

Oss. Indichiamo con $C^{1,p}([a,b])$ l'insieme delle funzioni $u \in C^1$ in (a,b) tali che $u \in L^p$ e $u' \in L^p$.
Osservo che

$$\|u\|_{1,p,[a,b]} := \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

è una norma in questo spazio.

Def. (Spazio di Sobolev - Def. H) vedi Def. Analisi 2

Si definisce $H^{1,p}([a,b])$ il completamento di $C^{1,p}([a,b])$ rispetto alla distanza indotta dalla norma $\|\cdot\|_{1,p,[a,b]}$ (si può fare anche completando C^∞ rispetto alla stessa metrica)

In termini più concreti, accade che $u \in H^{1,p}([a,b])$ se e solo se esiste $\{u_n\} \subseteq C^\infty([a,b])$ tale che ↑ senza supp. q.t.

(i) $u_n \rightarrow u$ in $L^p([a,b])$

(ii) $u'_n \rightarrow v$ in $L^p([a,b])$
↑ derivata vera ↑ derivata sia in senso H sia in senso W

Oss. Come dimostrato prima vale che

$$H^{1,p}([a,b]) \subseteq W^{1,p}([a,b])$$

Teorema (In **Dim. 1** le funzioni $W^{1,p}$ sono le primitive delle loro derivate deboli)

Sia (a,b) intervallo, sia $u \in W^{1,p}(a,b)$ con derivata debole v . Poniamo

$$V(x) := \int_a^x v(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

Allora V è una funzione continua e $u(x) = V(x) + \text{cost.}$ per quasi ogni $x \in (a,b)$.

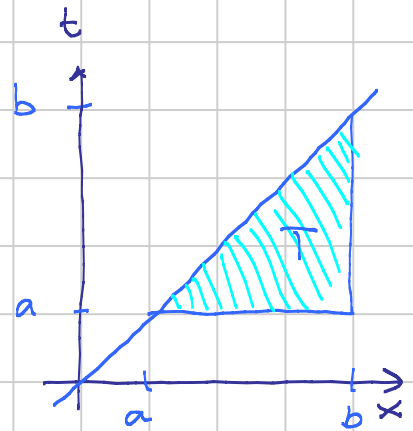
[Probabilmente vale anche con u e v in L^1_{loc} definendo la primitiva a partire da $x_0 \in (a,b)$]

Dim. Volei dimostrare che

$$\int_a^b [V(x) - u(x)] \varphi'(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

Perché poi concludo con DBR.

$$\begin{aligned} \int_a^b V(x) \varphi'(x) dx &\stackrel{\text{def. } V}{=} \int_a^b \varphi'(x) \int_a^x v(t) dt \\ &= \iint_T \varphi'(x) v(t) dt \\ &\stackrel{\text{(commutabile risp. asse } t)}}{=} \int_a^b dt \int_t^b dx \varphi'(x) v(t) \\ &= \int_a^b v(t) dt \int_t^b \varphi'(x) dx \\ &= - \int_a^b v(t) \varphi(t) dt \\ &= \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx, \end{aligned}$$



da cui la tesi.

— o — o —

Teorema ($H=W$) Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e sia $p \in (1, \infty)$ $\leftarrow$ estremo escluso

Allora

$$W^{1,p}((a,b)) = H^{1,p}((a,b))$$

Dim. $\geq$ già fatto

$\leq$: devo mostrare che ogni $u \in W^{1,p}$ si approssima bene con funzioni C^∞ .

