

Identità (legge) del parallelogrammo

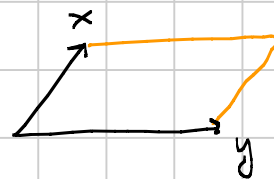
Sia V uno sp. vett. munito di un prod. scalare $\langle x, y \rangle$.

Allora

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \quad \forall (x, y) \in V^2$$

↑
somma □ dei lati

↑
somma □ delle diagonali



Dim : contine.

Teorema (Piesz - Fréchet - von Neumann)

Sia V uno sp. vett. munito di una norma $\|x\|$.

Allora la norma deriva da un prod. scalare se e solo se soddisfa la legge del parallelogrammo.

In tal caso

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

identità di polarizzazione

[Provare a dimostrarlo da sé]

Dim. Indico con $p(x, y)$ il presunto prodotto scalare.
Verifico che lo è.

Step 0 : banalità

$$\rightarrow p(x, y) = p(y, x)$$

$$\rightarrow p(x, 0) = p(0, x) = 0$$

$$\rightarrow p(x, x) = \|x\|^2$$

$$\rightarrow p(-x, y) = -p(x, y)$$

Step 1 $p(x+y, 2z) = 2p(x, z) + 2p(y, z)$

$$p(x+y, 2z) = \frac{1}{4} (\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2) = \star$$

$$2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 = \|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2$$

$$2\|x-z\|^2 + 2\|y-z\|^2 = \|x+y-2z\|^2 + \|x-y\|^2$$

$$\star = \frac{1}{4} (2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2) + \frac{1}{4} (2\|y+z\|^2 - 2\|y-z\|^2)$$

$$= 2p(x, z) + 2p(y, z)$$

Step 2 $p(x+y, z) = p(x, z) + p(y, z)$

Dallo step 1 con $y=0$ deduciamo $p(x, 2z) = 2p(x, z)$

A questo punto $2p(x+y, z) = p(x+y, 2z) = 2p(x, z) + 2p(y, z)$
e semplifico

Resta da dim. che $p(\lambda x, y) = \lambda p(x, y)$

Step 3 la relazione precedente vale per $\lambda \in \mathbb{Q}$

→ per $\lambda \in \mathbb{N}$ si dim. per induzione grazie all'additività

→ per $\lambda \in \mathbb{Z}$ uso che posso portare fuori -1

→ per $\lambda = \frac{a}{b}$ avendo che

$$b p\left(\frac{a}{b} x, y\right) \underset{\substack{\uparrow \\ b \text{ dentro}}}{=} p(ax, y) = a p(x, y) \underset{\substack{\uparrow \\ a \text{ fuori}}}{=}$$

dividendo ho la tesi

Step 4 Conquisto $\lambda \in \mathbb{R}$.

Osservo che $\lambda \rightarrow \|\lambda x + y\|$ e $\lambda \rightarrow \|\lambda x - y\|$ sono funzioni continue di λ (fissati x e y)

$$| \|\lambda_1 x + y\| - \|\lambda_2 x + y\| | \leq \|(\lambda_1 - \lambda_2)x\| \leq |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \|x\|$$

quindi $\lambda \rightarrow p(\lambda x, y)$ è una funzione continua di λ .
Quanto scrivo

$$p(\lambda x, y) = \lambda p(x, y)$$

ho che LHS e RHS sono funzioni continue di λ che coincidono per $\lambda \in \mathbb{Q}$, quindi coincidono per $\lambda \in \mathbb{R}$.
— o — o —

Proiezione su un convesso chiuso

Sia H uno sp. di Hilbert, sia $K \subseteq H$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$,
chiuso e convesso, e sia $x_0 \in H \setminus K$ se $x_0 \in K$ è banale

(1) Esiste $\min \{ \|x_0 - y\| : y \in K \}$ ed è realizzato da un unico p.to $P_K x_0 \in K$
 $\uparrow$ proiezione di x_0 su K

(2) La funzione $x \rightarrow P_K x$ è 1-lip., cioè

$$\|P_K x_2 - P_K x_1\| \leq \|x_2 - x_1\| \quad \forall x_1 \in H \quad \forall x_2 \in H$$

(3) (Caratterizzazione) $P_K x$ è l'unico p.to di K tale che

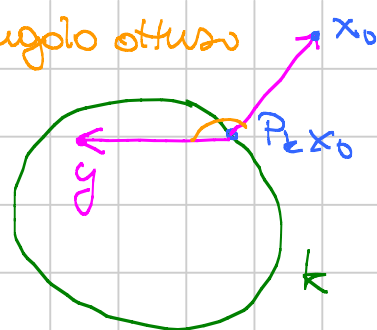
$$\langle x - P_K x, y - P_K x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K.$$

Dim. finito dimensionale

Considero $f(y) := \|y - x_0\|$.

