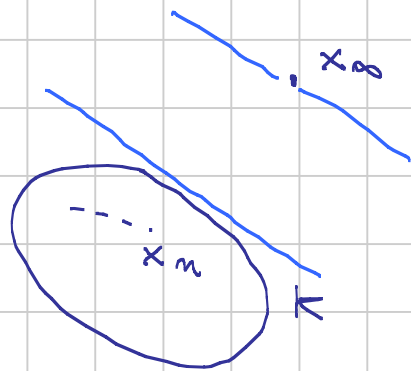
Per la separazione punto convesso

esistono $w \in H$ e $\delta_2 > \delta_1$ t.c.

$$\langle w, x_\infty \rangle = \delta_2$$

$$\langle w, x_n \rangle \leq \delta_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{perch\`e } x_n \in K)$$

Ma $\langle w, x_n \rangle \rightarrow \delta_2$, il che è assurdo.



Teorema 2 (Convessa + fortemente SCI $\Rightarrow$ debolmente SCI)

Sia H sp. di Hilbert, e sia $F: H \rightarrow \mathbb{R}$ (si può prendere anche $+\infty$)

Supponiamo che

(i) F è convessa

(ii) F è SCI forte (se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora $\liminf F(x_n) \geq F(x_\infty)$)

Allora F è SCI debole (se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora $\liminf F(x_n) \geq F(x_\infty)$)

Dim I sottolivelli di F sono convessi e chiusi forte, dunque sono chiusi debole
[sistemare i dettagli]

Esempio Consideriamo

$$F(v) = \int_0^{100} \underbrace{(7 + \sin x)}_{\geq 6} v^2 dx \quad v \in L^2(0, 100)$$

Allora $F(v)$ è convesso (facile verifica) e continuo forte

Se $v_n \rightarrow v_\infty$ in L^2 , allora esiste $v_{n_k} \rightarrow v_\infty$ puntualmente per q.o. $x \in (0, 100)$ e in maniera dominata.

Quindi posso passare al limite per il tes. di Lebesgue e il limite è $F(v_\infty)$. Per il lemma della sotto-sotto tutta la succ. $F(v_n) \rightarrow F(v_\infty)$.

Quindi automaticamente $F(v)$ è SCI debole.

Caso speciale di proiezione: sottospazi chiusi

Sia H sp. di Hilbert, sia $V \subseteq H$ s.sp. vett. chiuso, sia $P_V: H \rightarrow V$ la proiezione.

(1) Per ogni $x \in H$ il vettore $P_V x$ è l'unico elemento di V tale che

$$\langle x - P_V x, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

(2) P_V è lineare

(3) Se poniamo

$$V^\perp := \{x \in H : \langle x, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V\}$$

abbiamo che $V^\perp$ è s.sp. chiuso e $H = V \oplus V^\perp$.

Dim (1) Voglio dim. che $\langle x - P_K x, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

So che

$$\langle x - P_K x, y - P_K x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in V$$

Uso $y = v + P_K x$ e $y = -v + P_K x$ e ho finito

Devo dimostrare che $P_K x$ è l'unico vettore con questa proprietà. Sia $z \in V$ t.c.

$$\langle x - z, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Allora per ogni $y \in V$ vale

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x - z + z - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 + 2 \underbrace{\langle x - z, \overbrace{z - y}^{\in V} \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq \|x - z\|^2 \end{aligned}$$

Questo dimostra che z minimizza la distanza da x e quindi $z = P_K x$.

(2) La linearità si dimostra usando la caratterizzazione

$$\langle x_1 - P_K x_1, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\langle x_2 - P_K x_2, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Sommando abbiamo la tesi. Ideen per λx .

(3) Chiusura e $V^\perp$ s.sp. sono quasi ovvi.

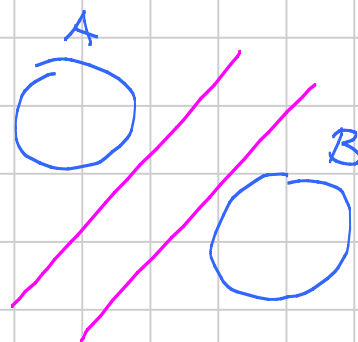
$$x = \underbrace{x - P_K x}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_K x}_{\in V}$$

Occorre verificare anche $V \cap V^\perp = \{0\}$ 😊

Separazione convessa - Convesso

Sia H sp. Hilbert, e siano $A \subseteq H$ e $B \subseteq H$ non vuoti.
Supponiamo che

- $A \cap B = \emptyset$
- A e B convessi
- B chiuso
- A compatto



Allora

(1) esistono $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$ che minimizzano la distanza

(2) esistono $w \in H$ e $\delta_2 > \delta_1$ tali che

$$\langle w, a \rangle \geq \delta_2 \quad \forall a \in A$$

$$\langle w, b \rangle \leq \delta_1 \quad \forall b \in B$$

[Esercizio] Minimizzare $f(a) := \|a - P_B a\|^2$