

Varianti della lezione precedente

Stessa equ., diverse BC

Esempio 1
$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 2018 \\ \dot{u}(1) = 0 \end{cases}$$

$$\min \{ F(u) : u \in H^1((0,1)), u(0) = 2018 \text{ e BASTA} \}$$

Forse 1, 2, 3 esattamente come prima

[4] Usando $v \in C_c^\infty((0,1))$ ottengo come prima

$$(\ddot{u})' = \arctan u \quad \text{da cui si arriva fino a } u \in C^\infty$$

Poi uso perturbazioni v che non si annullano in $x=1$

$$\int_0^1 \ddot{u} \dot{v} + \arctan(u) v = 0$$

$$\int_0^1 (-\ddot{u} + \arctan u) v + [\dot{u} v]_0^1$$

$$\begin{array}{ccc} \ddot{u}(1) v(1) & - & \dot{u}(0) v(0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ = 0 & \neq 0 & 0 \end{array}$$

Morale la NBC $\dot{u}(0) = 0$ non va messa nel piano di minimo, ma nasce "on the road"

Unicità: NO PBM.

Esempio 2
$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u + x \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(1) = 0 \end{cases}$$

$$F(u) := \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) + xu$$

$$\min \{ F(u) : u \in H^1 \text{ e BASTA} \}$$

- [1] No problem [3] No plan. (se abbiamo fatto 2)
 [4] No plan, bisogna far nascere le NBC su due radici
 [2] Da $F(u) \leq M$ voglio stime su $\dot{u}$ e u

Osservo che esiste una costante $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$g(s) + xs \geq -A \quad \forall x \in [0,1], \forall s \in \mathbb{R}$$

Infatti
$$g(s) + xs \geq \underbrace{g(s) - |s|}_{\text{tende a } +\infty \text{ per } s \rightarrow \pm\infty, \text{ quindi } \text{è limitata dal basso}}$$

Da $F(u) \leq M$ ottengo
$$\frac{1}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 dx \leq M + A \quad \text{😊}$$

Questo garantisce stima su cost. di Hölder, una serie di stime su $|u(x)|$ unif.

Non ho DBC, quindi devo sperare in stime integrali
Per questo dico che vale

$$g(s) + xs \geq -A + \frac{1}{2}|s| \quad \text{e uso che } \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2}$$

$$M \geq F(u) \geq \int_0^1 -A + \frac{1}{2}|u| \quad \leadsto \int_0^1 |u| \leq 2(M+A)$$

→ stima di $|u(c)|$ con c misterioso (teo. media integrale)

→ + Hölder $\Rightarrow$ conclusioni

Esempio 3 $\ddot{u} = \arctan u$

$$u(0) = 2018$$

$$\dot{u}(1) = 3$$

NBC non omogenea

Ricordo che su the road nasce $L_p(x, u, \dot{u}) = 0$

quindi mi piacerebbe che fosse $L_p = \dot{u}^2 - 3$

Ma allora basta usare

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2}p^2 - 3p + g(s)$$

Anche con questa Lagrangiana ELE è $\ddot{u} = \arctan u$

$$F(u) := \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 - 3\dot{u} + g(u)$$

che minimizzo con DBC $u(0) = 2018$ (la NBC nasce dopo)

Cambia un minimo in fase compattezza

$$\frac{1}{2}p^2 - 3p + g(s) \geq \frac{1}{4}p^2 - A \quad \forall p \in \mathbb{R} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\frac{1}{4}p^2 - 3p}_{\substack{\uparrow \\ \text{lim. dal} \\ \text{basso}}} + \underbrace{g(s)}_{\geq 0}$$

$$M \geq F(u) \geq \int_0^1 \frac{1}{4} \dot{u}^2 - A \quad \leadsto \quad \int_0^1 \dot{u}^2 \leq 4(M+A) \quad \text{☺}$$

— 0 — 0 —

Esempio 4 $\ddot{u} = \arctan u$
 $\dot{u}(0) = 3$
 $\dot{u}(1) = 4$

1° modo Cambio variabili $u(x) = v(x) + q.c. \text{ che soddisfa le NBC}$

$$u(x) = v(x) + 3x + \frac{1}{2}x^2$$

Se $\dot{v}(0) = \dot{v}(1) = 0$, allora u soddisfa le cond. date.

che cosa risolve v ?

$$\underbrace{\ddot{v} + 1}_{\ddot{u}} = \arctan(v + 3x + \frac{1}{2}x^2)$$

$$\ddot{u} = \arctan u$$

$$\ddot{v} = \arctan(v + 3x + \frac{1}{2}x^2) - 1$$

Non resta che dare una formulazione variazionale di questo pbm.

Diventa

$$\min \left\{ \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{v}^2 + g(v + 3x + \frac{1}{2}x^2) - v : v \in H^1 \text{ e BASTA} \right\}$$

Verificare che tutto funziona nel metodo diretto.

2° modo Cerco una funzione che vale 3 in 0 e 4 in 1
 ad esempio $3+x$.

Vonei on the road

$$L_p = \infty$$

$$\dot{u} - 3 - x = 0$$

$$L_p = p - 3 - x$$

Posso usare come Lagrangiana

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 - (3+x)p + g(s)$$

Vediamo chi è ELE: $(L_p)' = L_s$

$$(\ddot{u} - 3 - x)' = \arctan u$$

$$\ddot{u} - 1 = \arctan u$$

↑ vorrei $u-1$

Secondo tentativo, forse buono

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 - (3+x)p + g(s) - s$$

$$\min \left\{ \int_0^1 \frac{1}{2} \ddot{u}^2 - (3+x) \ddot{u} + g(u) - u : u \in H^1 \text{ e basta} \right\}$$

[Per la compattezza servono stime del tipo

$$\frac{1}{2} p^2 - (3+x)p \geq \frac{1}{4} p^2 - A$$

$$g(s) - s \geq \frac{1}{4} |s| - B$$

il resto è come sempre]

— 0 — 0 —

Esempio (n+1) $\ddot{u} = \frac{\arctan u}{7 + \sin u} + \text{DBC}$

$$(7 + \sin u) \ddot{u} = \arctan u$$

$$L_p = 7p - \cos p$$

$$(L_p)' = (7\dot{u} - \cos u)' = 7\ddot{u} + \sin u \dot{u} \quad \text{☺}$$

$$L(x, s, p) := \frac{7}{2} p^2 - \sin p + g(s)$$

Tutto tranquillo fino alla regolarità

La prima forma di ELE diventa

$$\int_0^1 (\mp \dot{u} - \cos \dot{u}) \dot{v} + \arctan u \cdot v = 0$$

da cui al solito modo

$$(\mp \dot{u} - \cos \dot{u})' = \arctan u$$

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0 \Rightarrow \mp \dot{u} - \cos \dot{u} \in C^1$$
$$\varphi(\dot{u}) \in C^1$$

$$\text{Con } \varphi(p) := \mp p - \cos p$$

Ora $\varphi'(p) \geq \delta$ sempre, quindi φ ha inversa di classe C^1 , anzi C^∞

$$\varphi(\dot{u}) \in C^1 \quad \text{allora} \quad \dot{u} = \varphi^{-1}(\text{funzione } C^1) \in C^1$$

— o — o —