

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

In generale: dati due funzionali F e G , voglio risolvere

$$\min \{ F(u) : G(u) = 0 \}$$

Analisi 2: sotto opportune ipotesi di regolarità, ogni p.to di min u_0 soddisfa almeno una delle seguenti

$$\rightarrow \nabla G(u_0) = 0$$

$$\rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } \nabla F(u_0) = \lambda \nabla G(u_0)$$

Analisi 3+: sotto opportune ipotesi di regolarità, ogni p.to di min u_0 soddisfa almeno una delle seguenti

$$\rightarrow \delta G(u_0, v) = 0 \text{ per ogni } v \text{ ammissibile}$$

$$\rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v) \text{ per ogni } v \text{ ammissibile}$$

Esempio $\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 u^2 dx}_{F(u)} : \underbrace{\int_0^1 u^2 dx = 1}_{G(u)}, u(0) = u(1) = 0 \right\}$

Esistenza del minimo: solito metodo diretto, basta osservare che il vincolo passa al limite per la solita nozione di conv.

Cond. nec. sul minimo: dando per buono il metodo, ci sono due possibilità

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \delta G(u_0, v) = 0 \text{ per ogni } v &\leadsto \int_0^1 u_0 v dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \\ &\leadsto u_0 \equiv 0 \quad \text{NO!} \end{aligned}$$

② Esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v)$$

$$\int_0^l \ddot{u} \dot{v} = \lambda \int_0^l u v$$
$$= - \int_0^l \ddot{u} v$$

Conclusione $\begin{cases} \ddot{u} = -\lambda u \\ \text{DBC} \\ \int u^2 = 1 \end{cases}$ 3 parametri
3 condizioni

Calcolo il segno di λ moltiplicando per u

$$u \ddot{u} = -\lambda u^2 \quad \leadsto \quad -\lambda \int_0^l u^2 = \int_0^l u \ddot{u} = - \int_0^l \dot{u}^2$$

Questa mi dice che $\lambda > 0$. Le soluzioni sono quindi del tipo

$$u(x) = a \cos(\sqrt{\lambda} x) + b \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

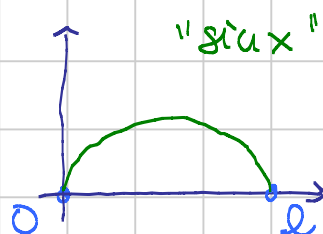
$$u(0) = 0 \leadsto a = 0; \quad u(l) = 0 \quad b \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

$$b \neq 0 \text{ altrimenti addito } \int u^2 = 1.$$

$$\text{Quindi } \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0 \quad \sqrt{\lambda} l = k\pi \quad \lambda = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$$

Imponendo l'integrale trovo b . Ho infinite sol. che dipendono da k e cerco quella per cui $\int u^2$ risulta minimo.

Fatti gli integrali, il minimo si ha per $k=1$



Sia $P(l)$ il minimo del problema precedente.

Ora sappiamo che

$$\int_0^l u^2 dx \geq P(l) \int_0^l u^2 dx$$

è una disuguaglianza omogenea, quindi nel cercare la costante ottima, si può supporre $\int u^2 = 1$

Esempio Supponiamo di sapere che $P(\pi) = 1$ (cosa che si fa facilmente)

$$\min \left\{ \int_0^\pi 3u^2 - 2u^2 + \arctan u; u(0) = u(\pi) = 0 \right\}$$

Esiste il minimo? È la funzione $u \equiv 0$?

La funzione $u_0(x) \equiv 0$ non risolve (ELE) quindi non può essere p.to di min., quindi $\inf < 0$.

Gli esponenti sono 2 e 2, quindi tes. der. prec. non si applica ☹

Per la Poluacé (la disug. di sopra), abbiamo che

$$\int_0^\pi 2u^2 \geq \int_0^\pi 2u^2, \text{ da cui}$$

$$M \geq F(u) \geq \int_0^\pi u^2 + \arctan u$$

e da qui stima su u e metodo diretto classico.

Esempio variato

$$\min \left\{ \int_0^\pi 2u^2 - 3u^2 + \arctan u : u(0) = u(\pi) = 0 \right\}$$

Dico che $\inf = -\infty$, quindi min. non esiste.

Basta considerare

$$F(n \sin x) = \int_0^\pi 2n^2 \cos^2 x - 3n^2 \sin^2 x + \underbrace{\arctan(n \sin x)}_{\text{limitato}} \\ - \cos t \cdot n^2 \\ \text{---} 0 \quad \text{---} 0 \text{---}$$

Se avessi

$$\int_0^\pi u^6 - \alpha u^6 + \arctan u : u(0) = u(\pi) = 0$$

Ci sarà una soglia

- $\alpha > \alpha^*$, allora $\inf = -\infty$
- $\alpha < \alpha^*$, allora esistenza del minimo

dove

$$\alpha^* := \min \left\{ \int_0^\pi u^6 : \int_0^\pi u^6 = 1 + \text{DBC} \right\}$$