

Generalità sui termini di SCI

- "Ponte di funzione" Supponiamo $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. e voglio passare al limite

$$\int_a^b g(x, u_n(x)) dx$$

Se $g(x, s)$ è continua in (x, s) , allora questi termini passano al limite "gratis"

Per il futuro, basta supporre molto meno. Ad esempio

$u_n(x) \rightarrow u_\infty(x)$ puntualmente in $[a, b]$

$g(x, s)$ sia SCI nella variabile s e misurabile in x
 $g(x, s)$ limitata dal basso

In queste ipotesi posso usare il lemma di Fatou

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x, u_n(x)) dx &\geq \int_a^b \liminf_{n \rightarrow \infty} g(x, u_n(x)) dx \\ &\geq \int_a^b g(x, u_\infty(x)) dx \end{aligned}$$

— o — o —

- Parte "di derivata" segue dalla SCI della norma se è u_i^2
 A quali

$$\int_a^b \psi(u) dx$$

posso generalizzare?

Teorema Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, che supponiamo C^1 e t.c.
 $|\psi'(p)| \leq A|p| + B \quad \forall p \in \mathbb{R}$

Supponiamo che $v_n \rightarrow v_\infty$ debole in $L^2(a,b)$.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_n) dx \geq \int_a^b \psi(v_\infty)$$

Dim. Supponiamo generosamente che $\psi \in C^1$. Allora

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a)b \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(v_n(x)) dx &= \int_a^b \psi\left(\underbrace{v_\infty(x)}_a + \underbrace{v_n(x) - v_\infty(x)}_b\right) dx \\ &\geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx + \underbrace{\int_a^b \psi'(v_\infty(x)) \cdot (v_n(x) - v_\infty(x)) dx}_0 \end{aligned}$$

$\downarrow$ per def. di conv. debole

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{LHS} \geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx$$

Tutto vero purché $\psi'(v_\infty(x)) \in L^2(a,b)$ e questo a sua volta è vero perché

$$|\psi'(v_\infty(x))|^2 \leq (A|v_\infty(x)| + B)^2$$

$\downarrow$
integrabile se $v_\infty \in L^2$.

— o — o —

Teoremi di compattezza

Obiettivo: sapendo che $F(u_n) \leq M$, dedurre che esiste una sottosuccessione t.c.

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightarrow u_\infty \quad \text{unif.} \\ \dot{u}_{n_k} &\rightarrow \dot{u}_\infty \quad \text{debole } L^2 \end{aligned}$$

Per avere s.succ. conv. sulle derivate, spero di avere qualcosa del tipo

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad \| \dot{u}_n \|_{L^2} \leq M'$$

Caso tipico $F(u) = \int_a^b \psi(\dot{u}) + g(x, u)$

Supponiamo

① $g(x, s)$ limitata dal basso da una costante

② $\psi(p)$ sta sopra una parabola

$$\psi(p) \geq Ap^2 - B \quad \text{con } A > 0 \quad g(x, s) \geq -C$$

Dim. Supponiamo $F(u_n) \leq M$. Allora

$$\begin{aligned} M \geq F(u_n) &= \int_a^b \psi(\dot{u}_n) + g(x, u_n) \\ &\geq \int_a^b (A \dot{u}_n^2 - B - C) dx \\ &= A \int_a^b \dot{u}_n^2 - (B+C)(b-a) \end{aligned}$$

$$\leadsto \int_a^b \dot{u}_n^2 dx \leq \frac{1}{A} \{ M + (B+C)(b-a) \} = M'$$

Esempio + delicato

$$F(u) = \int_a^b u^2 - u + DBC$$

Da $F(u) \leq M$ posso dedurre $\|u\|_{L^2} \leq M'$?

Risposta : Sì (ma non puoi se avessi $-u^3$)

Dim. Supponiamo di avere DBC $u(a) = A$ e $u(b) = B$

- Una stima su $\|u\|_{L^2}$ mi dà una stima sulla costante di Hölder

$$|u(y) - u(x)| \leq \|u\|_{L^2} \cdot |y - x|^{1/2} \quad \forall \dots$$

- Stima Hölder + DBC $\leadsto$ stima L^∞ su $u(x)$

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |u(a)| + |u(x) - u(a)| \\ &\leq A + \|u\|_{L^2} \cdot |b - a|^{1/2} \end{aligned}$$

- Stima L^∞ su $u(x)$ $\leadsto$ stima dal basso sulla parte di funzione

$$-\int_a^b u(x) dx \geq -\{A + \|u\|_{L^2} \cdot |b - a|^{1/2}\} (b - a)$$

- Salvataggio finale. Suppongo $F(u) \leq M$ e scrivo

$$\begin{aligned} M \geq F(u) &= \int_a^b u^2 - \int_a^b u \\ &\geq \|u\|_{L^2}^2 - \{A + \|u\|_{L^2} \cdot |b - a|^{1/2}\} (b - a) \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme abbiamo ottenuto

$$M \geq \underbrace{\|\ddot{u}\|_{L^2}^2 - \alpha \|\ddot{u}\|_{L^2} - \beta}$$

Polinomio di 2° grado nella variabile $\|\ddot{u}\|_{L^2}$

- Analisi 1: se $x^2 - \alpha x - \beta \leq M$, allora $|x| \leq M'$

$$(\forall \alpha, \beta, M \exists M' \text{ t.c. } \uparrow)$$

Da una stima su $F(u)$ ottengo una stima su $\|\ddot{u}\|_{L^2}$.

Oss. Lo stesso ragionamento si ricicla per

$$\int_a^b \psi(\ddot{u}) + g(x, u)$$

perché

- $\psi(p) \geq Ap^2 - B$
- $g(x, s) \geq -C - D|s|^\alpha$ per un qualche $\alpha < 2$

Oss. Ho usato solo una DBC in un estremo.
— o — o —

Esempio (senza DBC) $F(u) = \int_a^b \ddot{u}^2 + (u - e^x)^2$

Sapendo $F(u) \leq M$ posso dedurre $\|\ddot{u}\|_{L^2} \leq M'$
 $\underbrace{\|u\|_{L^\infty} \leq M'}$

Fino a sempre ottenuto
da DBC + $\|\ddot{u}\| \leq M'$

- La stima $\|\ddot{u}\|_{L^2} \leq M$ (stesso M) è gratis perché $(u - e^x)^2 \geq 0$

- Sappiamo che

$$\int_a^b (u(x) - e^x)^2 dx \leq M$$

$\parallel \leftarrow$ tes. media integrale

$(b-a) \cdot (u(c) - e^c)^2$ con c p.to misterioso in (a,b)

Stima integrale $\leadsto$ stima puntuale in p.to misterioso

$$\begin{aligned} (u(c) - e^c)^2 &\leq \frac{M}{b-a} \leadsto u(c) \leq \left(\frac{M}{b-a} \right)^{1/2} + e^c \\ &\leq \left(\frac{M}{b-a} \right)^{1/2} + e^b = M' \end{aligned}$$

- Stima puntuale in p.to misterioso + equi-Hölder
 $\leadsto$ stima puntuale ovunque

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |u(c)| + |u(x) - u(c)| \\ &\leq M' + \|u\|_{L^2} \cdot |x - c|^{1/2} \\ &\leq M' + \|u\|_{L^2} \cdot |b - a|^{1/2} = M'' \\ &\quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

Stima integrale $\leadsto$ stima puntuale in p.to misterioso

(se in aggiunta ho stima su $\|u\|_{L^2}$) $\leadsto$ stima L^∞