

Esempio precedente:

$$F(u) = \int_0^1 u^4 + u^3$$

Minimizzare $F(u)$ con DBC $u(0) = u(1) = 0$.

→ Dimostrare che $F(u) \leq M \rightsquigarrow \|u\|_{L^4} \leq M'$

→ $\|u\|_{L^4} \leq M' \rightsquigarrow \|u\|_{L^2} \leq M'' \rightsquigarrow$ se $\{u_n\}$ sta in un sottolivello esiste $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ in L^2

→ Per la semicontinuità bastava $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ debole L^1

→ In realtà c'era pure $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ debole L^4

Da questa, in questo caso specifico, si può mostrare la SCI senza passare attraverso il tes. generale che richiedeva il lemma di approx

Se $v_n \rightarrow v_\infty$ debole in L^4 , allora $\liminf \int v_n^4 \geq \int v_\infty^4$

Vale infatti $(a+b)^4 \geq a^4 + 4a^3b$ (disug. di convessità)
 $\psi'(a)$

$$\int_0^1 v_n^4 = \int_0^1 [v_\infty + (v_n - v_\infty)]^4 \geq \int_0^1 v_\infty^4 + 4 \int_0^1 v_\infty^3 (v_n - v_\infty)$$

Se sapessi che v_∞^3 sta in $L^{4/3}$ allora avrei finito, ma questo è equivalente a chiedere che $v_\infty \in L^4$.

Per il p.to di minimo u (non so davvero che è unico)
la regolarità max è $C^{1,1/3}$.

C'è un p.to x_0 t.c. $\dot{u}(x_0) = 0$. Se

ce ne sono tanti, prendo l'inf.

So che $\dot{u}(x) \neq 0$ in $[0, x_0)$, quindi
in questo intervallo $u \in C^\infty$.

Supponiamo che $\dot{u} \in C^{0, 1/3+\alpha}$, quindi è + regolare.



$$\frac{|\dot{u}(x) - \dot{u}(x_0)|}{|x - x_0|^{1/3+\alpha}} = \frac{|\dot{u}(x)|}{|x - x_0|^{1/3}} \cdot \frac{1}{|x - x_0|^\alpha}$$

↓
↓

ha limite $\neq 0$
 $+\infty$ per $x \rightarrow x_0^-$

Elevo tutto al cubo e ottengo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{|\dot{u}(x)|^3}{|x - x_0|} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\dot{u}(x)^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{3\dot{u}(x)\dot{u}(x)^2}{1}$$

↑
↑

considero i seguenti
Höp
(posso fare il conto prima di x_0)

$$12\dot{u}\dot{u}^2 = 3\dot{u}^3 \quad (ELE)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{4} u(x)^2 = \frac{3}{4} u(x_0) \neq 0.$$

Ci sono potenziali se $x_0 = 0$. Cosa ci è servito

→ un p.to in cui $\dot{u}$ si annulla preceduto da un
intervallo in cui $\dot{u}$ non si annulla

Per forza esiste $x_1 \in (0, 1)$ t.c. $\dot{u}(x_1) \neq 0$.

Pengo

$$x_0 := \sup \{x < x_1 : \dot{u}(x) = 0\} \quad \text{oppure}$$

$$x_0 := \inf \{x > x_1 : \dot{u}(x) = 0\}$$

Ovo dei due ha la proprietà richiesta.

— 0 — 0 —

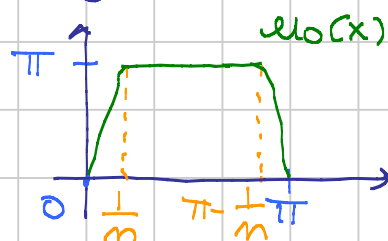
Esempi di non unicità per eq. diff. con DBC

$$\begin{cases} u'' = -\lambda \sin u \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $u \equiv 0$ è soluzione per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se λ è grande, non è l'unica

$$F_\lambda(u) := \int_0^\pi \frac{1}{2} u'^2 + \lambda \cos u$$



Per λ grande $F_\lambda(u)$ può assumere valori negativi.

Prendo $u_0(x)$ tale che

$$\int_0^\pi \cos(u_0(x)) dx < 0$$

Per λ grande $F_\lambda(u_0) < 0 \leadsto u(x) \equiv 0$ non è univ.

Oss. L'assenza di convessità nella coppia (s, p) è fondamentale.

— o — o —

Tentativo di teorema

$$F(u) := \int_a^b |u'|^p + g(x, u) \quad \min \{ F(u) : \text{DBC} \}$$

Condizioni suff. per l'esistenza del minimo

- $p > 1$
- stima dal basso su g

$$g(x, s) \geq -A - B|s|^q \quad \text{con } q < p$$

- costante di $\frac{1}{p_1}$ -Hölder $\leq k_1 \|\dot{u}\|_{L^p}$
- $|u(x)| \leq k_2 \|\dot{u}\|_{L^p} + k_3$
 $\uparrow$ DBC
- $\int_a^b g(x, u(x)) dx \geq -k_4 - k_5 \|\dot{u}\|_{L^p}^q$
- $M \geq F(u) \geq \|\dot{u}\|_{L^p}^p - k_4 - k_5 \|\dot{u}\|_{L^p}^q$

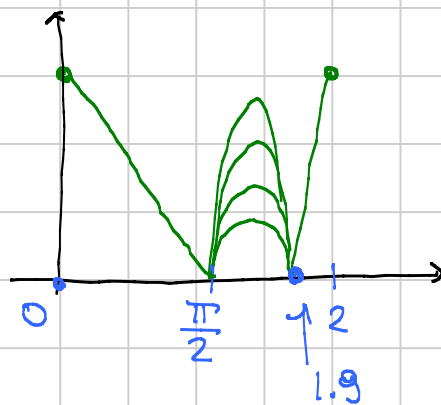
$\leadsto \|\dot{u}\|_{L^p} \leq M' \leadsto$ è storta.

Esempio $\int_0^2 |\dot{u}|^7 + \cos x \cdot u(x)^8 dx \quad u(0) = u(2) = 2018$

Il minimo non esiste e $\inf = -\infty$

Considero $u_n(x)$ fissa in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $[1.9, 2]$.

Tra $\frac{\pi}{2}$ e 1.9 pongo



$u_n(x) = n u_0(x)$, con $u_0(x)$ positiva in $(\frac{\pi}{2}, 1.9)$

$F(u_n(x)) =$ parte iniziale fissa +
 + parte finale fissa

$$+ n^7 \int_{\frac{\pi}{2}}^{1.9} |\dot{u}_0(x)|^7 + n^8 \int_{\frac{\pi}{2}}^{1.9} \cos x \cdot |u_0(x)|^8 dx$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{fisse e negativo}}$

— 0 — 0 —

Esempio

$$\min \left\{ \int_0^1 u(x)^2 + u(x) \quad \text{senza B.C.} \right\}$$

$L(x, s, p)$ è convessa nella coppia (s, p)

La crescita di g è minore del quadrato

Tuttavia il minimo non esiste

Basta prendere $u_n(x) := -n$

Mancano le BC per ottenere stima L^∞ su u .

— o — o —