

APPROCCIO VARIAZIONALE ALLE EQ. DIFF.

Obiettivo: voglio dim. che una certa eq. diff. ha soluzione.
 Mi invento un pbm. di min. per cui quella è
 ELE e dim. che il min. esiste
 (punto di vista capovolto)

Esempio
$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 2018 \end{cases}$$

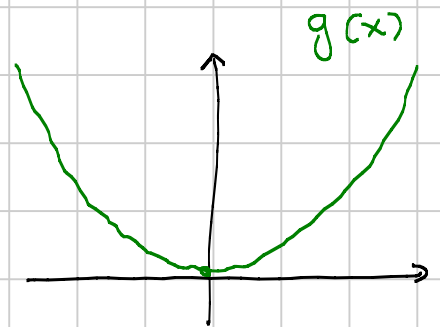
Oss. È un pbm. di Dirichlet, quindi non c'è una teoria di esistenza e unicità.

Cerco un funzionale di cui è ELE

$$\ddot{u} = \arctan u$$

$$(L_p)' = L_s$$

Introduciamo
$$g(x) := \int_0^x \arctan s \, ds$$



Considero

$$F(u) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) \right) dx$$

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 + g(s)$$

ELE è quella data

Consideriamo il prob. di min

$$\min \{ F(u) : u \in C^{\infty+1}([0,1]), u(0)=0, u(1)=2018 \}$$

1 Formulazione debole

Esempio $F(u)$ a $H^1((0,1)) = W^{1,2}((0,1))$ con la stessa formula.

Oss. $\rightarrow \dot{u}$ è ora la derivata debole

$\rightarrow$ le BC sono ben definite perché u ha un unico rappresentante continuo fino al bordo.

$$\min \{ F(u) : \underline{u \in H^1((0,1)), u(0)=0, u(1)=2018} \}$$

2 Compattezza dei sottolivelli

Da una stima su $F(u) \leq M$ voglio dedurre stime su $\dot{u}$ e u .

$$\rightarrow M \geq F(u) \geq \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 dx \quad \leadsto \quad \int_0^1 \dot{u}^2 dx \leq 2M$$

$\uparrow$
uso $g(x) \geq 0$

$\rightarrow$ Dalla stima di prima ottengo

$$|u(y) - u(x)| \leq \sqrt{2M} \cdot |y - x|^{1/2} \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2$$

$\rightarrow$ Dalla prec. + $u(0)=0$ ottengo

$$|u(x)| \leq \sqrt{2M} \quad \forall x \in [0,1]$$

Considero dunque su X la nozione di convergenza per cui $u_n \rightharpoonup u_\infty$ se e solo se $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. in $[0,1]$
 $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ debole L^2

Le stime ottenute garantiscono la cpt. dei sottolivelli

$$F(u_n) \leq M \Rightarrow \|\dot{u}_n\|_{L^2}^2 \leq 2M \Rightarrow \dot{u}_{n_k} \rightharpoonup v_\infty$$

Le stime su costante di Hölder + $\|u\|_{L^\infty}$ grazie ad A.A. garantiscono

$$u_{n_{k_i}} \rightarrow u_\infty \text{ unif.}$$

Il solito discorso dice che $v_\infty = \dot{u}_\infty$.

Perché $u_\infty \in X$? Le DBC passano al limite per conv., unif.

[3] SCI rispetto alla stessa nozione

Praticamente gratis

→ se $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dot{u}_n^2 dx \geq \int_0^1 \dot{u}_\infty^2 dx$$

↑
la norma è SCI

→ se $u_n \rightarrow u_\infty$ unif., allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(u_n(x)) dx = \int_0^1 g(u_\infty(x)) dx$$

In questo momento esiste il min in X .

