

CONVESSITÀ VS SEMICONTINUITÀ

Problema guida

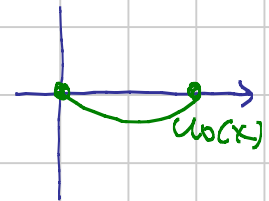
$$\min \left\{ \int_0^1 \ddot{u}^4 + u^3 : u \in C^1([0,1]), u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

$$\text{ELE: } (L_p)' = L_s \quad (4\ddot{u}^3)' = 3u^2$$

$$4\ddot{u}^2 \ddot{u} = u^2$$

1° fatto: $u \equiv 0$ risolve ELE + DBC, ma non è p.to min.

Prendo una qualunque $u_0(x)$ negativa che soddisfa le DBC. Allora



$$F(\varepsilon u_0) = \varepsilon^4 \int_0^1 \ddot{u}_0^4 dx + \underbrace{\varepsilon^3 \int_0^1 u_0^3 dx}_{< 0} < 0 \quad \text{per } \varepsilon \text{ piccolo}$$

Quindi, se esiste, il minimo è negativo.

Metodo diretto

Formulazione debole $F(u) := \int_0^1 \ddot{u}^4 + u^3$

per u dove? $\rightarrow W^{1,4}$ va bene

$\rightarrow W^{1,2}$ va bene ugualmente, a patto di accettare che F può assumere il valore $+\infty$ (quando faccio i sottolivelli non cambia nulla)

Compattezza

$$\{u \in W^{1,2} + \text{DBC} : F(u) \leq M\}$$

Domanda: da $F(u) \leq M$, riesco ad avere una stima su $\dot{u}$?

2° fatto: realizzo la stima

Le funzioni con $\int_0^1 \dot{u}^4 < +\infty$ sono $\frac{3}{4}$ -Hölderiane

$$|u(y) - u(x)| \leq \left\{ \int_0^1 \dot{u}^4 dx \right\}^{1/4} |y - x|^{3/4} \quad (\text{solita})$$

Hölderianità + DBC $\leadsto$ stima L^∞

$$|u(x)| = |u(x) - u(0)| \leq \left\{ \int_0^1 \dot{u}^4 dx \right\}^{1/4} \underbrace{|x|^{3/4}}_{\leq 1}$$

Ma allora

$$\left| \int_0^1 u(x)^3 dx \right| \leq \int_0^1 |u(x)|^3 dx \leq \left\{ \int_0^1 \dot{u}^4 dx \right\}^{3/4} = \|\dot{u}\|_{L^4}^3$$

Finalmente

$$M \geq F(u) = \|\dot{u}\|_{L^4}^4 + \int_0^1 u^3 dx \geq \|\dot{u}\|_{L^4}^4 - \|\dot{u}\|_{L^4}^3$$

Osservo che la funzione $\varphi(x) = x^4 - x^3$ tende a $+\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$.



Quindi da $\varphi(\|\dot{u}\|_{L^4}) \leq M$ deduco

$$\|\dot{u}\|_{L^4} \leq M'$$

Supponiamo di aver formulato in $W^{1,2}$.

Da una stima su $\|u\|_{L^4}$ posso dedurre

$$\|u\|_{L^2} \leq M'$$

Fatto generale : $1+x^4 \geq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \leq \underbrace{\int_0^1 u(x)^4 dx}_{\text{se è limitato}} + \int_0^1 1 dx$$

A questo p.to so che esiste una s.succ. (che non riusciamo) che converge debolmente.

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad u_n \rightharpoonup v_\infty \quad \text{in } L^2 \text{ debole}$$

Allo stesso modo di sempre trovo ulteriore s.succ. t.c.

$$u_n \rightharpoonup v_\infty = u_\infty \quad u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif.}$$

Semicontinuità Sul termine $\int u^3$ non ci sono pbm.
Sulle DBC nemmeno

Vieni che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n^4 dx \geq \int_0^1 u_\infty^4$$

Il problema è che lo abbiamo dim. per $\int_a^b \psi(u)$
supponendo $\psi'(p)$ a crescita lineare.

— o — o —

Occorre aprire una parentesi

CONVERGENZA DEBOLE IN L^p

(X, m, μ) spazio di misura

Convergenza debole in L^2 : $u_n \rightarrow u_\infty$ in $L^2(X, m, \mu)$
Se

$$\int_X u_n(x) v(x) d\mu \rightarrow \int_X u_\infty(x) v(x) d\mu \quad \forall v \in L^2(\dots)$$

Def. Sia (X, m, μ) sp. di misura, sia $p \in [1, +\infty]$ (estremi inclusi), sia $\{u_n\} \subseteq L^p(X, m, \mu)$, sia u_∞ nello stesso spazio.
Si dice che

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{debole in } L^p(\dots)$$

Se

$$\int_X u_n(x) v(x) d\mu \rightarrow \int_X u_\infty(x) v(x) d\mu$$

per ogni $v \in L^{p'}(X, m, \mu)$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Più precisamente, la notazione giusta è

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ in } L^p \text{ se } p < +\infty$$
$$u_n \xrightarrow{*} u_\infty \text{ debole } * \text{ in } L^\infty \text{ se } p = +\infty$$

↑ ragioni misteriose.

Oss. Se $\mu(X) < +\infty$, allora $L^{p_1} \subseteq L^{p_2}$ se $p_1 \geq p_2$, quindi in questo caso la convergenza più debole di tutte è quella L^1 , perché richiede di scontrarsi solo con L^∞ , che è lo spazio più piccolo.

Prop. Se la successione $\{u_n\}$ è limitata in L^p , allora basta testare la conv. debole contro un insieme di funzioni v che spannano un denso in $L^{p'}$.

Dim. Se vale per ogni $v \in V$, allora vale per ogni $v \in \text{Span}(V)$ (linearità di integrali e limiti).
Facciamo vedere che vale per ogni $v \in L^{p'}$

$$\left| \int_X u_n(x) v(x) - \int_X u_\infty(x) v(x) \right|$$

$$\leq \left| \int_X u_n(x) v(x) - \int_X u_n(x) v_\varepsilon(x) \right| \quad (1)$$

$$+ \left| \int_X u_n(x) v_\varepsilon(x) - \int_X u_\infty(x) v_\varepsilon(x) \right| \quad (2)$$

$$+ \left| \int_X u_\infty(x) v_\varepsilon(x) - \int_X u_\infty(x) v(x) \right| \quad (3)$$

Formalmente:

- mi vengono dati $v \in L^{p'}$ e $\varepsilon > 0$
- Scelgo $v_\varepsilon \in \text{Span}(V)$ in modo da sistemare (1) e (3)

$$(1) \leq \int_X |u_n(x)| \cdot |v(x) - v_\varepsilon(x)| \leq \underbrace{\|u_n\|_{L^p}}_{\leq M} \cdot \underbrace{\|v - v_\varepsilon\|_{L^{p'}}}_{\text{piccolo quanto voglio}}$$

Stessa cosa per (3)

- Ricevuta v_ε , scelgo n abbastanza grande in modo da avere (2) piccola

Corollario

Se $\mu(X) < +\infty$, $q > p$, $\{u_n\}$ è limitata
in L^q e

tra 15 min. non serve

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^p \quad \boxed{\text{con } u_\infty \in L^q}$$

allora $u_n \rightarrow u_\infty$ in L^q (* se $q = +\infty$)

(limitata nello spazio diff. + conv. deb. nel facile
 $\Rightarrow$ conv. debolm. nel difficile)

[Dim: basta osservare che $L^{p'}$ è denso in $L^{q'}$]
— 0 — 0 —