Detta v la derivata debbe (in senso W) di u , la posso approssimare in $L^p((a,b))$ con funzioni C^∞ .
Otengo

$$v_n \rightarrow v \quad \text{in } L^p((a,b))$$

Pongo
$$V_n(x) := \int_a^x v_n(t) dt \rightarrow V(x) = u(x) + c$$

Quindi basta porre $u_n(x) := V_n(x) - c$ ed è fatta

Alcune proprietà si vedono bene con la def. H

Ripasso: Ascoli - Arzelà (versione metrica)

Siano X e Y spazi metrici. Sia $f_n: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) X compatto

(ii) (compattezza a x fisso) per ogni $x \in X$ esiste un compatto $K \subseteq Y$ (K può dipendere da x) tale che

$$f_n(x) \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(iii) (Equicontinuità)

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in B_X(x, \delta) \quad \widehat{\forall n \in \mathbb{N}} \quad f_n(y) \in B_Y(f_n(x), \varepsilon)$$

(δ dipende da ε ed x , ma non da n)

Allora esiste s.succ. che converge uniformemente.

HÖLDERIANITÀ DELLE FUNZIONI DI SOBOLEV

Teorema (1 dim. assolutamente)

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $p \in (1, +\infty)$, sia p' l'esponente coniugato, cioè escluso

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

e sia $u \in W^{1,p}((a,b))$.

Allora u è $\frac{1}{p'}$ Hölderiana in (a,b) , e anzi

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_{L^p} \cdot |x-y|^{1/p'} \quad \begin{array}{l} \forall x \in (a,b) \\ \forall y \in (a,b) \end{array}$$

(si interpreta: u coincide quasi ovunque con una funzione $\frac{1}{p'}$ Hölderiana)

Dim. Sia $u'(x)$ la derivata debole, sia $V(x)$ come prima

$$V(x) := \int_a^x u'(t) dt$$

Allora $u(x) = V(x) + \text{costante}$, quindi per ogni $x > y$

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= |V(x) - V(y)| \\ &= \left| \int_y^x u'(t) dt \right| \\ &\leq \int_y^x |u'(t)| dt \\ &= \int_y^x \underbrace{|u'(t)|}_{\in L^p} \cdot \underbrace{1}_{\in L^{p'}} dt \end{aligned}$$

(Hölder)

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_y^x |u'(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_y^x 1^{p'} dt \right)^{1/p'} \\ &\leq \left(\int_a^b |u'(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \underbrace{|x-y|^{1/p'}}_{|x-y|^{1/p'}} \end{aligned}$$

Oss. I teoremi precedenti autorizzano a parlare del "valore di una funzione di Sobolev in un p.to" inteso "valore del rappresentante continuo".

Prop. Solito setting. Siano $u(x)$ e $v(x)$ in $W^{1,p}(a,b)$ con $p \in (1, +\infty)$.

Allora

$$\int_a^b u(x) \dot{v}(x) dx = - \int_a^b \dot{u}(x) v(x) dx + u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

continua, quindi $u(x)\dot{v}(x)$ è integrabile

i valori puntuali hanno senso

Dim. Si può fare a partire dalla def. W , ma è molto più semplice a partire dalla H

Prendo le approssimanti C^∞

$u_m \rightarrow u$	$v_m \rightarrow v$
$\dot{u}_m \rightarrow \dot{u}$	$\dot{v}_m \rightarrow \dot{v}$

Sulle approx C^∞ vale la formula

$$\int_a^b u_m \dot{v}_m = - \int_a^b \dot{u}_m v_m + [u_m v_m]_a^b$$

e spero di passare al limite.

Lemma Se $u_m \rightarrow u_\infty$ in $L^p(a,b)$
 $\dot{u}_m \rightarrow \dot{u}_\infty$ in $L^p(a,b)$

Allora

$u_m \rightarrow u_\infty$ UNIFORMEMENTE (a meno d'i.s.s.a.)

Dim. Basta dim. che se u_m verificano le hp di A.A.

L'equicontinuità segue dalla equi-kölderianità.

Infatti

$$|u(y) - u(x)| \leq \underbrace{\|du\|_{L^p}}_{\text{sono finite}} |x-y|^{1/p}$$

perché u è conv. in L^p

L'equicontinuità segue dalla equicontinuità di $\|du\|_{L^p}$.