

Ripassiamo: spazi $L^2(\Omega)$ e $\mathcal{L}^2$

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto. Allora

misura di Lebesgue

$$L^2(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabili t.c. } \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty\}$$

(in realtà sarebbero classi di funzioni)

↑ quadrato della norma

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$$

Oss. Più in generale posso prendere uno spazio di misura

$(X, \mathcal{m}, \mu)$

insieme ↑

σ-algebra

misura numerabilmente additiva sui disgiunti
a valori in $[0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

$$L^2(X, \mathcal{m}, \mu) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mis. t.c. } \int_X |f(x)|^2 d\mu < +\infty\}$$

Perché è un Hilbert

- che è vettoriale è semplice
- che il prod. scalare è ben definito segue da $|AB| \leq \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2$
- che è def. positivo segue dal quoziente
- che è completo: → prendo $\{f_n\}$ di Cauchy e con il lemma di accelerazione trovo s. succ. t.c. $\|f_{n+1} - f_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ (fatto metrico). A questo punto

$$f_n = f_1 + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \dots + (f_n - f_{n-1})$$

Quindi $\text{dim } f_n =$ somma di una serie che per il
lemma di acc. è assolutamente conv.

Una succ. di C. con s. succ. conv. converge a sua volta

— 0 — 0 —

Def. $\ell^2 = \{ \text{successioni di reali } \{x_n\} \text{ t.c. } \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty \}$

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \quad (\text{converge per i motivi di sopra})$$

Perché è un Hilbert

Dim. canonica: $\ell^2 = L^2(\mathbb{N})$ rispetto alla misura che
conta i punti

Dim. "elementare" Per comodità risorivo

$$\ell^2 := \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|^2 < +\infty \}$$

Prendo una succ. $\{f_n\}$ di Cauchy e voglio dim. che
converge.

Step 1 Dim. che $f_n(k) \rightarrow f_{\infty}(k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$
(conv. puntuale)

Basta verificare che $\{f_n(k)\}$ è una succ. di C. di numeri
il che segue da

$$|f_n(k) - f_m(k)|^2 \leq \|f_n - f_m\|_{\ell^2}^2$$

Step 2 Dimostro che $f_{\infty} \in \ell^2$. Mi serve bound unif.
sulle somme parziali. Dato $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{k=0}^m |f_{\infty}(k)|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^m |f_n(k)|^2}_{\leq \|f_n\|_{\ell^2}^2} \leftarrow \begin{array}{l} \text{equiuniformità per due} \\ \text{succ. di C. sono limitate} \end{array}$$

Step 3 Dimostro che le code sono unif. piccole

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 &= \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k) - f_{m_0}(k) + f_{m_0}(k)|^2 \\ &\leq 2 \underbrace{\sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k) - f_{m_0}(k)|^2}_{\leq \|f_m - f_{m_0}\|_{\ell^2}^2} + 2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_{m_0}(k)|^2 \end{aligned}$$

Sistema rigorosamente

• Ti viene dato $\varepsilon > 0$

• Scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall m \geq m_0 \quad \forall n \geq m_0 \quad \|f_m - f_n\|_{\ell^2}^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

• Visto ℓ^2 , scelgo M in maniera tale che

$$\sum_{k=M}^{\infty} |f_n(k)|^2 \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall n \leq m_0$$

(che sono un numero finito)

Questo M va bene per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Step 4 Il valore di M dello step 3 va bene anche per f_{∞}
La dim. è un remake dello Step 2.

Step 5 $f_m \rightarrow f_{\infty}$ in ℓ^2 .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |f_{\infty}(k) - f_m(k)|^2 &= \sum_{k=0}^{M-1} \dots + \sum_{k=M}^{\infty} |f_{\infty}(k) - f_m(k)|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} |f_{\infty}(k) - f_m(k)|^2 + 2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_{\infty}(k)|^2 + 2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 \end{aligned}$$

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Scelgo N come nello step 3 in modo da avere $\frac{\varepsilon}{4}$
- Passo al limite nella somma finita e ottengo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} LHS \leq \varepsilon$$

— o — o —

Oss.

Geometria 1: tutti gli spazi di Hilbert di dim. finita "sono" $\mathbb{R}^n$

Ist. An. Mat.: tutti gli spazi di H. separabili di dim. infinita sono ℓ^2 .

— o — o —

Hilbert NON separabile Metto su $\mathbb{R}$ la misura $\mathcal{H}^0$ che conta i punti

$$\mathcal{H}^0(A) = \begin{cases} \infty & \text{se } A \text{ è infinito} \\ \text{numero di el. di } A & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}^0)$ è un Hilbert e non è separabile

[I suoi elementi sono funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sono $\neq 0$ solo su un insieme numerabile, e la loro norma è la serie.

Una base Hilbertiana + che numerabile sono le funzioni che valgono 1 in un p.to e 0 altrove].

— o — o —

Perché gli $L^2(\Omega)$ è separabile?

Un denso numerabile sono le comb. lin. a coeff. in $\mathbb{Q}$ di caratteristiche di prod. di interv. ad estremi razionali

Esercizio Considero $L^2((0, \pi))$.

Considero

$$u_n(x) = \sin(nx)$$

Queste stanno in L^2

Dico che $u_n \rightarrow 0$

Dim In teoria dovrei far vedere che

$$\int_0^\pi \sin(nx) v(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall v \in L^2((0, \pi))$$

Basta che lo testi per ogni v e sottoinsieme che spanna un denso

Prendo le funzioni caratteristiche dei sottointervalli $(a, b) \subseteq (0, \pi)$. Ora il conto è facile

$$\int_a^b \sin(nx) dx \rightarrow 0$$

$$= \frac{1}{n} [\cos(na) - \cos(nb)] \rightarrow 0 \quad \text{😊}$$

Esercizio

$$\sin^2(nx) \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$[\text{Precorso: } \sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2nx)]$$

Achtung! La convergenza debole si comporta molto male per composizione, cioè

$$f_n \rightarrow f_\infty$$

$$\not\Rightarrow \varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f_\infty)$$

(anche se φ è molto buona: lo posso garantire solo per le affini)

ma ovviamente

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f_n(x)^2 dx \geq \int_0^\pi f_\infty(x)^2 dx.$$