[4] Regolarità

[4.1] Ricavo ELE. Sia u un pto di min. Sia $v \in C_c^\infty((0,1))$

$$\varphi(t) := \int_0^1 \frac{1}{2} (\dot{u} + t\dot{v})^2 + g(u + tv)$$

Spero che

$$\varphi'(t) = \int_0^1 \dot{u}\dot{v} + t\dot{v}^2 + \underbrace{g'(u+tv)}_{\arctan(u+tv)} v$$

e quindi

$$\varphi'(0) = \int_0^1 \dot{u}\dot{v} + \arctan(u) v = 0$$

Potrei derivare sotto il segno di integrale? Sarebbe una dominazione sulla presunta derivata

$$\left| \dot{u}(x) \underbrace{\dot{v}(x)}_{\leq M} + t \underbrace{\dot{v}(x)^2}_{\leq M} + \arctan(u(x) + tv(x)) \underbrace{v(x)}_{\leq M} \right|$$

$$\leq |\dot{u}(x)| \cdot M + M^2 + \frac{\pi}{2} \cdot M$$

integrabile perché $\dot{u} \in L^2$, quindi $\dot{u} \in L^1$ essendo su un intervallo

[4.2] Guadagno le prime derivate

Abbiamo ottenuto che

$$-\int_0^1 \underbrace{\dot{u}\dot{v}}_{\neq \dot{\varphi}} dx = \int_0^1 \underbrace{\arctan u}_g \cdot \underbrace{v}_\varphi dx \quad \leadsto g \text{ è la deriv. debole di } f$$

$$\underbrace{(\dot{u})'} = \arctan u$$

↑ derivata debole di derivata debole

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0$$

$$\Rightarrow u \text{ ha derivata debole } C^0 \Rightarrow u \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$$

le funzioni Sobolev
sono prin. delle
loro deriv. deboli

Ora ELE è con derivate vere $u' = \arctan u$

4.3 Con il bootstrap si arriva a C^∞ .

In questo momento il pbm. originario ha almeno una soluzione, che è pure C^∞ .

UNICITÀ Distinguiamo 2 approcci

1° modo: quando il funzionale

Occhio! L'unicità del minimo NON basta

Fase 1: dico che ogni soluz. del pbm. dato è pto di min. del funzionale in X .

Questo segue dalla convessità di $L(s,p)$ rispetto alla coppia (s,p)

$$L(s_0 + s, p_0 + p) \geq L(s_0, p_0) + s L_s(s_0, p_0) + p L_p(s_0, p_0)$$

Prendere un competitore $w = u + v$ e faccio il conto

Fase 2: dico che il minimo è unico. La dim. è analoga usando la stretta convessità di L in (s,p) (notare che in questo caso basterebbe in p)

2° modo: quando solo 2° eq. Siano u e v due soluz.

$$\ddot{u} = \arctan u \quad + DBC$$

$$\ddot{v} = \arctan v \quad + DBC$$

Sottraggo $\ddot{u} - \ddot{v} = \arctan u - \arctan v$

Moltiplico per $u-v$

$$(\ddot{u} - \ddot{v})(u-v) = \underbrace{(\arctan u - \arctan v)(u-v)}_{\geq 0 \text{ perché } \arctan \text{ è monotona crescente}}$$

$$-\int_0^1 (\ddot{u} - \ddot{v})^2 dx + \underbrace{[(u-v)(\ddot{u} - \ddot{v})]_0^1}_{=0 \text{ per DBC}}$$

$$\leadsto \int_0^1 (\ddot{u} - \ddot{v})^2 dx \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} - \ddot{v} \equiv 0$$
$$\Rightarrow u - v \equiv \text{cost}$$
$$+ DBC \Rightarrow u \equiv v$$

— 0 — 0 —

La soluzione è convessa?

Quando 2° eq. $\ddot{u} = \arctan u$

Quindi è convessa se $\ddot{u} \geq 0$

Con un classico argomento di troncamento deduco che $u(x) \geq 0$ sempre.

La soluzione diventa > 0 subito? Sì, e anzi $\dot{u}(0) > 0$

Sì, se fosse $\dot{u}(0) = 0$ allora per unicità del plan. di Cauchy avrei $u \equiv 0$.

— 0 — 0 —

