

ROAD MAP DEL METODO DIRETTO

Setting : S insieme, $F: S \rightarrow \mathbb{R}$ funzionale
 $\uparrow$ anche $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Obiettivo : dimostrare che esiste

$$\min \{ F(x) : x \in S \}$$

1 **Formulazione debole** Estendo il pbm. ad ambiente più generale

Cerco $\hat{S} \supseteq S$ e cerco $\hat{F}: \hat{S} \rightarrow \mathbb{R}$ che estende quella data

$$\hat{F}(x) = F(x) \quad \forall x \in S$$

(in realtà basta $\leq$)

2 **Compattezza** Cerco una nozione di cov. in $\hat{S}$ per cui almeno un sottolivello di $\hat{F}$ risulta non $\emptyset$ e compatto

$$\{x \in \hat{S} : \hat{F}(x) \leq M\} \neq \emptyset \text{ e cp.}$$

(se tutti i sottolivelli, ancora meglio)

3 **Semicontinuità** Spero che $\hat{F}$ sia SCI in $\hat{S}$ rispetto alla nozione di cov. di cui al punto 2

Se 1, 2 e 3 valgono a buon fine, allora $\hat{F}$ ha min. in $\hat{S}$

④ Regolarità Sia $\hat{x}_0 \in \arg\min \{ \hat{F}(x) : x \in \hat{S} \}$

Spero che • $\hat{x}_0 \in \hat{S}$ (ambiente originario)

• $\hat{F}(\hat{x}_0) = F(\hat{x}_0)$ (non scontato se ho p.to
□ con disuguaglianza)

Se anche ④ è ok, allora $\hat{x}_0$ è p.to di min. di $F(x)$ su $\hat{S}$, quindi il pbm. originario ha minimo.

$$[\forall x \in \hat{S} \quad F(x) \geq \hat{F}(x) \geq \hat{F}(\hat{x}_0) = F(\hat{x}_0)]$$

— o — o —

Esempio

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \arctan u^3 dx}_{F(u)} : \underbrace{\begin{cases} u \in C^1([a,b]) \\ u(a) = A, u(b) = B \end{cases}}_{\hat{S}} \right\}$$

① Formulazione debole $\hat{S} = H^1((a,b)) = W^{1,2}((a,b))$
con $\underbrace{u(a) = A, u(b) = B}_{\text{hanno senso anche in } H^1}$

$$\hat{F}(u) := \int_a^b \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \arctan u^3 dx \quad \text{😊}$$

$\uparrow$ derivata debole $\uparrow$ $u \in C^0$, quindi ha senso

② Compattità Considero su H^1 la nozione di conv. per cui $u_n \rightharpoonup u_\infty$ se e solo se

- $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. in $[a,b]$
- $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ debole $L^2((a,b))$

Dico che i sottolivelli sono compatti rispetto a questa nozione.

Per ogni $M \in \mathbb{R}$, considero una succ. $\{u_n\} \subseteq H^1$ t.c.

$$\hat{F}(u_n) \leq M$$

$$\int_a^b \frac{1}{2} \dot{u}_n^2 + \arctan(u_n^3) \leq M$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \dot{u}_n^2 &\leq 2M - 2 \int_a^b \arctan(u_n^3) \\ &\leq 2M + \pi(b-a) \end{aligned}$$

Quindi le norme L^2 di $\dot{u}_n$ sono equi-limitate, quindi a meno di s. succ.

$$\dot{u}_{n_k} \rightharpoonup v_\infty \text{ debole in } L^2$$

Inoltre una limitazione sulla norma L^2 delle derivate implica una limitazione sulla costante di $\frac{1}{2}$ -Hölder di u_n :

$$|u_n(y) - u_n(x)| \leq \underbrace{\|\dot{u}_n\|_{L^2}}_{\leq 2M + \pi(b-a)} \cdot |y-x|^{1/2} \quad \forall (y,x) \in [a,b]^2$$

$\leadsto$ equicontinuità delle u_n

Equicontinuità + DBC $\leadsto$ equilimitatezza delle u_n

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq |u_n(a)| + |u_n(x) - u_n(a)| \\ &\leq A + (2M + \pi(b-a)) \cdot |x-a|^{1/2} \\ &\leq |b-a|^{1/2} \end{aligned}$$

