

SPAZI DI SOBOLEV 1 DIM

Caso "baby"

- $d = 1$ (dimensione 1)
- $k = 1$ (derivate prime)
- $\Omega = (a, b)$ (intervallo)

Caso generale

- dimensione d qualunque
- ordine di deriv. k qual.
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto qualunque

Def. (Derivata debole, def. W)

Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, e sia $u \in L^1_{loc}((a, b))$.

Si dice che u ammette derivata debole se esiste $v \in L^1_{loc}((a, b))$ tale che

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((a, b))$$

Brutalmente: v gioca il ruolo di $u'(x)$ nella formula di integrazione per parti

Prop. Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

(1) (unicità) La deriv. debole, se esiste, è unica

(2) (linearità) [bla bla bla nel video]

Se v_1 è deriv. debole di u_1 e

v_2 " " " " u_2 , allora

$\alpha v_1 + \beta v_2$ è deriv. debole di $\alpha u_1 + \beta u_2$

(3) (compatibilità trivial con caso classico)

Se $u \in C^1((a, b))$, allora $u'(x)$ è la sua deriv. debole

(4) (compatibilità meno trivial) Se $u \in L^1_{loc}((a, b))$ ammette derivata debole $v \in C^0((a, b))$, allora in realtà u era C^1 .

Dim.

(1) Siano v_1 e v_2 due derivate deboli di u . Allora

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx &= - \int_a^b v_1(x) \varphi(x) dx \\ &= - \int_a^b v_2(x) \varphi(x) dx\end{aligned}$$

Ma allora

$$\int_a^b [v_1(x) - v_2(x)] \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

FLCV $\Rightarrow v_1(x) = v_2(x)$ per quasi ogni $x \in (a,b)$

(2) Ovvio: Linearità dell'integrale

(3) Ovvio: formula di integrazione per parti

(4) Sia $V(x)$ una primitiva di $v(x)$ (analisi 1 in un intervallo)

$$V(x) := \int_{x_0}^x v(t) dt \quad x_0 \in (a,b) \text{ fisso}$$

Osservo che

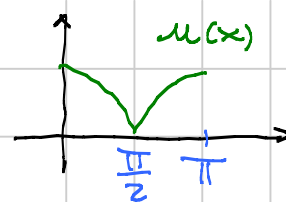
$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{der. deriv.} \\ \text{debole}}}{v(x)} \varphi(x) dx = \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{int. per} \\ \text{parti}}}{V(x)} \varphi'(x) dx$$

Ma allora

$$\int_a^b [u(x) - V(x)] \varphi'(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b).$$

Lemma DBR $\Rightarrow u(x) = \underbrace{V(x) + c}_{\text{funzione } C^1} \text{ per q.o. } x \in (a,b)$
— 0 — 0 —

Esempio 1 $(a,b) = (0,\pi)$ $u(x) = |\cos x|$



Dico che u è derivabile in senso debole e la sua derivata è

$$v(x) := \begin{cases} -\sin x & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \sin x & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u(x) \varphi'(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \varphi'(x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x \cdot \varphi'(x) dx \\ &= - \int_0^{\pi/2} (-\sin x) \varphi(x) dx + [\cos x \cdot \varphi(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\sin x) \varphi(x) dx - [\cos x \cdot \varphi(x)]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= - \int_0^\pi v(x) \varphi(x) dx + 2 \cos \frac{\pi}{2} \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Oss. Allo stesso modo si verifica che tutte le funzioni continue e C^1 a tratti hanno la derivata debole come uno si aspetta. Ce ne sono però altre.

Esempio 2 Consideriamo $H: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ (Heaviside)

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Questa non ammette derivata debole

$$\int_{-1}^1 H(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \dots$$

$$\text{LHS} = \int_0^1 \varphi'(x) dx = \varphi(1) - \varphi(0) = -\varphi(0)$$

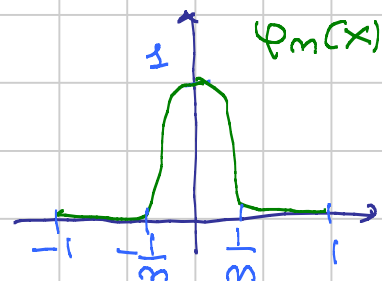
Quindi dovrebbe essere

$$\varphi(0) = \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

Se da scrivo con φ_n ho che

$$\text{LHS} \equiv 1$$



RHS $\rightarrow 0$ per conv. puntuale

$$\text{dominata da } |v(x) \varphi_n(x)| \leq |v(x)|$$

— o — o —

Def. (Spazio di Sobolev - Def. W)

compreso



Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $p \in [1, +\infty]$.

Si definisce $W^{1,p}(a,b)$ come l'insieme delle funzioni $u \in L^p(a,b)$ con derivata debole $v \in L^p(a,b)$.

Si verifica che $W^{1,p}(a,b)$ è uno spazio vettoriale e

$$\|u\|_{1,p,(a,b)} := \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}$$

è una norma sullo spazio.

— o — o —

Def. (Derivata debole, def. H)

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ e sia $u \in L^1_{loc}((a,b))$.

Si dice che v è "la" derivata debole (in senso H) di u se esiste una succ. $\{u_n\} \subseteq C^\infty((a,b))$ tale che
 $\uparrow$ non c'è il supp. compatto

(i) $u_n \rightarrow u$ in $L^1(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset (a,b)$

(ii) $\overset{\uparrow \text{derivate vere}}{u'_n} \rightarrow v$ in $L^1(\Omega')$ " " "

Cosa è valido della teoria precedente

- | | |
|-------------------|---------------------------------------|
| (1) Unicità | $\leadsto$ non ovvia |
| (2) linearità | $\leadsto$ ovvia |
| (3) Compatibilità | trivial $\leadsto$ derivati di approx |
| (4) " " | non trivial $\leadsto$ non ovvio |
| (5) $ \cos x $ | $\leadsto$ vedi sotto |
| (6) $H(x)$ | $\leadsto$ non ovvio |

Per $|\cos x|$ pongo

$$u_n(x) := \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{n}}$$

Si vede che $u_n(x) \rightarrow |\cos x|$ anche uniformemente

$$u'_n(x) = \frac{-\cos x \cdot \sin x}{\sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{n}}}$$

e quindi

$$u'_n(x) \rightarrow \begin{cases} -\sin x & \text{se } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \sin x & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

in maniera dominata $|u'_n(x)| \leq 1$.

Prop. Se v è la derivata debole in senso H di u , allora v è anche la derivata in senso W .

Dim. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx$$

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx$$

Questo mostra che $\nabla v(x)$ è derivata in senso w.

Oss. Questo risolve i problemi lasciati aperti nei commenti

In realtà ho usato molto meno

Prop. Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $\{u_n\}$ una succ. in $L^1_{loc}([a,b])$ e siano

$\{V_m\}$ le corrispondenti derivate deboli che sappiamo esistere.

Supponiamo che

Basta ancora
meno

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_\infty \text{ debole in } L^2(\Omega') \text{ per ogni } \Omega' \subset\subset (a,b) \\ v_n &\rightarrow v_\infty \quad " \quad " \quad " \end{aligned}$$

Allora $v_\infty = u_\infty$ in senso debole (per ora in senso W)

Dim.: la stessa di sopra: usa solo coun. deboli!