

Domanda : $\|u_m\|_{L^4} \leq M' \leadsto \|u_m\|_{L^2} \leq M''$

$\leadsto$ esiste $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ in L^2 debole.

Posso dedurre che $u_\infty \in L^4$ e

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 u_{m_k}^4 \geq \int_0^1 u_\infty^4 \quad ?$$

Lemma di approssimazione Sia $\psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convessa

Allora esiste una successione

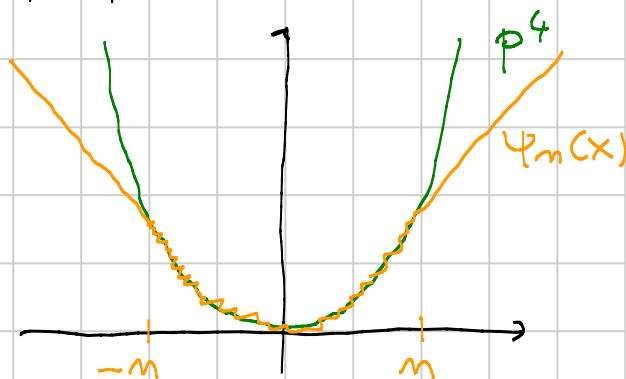
$$\psi_n: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

- (i) tutte le ψ_n sono convesse
- (ii) tutte le ψ_n sono di classe C^1 con gradiente limitato
(ma la limitazione dipende da n)
- (iii) $\psi_n(x) \rightarrow \psi(x)$ puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}^d$
- (iv) la convergenza è monotona, cioè
 $\psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Oss. In casi concreti la costruzione è semplice.

Ad esempio $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\psi(p) = p^4$



Teorema

Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa

Sia (X, m, μ) con $\mu(X) < +\infty$

Sia $\{v_n\} \subseteq L^1(X, m, \mu)$

Supponiamo che

$$v_n \rightarrow v_\infty \text{ debole in } L^1$$

Allora

$$\liminf \int_X \psi(v_n) d\mu \geq \int_X \psi(v_\infty) d\mu$$

Dim Caso base: $\psi \in C^1$ con ψ' limitata.

Ricordiamo la solita

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a)b \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Da questa

$$\begin{aligned} \int_X \psi(v_n) &= \int_X \psi(v_\infty + (v_n - v_\infty)) \\ &\geq \int_X \psi(v_\infty) + \int_X \underbrace{\psi'(v_\infty)}_{\substack{\in L^\infty \text{ perché } \psi' \text{ è limitata} \\ \downarrow \\ 0}} \cdot (v_n - v_\infty) \end{aligned}$$

Caso con ψ generica: approssimo ψ come nel Lemma
(per chiarezza chiamo ψ_ε le approx)

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \psi(v_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \psi_\varepsilon(v_n) \\ &\geq \int_X \psi_\varepsilon(v_\infty) \end{aligned}$$

Vale per ogni $\varepsilon > 0$. A dx posso passare al limite per Beppo Levi grazie al fatto che le ψ_ε sono monotone in ε .

Oss. Il teorema vale più in generale per integrande che dipendono da 2 o più variabili, tipo

$$\begin{array}{l} v_n \rightarrow v_\infty \\ w_n \rightarrow w_\infty \end{array} \quad \text{debole } L^2$$

Allora

$$\liminf \int_{\mathbb{R}^n} \psi(v_n, w_n) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \psi(v_\infty, w_\infty)$$

— 0 — 0 —

Torniamo all'esempio Nella formulazione $W^{1,2}$ sappiamo che

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ in } L^2 \quad u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif.}$$

Grazie al tes. precedente sappiamo che $u_\infty \in L^4$ e che

$$\liminf \int_0^1 u_n^4 \geq \int_0^1 u_\infty^4$$

Finalmente abbiamo esistenza della soluzione debole.

[Abbiamo usato che la convergenza debole L^2 implica la debole L^4]

— 0 — 0 —

Se usavamo la formulazione $W^{1,4}$ potremmo ricorrere ad un tes.