Applico Ascoli - Arzelà alla succ. $\{u_{n_k}\}$ che avvolgeva bene per le derivate e trovo una ulteriore s. succ.

$$u_{n_{k_i}} \longrightarrow u_\infty \text{ unif. in } [a,b]$$

Riassumendo abbiamo trovato

$$\bullet u_{n_{k_i}} \longrightarrow u_\infty \text{ unif. in } [a,b]$$

$$\bullet \dot{u}_{n_{k_i}} \longrightarrow v_\infty \text{ debole } L^2$$

Per il solito "doppio scambio" deduciamo che $\dot{u}_\infty = v_\infty$ e in particolare $u_\infty \in H^1$

$$\begin{array}{ccc} \int_a^b u_{n_{k_i}}(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b \dot{u}_{n_{k_i}}(x) \varphi(x) dx \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \int_a^b u_\infty(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v_\infty(x) \varphi(x) dx \end{array}$$

In conclusione i sottolivelli sono opt. rispetto alla nozione di conv. data

[3] Semicontinuità Se $u_n \longrightarrow u_\infty$ unif. e $\dot{u}_n \longrightarrow \dot{u}_\infty$ posso dedurre che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{F}(u_n) \geq \hat{F}(u_\infty) \quad ?$$

• Sapendo che $u_n \longrightarrow u_\infty$ unif., per analisi 2 sappiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \arctan(u_n^3) dx = \int_a^b \arctan(u_\infty^3) dx$$

- Usando la SCI della norma rispetto alla conv. debole sappiamo che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{2} \dot{u}_n^2 dx \geq \int_a^b \frac{1}{2} \dot{u}_\infty^2 dx$$

Per le proprietà del liminf abbiamo la tesi

In particolare esiste $\min \{ \hat{F}(u) : u \in H^1 + DBC \}$

[4] Spero che i minimi in H^1 siano in realtà in $C^1([a,b])$ a quel punto ho finito.

Roadmap:
 → ELE debole
 → passo iniziale
 → bootstrap

(ELE debole) Considero $u \in H^1$ p.to di minimo
 Considero $v \in C_c^\infty([a,b])$
 Pongo

$$\varphi(t) := \hat{F}(u+tv) = \int_a^b \frac{1}{2} (\dot{u} + t\dot{v})^2 + \arctan(u+tv)^3$$

e impongo $\varphi'(0) = 0$

Sperando di poter derivare sotto il segno di integrale, ottengo

$$\varphi'(t) = \int_a^b (\dot{u} + t\dot{v}) \dot{v} + \frac{3(u+tv)^2 v}{1+(u+tv)^6}$$

e quindi

$$\varphi'(0) = \int_a^b \dot{u} \dot{v} + \frac{3u^2}{1+u^6} v = 0$$

da cui

$$-\int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{u} \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi'}}{\dot{u}} = \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\frac{3u^2}{1+u^6}} \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi}}{v} \quad \forall v \in C_c^\infty(a,b)$$

$\Rightarrow g$ è la derivata debole di f !!!

Abbiamo quindi dimostrato che

$u \in H^1$ e la sua derivata debole è $\frac{3u^2}{1+u^6}$, cioè

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Derivata debole} \\ \text{della derivata debole}}}{(u)'} = \frac{3u^2}{1+u^6} \quad (\text{ELE classica interpretata})$$

$\rightarrow$ Passo iniziale: guadagnare regolarità su u

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0 \Rightarrow (u)' \in C^0$$

$$\Rightarrow u' \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$$

$\uparrow$
compatibilità
caso classico

$$\text{Ora (ELE) ha senso classico} \quad u'' = \frac{3u^2}{1+u^6}$$

$\rightarrow$ Bootstrap diretto fino a C^∞

$$u \in C^2 \Rightarrow \text{RHS} \in C^2 \Rightarrow u' \in C^2 \Rightarrow u \in C^4 \Rightarrow \text{RHS} \in C^4 \\ \Rightarrow \dots \text{ fino a } C^\infty.$$

— o — o —