

Oss. In un Hilbert di dim infinita la norma NON è continua debolmente

$$u_n \rightarrow u_\infty \not\Rightarrow \|u_n\| \rightarrow \|u_\infty\|$$

[Esempio: sia $\{e_n\}$ una base Hilbertiana. Allora $e_n \rightarrow 0$,
ma $\|e_n\| \equiv 1$]

Teorema (sci della norma) Sia H un Hilbert.

Supponiamo che $u_n \rightarrow u_\infty$.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \geq \|u_\infty\|$$

Dim

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \|u_\infty + (u_n - u_\infty)\|^2 \\ &= \|u_\infty\|^2 + \underbrace{\|u_n - u_\infty\|^2}_{\geq 0} + 2 \langle u_\infty, u_n - u_\infty \rangle \\ &\geq \|u_\infty\|^2 + 2 \underbrace{\langle u_\infty, u_n - u_\infty \rangle}_{\downarrow 0 \text{ per def. di conv. debole}} \end{aligned}$$

Faccio $\liminf$ a dx e sx e ho concluso.

— 0 — 0 —

Esercizio Sia H Hilbert.

Supponiamo che

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{e} \quad \|u_n\| \rightarrow \|u_\infty\|$$

Allora

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ forte.}$$

Dim

$$\begin{aligned} \|u_n - u_\infty\|^2 &= \|u_n\|^2 + \|u_\infty\|^2 - 2 \langle u_n, u_\infty \rangle \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \|u_\infty\|^2 + \|u_\infty\|^2 - 2 \langle u_\infty, u_\infty \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Oss. Se H è uno spazio di Hilbert di dimensione ∞ , allora

- Le palle chiuse $\{x \in H : \|x\| \leq R\}$ non sono compatte fortemente

[la solita $\{e_n\}$ non ha s.succ. di Cauchy perché $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ per ogni $m \neq n$]

- Le sfere $\{x \in H : \|x\| = R\}$ non sono compatte, né fortemente, né debolmente

[la solita $\{e_n\}$]

Teorema (compattanza debole delle palle)

Sia H uno spazio di Hilbert separabile

Sia $\{u_m\} \subseteq H$ una successione limitata, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \|u_m\| \leq M$$

Allora u_m ammette s.succ. cov., debolmente, cioè esiste $\{n_k\}$ succ. cresc. di interi positivi, ed esiste $u_\infty \in H$, tale che

$$u_{n_k} \longrightarrow u_\infty \quad (\text{debole})$$

Dim Sia $\{e_i\}$ una base Hilbertiana. Mi basta dim. che esiste n_k ed esiste u_∞ tale che

$$\langle u_{n_k}, e_i \rangle \longrightarrow \langle u_\infty, e_i \rangle \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Step 1 Scelta di n_k con procedimento diagonale.

- Considero e_1 e considero $|\langle u_m, e_1 \rangle|$. È una succ. limitata di numeri (C-S). Quindi ammette s.succ. che converge ad un certo α_1 .

Sia $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli indici di questa s.succ.

- Considero e_2 e considero $|\langle u_m, e_2 \rangle|$ con $m \in N_1$

Questa ammette s.succ. che converge ad α_2 .

Chiamo $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$ gli indici di questa.

- Procedendo in questo modo ottengo sottosuccessioni
$$N \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_k \supseteq \dots$$

Prendo n_k crescente tale che

$$n_k \in N_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

è quindi anche a tutti
i precedenti

Osservo che U_{n_k} è una s.succ. di tutte quelle usate strada facendo, almeno definitivamente.

Conseguenza

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle U_{n_k}, e_i \rangle = \alpha_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Step 2 Praticamente ho la tesi se pongo

$$U_\infty := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Devo però dimostrare che la serie converge, il che è equivalente a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < +\infty$$

il che equivale ad un bound uniforme sulle somme parziali.

Fisso $m \in \mathbb{N}$. Allora

somma finita

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \langle U_{n_k}, e_i \rangle^2$$

rapp. norma con
le componenti

$$\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \langle U_{n_k}, e_i \rangle^2}_{= \|U_{n_k}\|^2} \stackrel{\downarrow}{=} \limsup_{k \rightarrow +\infty} \|U_{n_k}\|^2 \leq M$$

Achtung! Occhio agli scambi. Supponiamo che $u_n \rightarrow u_\infty$
Allora

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle u_n, e_i \rangle^2 = \|u_n\|^2$$

↓ $\neq$ NO!!!

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle u_\infty, e_i \rangle^2 = \|u_\infty\|^2$$

OCCHIO: NON si scambiano le serie infinite con i limiti.

— o — o —

Cosa succede se H non è separabile

Fatto 1 (semplice) Esiste comunque un sottoinsieme numerabile $\{e_n\}$ di vettori ortonormali (non dico che abbiano span denso)

[Si costruisce facilmente per induzione: prendo e_1 con $\|e_1\|=1$, poi prendo $u_2 \notin \text{Span}(e_1)$ e lo rendo ortogonale al prec. e di norma 1, poi prendo $u_3 \in \text{Span}(e_1, e_2)$...]

Fatto 2 Usando l'assioma di scelta si dimostra che esiste $\{e_i\}_{i \in I}$ $\leftarrow$ non nec. numerabile tale che

- $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ se $i=j$ e 0 altrimenti
- per ogni $v \in H$ esiste un sottoinsieme $J \subseteq I$ numerabile tale che

$$v = \sum_{j \in J} \langle v, e_j \rangle e_j$$

— o — o —

Lemma (Serie assolutamente conv. in un Banach)

Sia V un Banach e sia $\{v_n\} \subseteq V$ una succ.

Allora

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < +\infty}_{\text{serie di numeri}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ converge}}_{\text{serie di vettori}}$$

Oss. Non vale il viceversa, nemmeno se $V = \mathbb{R}$

Dim. Poissano

$$S_m := \sum_{k=0}^m v_k$$

$$\hat{S}_m := \sum_{k=0}^m \|v_k\|$$

Allora per ogni $m > n$ vale

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m v_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|v_k\| = \hat{S}_m - \hat{S}_n$$

↑
triangolo

Conclusione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \{\hat{S}_n\} \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \{S_n\} \text{ è di Cauchy in } V$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ converge in } V$$

— o — o —