Questa è convessa, quindi posso restringermi ad una palla, che è compatta, quindi il minimo esiste

(basta K chiuso per avere esistenza)



In dimensione infinita NON funziona perché le palle, anche chiuse, non sono compatte.

(Esistenza) Pongo

$$D^2 := \inf \{ \|y - x_0\|^2 : y \in K \}$$

Prendo $\{y_n\} \subseteq K$ succ. infizzante e spero di Cauchy.

Idea: confrontare con il p.to medio

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x_0\right\|^2$$

parall. $\uparrow$ $\sim 2D^2$ $\sim 2D^2$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq D^2}$

Formalmente

- ci viene dato $\varepsilon \geq 0$
- scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\|y_n - x_0\|^2 \leq D^2 + \frac{1}{4}\varepsilon \quad \forall n \geq n_0$
- osservo che $\frac{y_n + y_m}{2} \in K$ perché è convesso, quindi

$$\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x_0\right\|^2 \geq D^2$$

- concludo che per $n \geq n_0$ e $m \geq n_0$ vale

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 4D^2 + \varepsilon - 4D^2 = \varepsilon$$



Allora $y_n \rightarrow y_0$ e per continuità ho esistenza.

(Unicità) *Uso la stessa relazione*

Siano y_1 e y_2 due p.ti di univ. Allora

$$\|y_2 - y_1\|^2 = \underbrace{2\|y_2 - x_0\|^2}_{2D^2} + \underbrace{2\|y_1 - x_0\|^2}_{2D^2} - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x_0\right\|^2 \leq 0$$
$$\leq -4D^2$$

(Caratterizzazione) [Provare a farla da sé]

Dato $y \in K$ osservo che $P_K x_0 + t(y - P_K x_0) \in K$ per $t \in [0, 1]$ quindi

$$\|x_0 - P_K x_0 - t(y - P_K x_0)\|^2 \geq \|x_0 - P_K x_0\|^2$$

Espongo

$$\cancel{\|x_0 - P_K x_0\|^2} + t^2 \|y - P_K x_0\|^2 - 2t \langle x_0 - P_K x_0, y - P_K x_0 \rangle \geq \cancel{\|x_0 - P_K x_0\|^2}$$
$$t \|y - P_K x_0\|^2 \geq 2 \langle x_0 - P_K x_0, y - P_K x_0 \rangle$$

Faccio tendere $t \rightarrow 0^+$ e ho la tesi

(Unicità della caratterizzazione) Siano $z_1 \in K$ e $z_2 \in K$ due punti che soddisfanno la caratt., cioè tali che

$$\begin{aligned} \langle x - z_1, y - z_1 \rangle &\leq 0 & \forall y \in K \\ \langle x - z_2, y - z_2 \rangle &\leq 0 & \forall y \in K \end{aligned}$$

Metto $y = z_2$ nella prima e $y = z_1$ nella seconda, sommo e ottengo che

$$\|z_1 - z_2\|^2 \leq 0$$

(Lipschitzianità) Segue dalla caratterizzazione.

Siano x_1 e $x_2 \in H \setminus K$. Siano $P_K x_1$ e $P_K x_2$ le loro proiezioni.

Scrivo la caratt.:

$$\langle x_1 - P_K x_1, y - P_K x_1 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$$

$$\langle x_2 - P_K x_2, y - P_K x_2 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$$

Uso $y = P_K x_2$ sopra e $y = P_K x_1$ sotto

$$\langle x_1 - P_K x_1, P_K x_2 - P_K x_1 \rangle \leq 0$$

$$\langle x_2 - P_K x_2, P_K x_1 - P_K x_2 \rangle \leq 0$$

Sommo:

$$\langle x_1 - x_2 - (P_K x_1 - P_K x_2), P_K x_2 - P_K x_1 \rangle \leq 0$$

$$\langle x_1 - x_2, P_K x_2 - P_K x_1 \rangle + \|P_K x_1 - P_K x_2\|^2 \leq 0$$

Quindi

$$\|P_K x_1 - P_K x_2\|^2 \leq \langle x_2 - x_1, P_K x_2 - P_K x_1 \rangle$$

$$\leq \|x_1 - x_2\| \cdot \|P_K x_1 - P_K x_2\|$$