Teorema (misterioso) Sia (X, m, μ) spazio di misura
Sia $p \in [1, +\infty]$ (NOTA BENE: 1 escluso)
Sia $\{u_n\}$ una succ. limitata in $L^p(X, m, \mu)$

Allora esiste una sottosuccessione che converge debolmente in L^p . (si intende debole * se $p = +\infty$)

Si dimostra facilmente sotto 2 ipotesi aggiuntive

- $\mu(X) < +\infty$

- $p \geq 2$

$$\mu(X) < +\infty$$

$$\{u_n\} \text{ limitata in } L^p \xRightarrow{\mu(X) < +\infty} \{u_n\} \text{ limitata in } L^2$$

teoria sp.
di Hilbert

$$\Rightarrow u_{n_k} \rightharpoonup u_{\infty} \text{ debole } L^2$$

tes.
precedenti

$$\Rightarrow u_{\infty} \in L^p \text{ e } u_{n_k} \rightharpoonup u_{\infty} \text{ debole } L^p$$

— o — o —

Oss. Se $p = 1$ non c'è verso.

Basta prendere $L^1((-1,1))$.

Le u_n in figura sono
limitate in L^1 .

Si verifica facilmente che

per ogni $\varphi \in C^0([-1,1])$ vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 u_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

Abbiamo visto che non esiste nessuna $v \in L^1$ tale che

$$\int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C^0([-1,1])$$

(vedi 1ª lezione sui Sobolev)

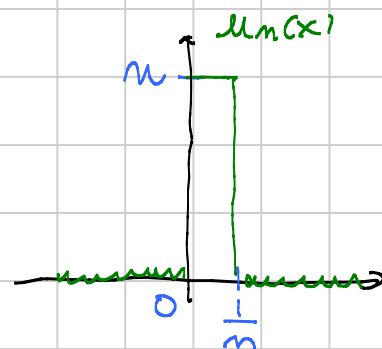
— o — o —

Teorema (ancora + misterioso) Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ superlineare,
cioè

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{\psi(p)}{|p|} = +\infty$$

aggiunto dopo video

Sia $\{u_n\} \in L^1(X, m, \mu)$ con $\mu(X) < +\infty$ t.c.



$$\int_X \varphi(u_n(x)) d\mu \leq M$$

Allora esiste $\mu_k \rightarrow \mu_\infty$ debde L^1 .

Torniamo all'esempio e analizziamo in fase regolata.
Al solito modo troviamo ELE in forma integrale

$$-\int_0^1 4u^3 v = \int_0^1 3u^2 v \quad \forall v \in C_c^\infty((0,1))$$

da cui deduco che $\underbrace{(4u^3)'}_{\text{qui tutto debole}} = 3u^2$

$$u \in W^{1,2} \text{ o } W^{1,4} \text{ scelta} \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0$$

$$\Rightarrow u^3 \in C^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow u \in C^1$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & & & \\ \text{se } \neq^3 \in C^0 & \sim & \neq \in C^0 & & & & \\ \text{se } \neq^3 \in C^1 & \not\sim & \neq \in C^1 & & & & \end{array}$$

$\frac{1}{3}$ -Hölder

Analisi 1: se $f^3 \in \text{Lip}$ e f è continua $\Rightarrow f \in C^{0,1/3}$

Nel nostro caso $\left. \begin{array}{l} \dot{u} \in C^0 \\ \dot{u}^3 \in C^1 \subseteq \text{Lip} \end{array} \right\} \Rightarrow u \in C^{0,1/3}$

quindi $u \in C^{1,1/3}$. Non è detto che $u \in C^2$, anzi in questo caso si dimostra che u è solo $\frac{1}{3}$ -Hölder

Ovviamente $u \in C^\infty$ nei p.ti in cui u non si annulla

In questo caso esiste $x_0 \in (0,1)$ t.c. $i'(x_0) = 0$ (Rolle)