

Dim. teo. 2 Dato $x \in H$ definisco $x_k := \langle x, e_k \rangle$
e spero che

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \text{ converga e converga ad } x$$

Step 1 Per dim. che la serie conv., mostro che $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty$.

Fisso $n \geq 0$ e scrivo

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + r_n$$

$\uparrow$ resto

Dimostro che $\langle r_n, e_k \rangle = 0$ per ogni $k = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \langle r_n, e_k \rangle &= \langle x - x_0 e_0 - \dots - x_n e_n, e_k \rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle - x_k = x_k - x_k = 0 \end{aligned}$$

Posso calcolare la norma a dx e sx:

$$\|x\|^2 = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 + \|r_n\|^2 \geq \sum_{k=0}^n x_k^2$$

$\uparrow$
a dx sono
ortogonali

Questo mi assicura la conv. di $\sum x_k^2$, quindi anche della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n.$$

Step 2 Pongo

$$\hat{x} := \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \quad (\text{presumo } x)$$

Esercizio 1 Sia H un Hilbert di dim. infinita, e sia $\{e_n\}$ una base Hilbertiana.

Allora

- La succ. $\{e_n\}$ non ha sottosucc. che convergano forte
- $e_n \rightarrow 0$

Dim $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ se $m \neq n$

Quindi non può avere s. succ. di Cauchy

Dimostro invece che $e_n \rightarrow 0$. Prendo un qualunque $w \in H$ e spero che $\langle w, e_n \rangle \rightarrow \langle w, 0 \rangle = 0$

Ora

$$\langle w, e_n \rangle = w_n \rightarrow 0$$

per cond. necessaria di conv. della serie $\sum_{n=0}^{\infty} w_n^2$

Esercizio 2 Se $u_m \rightarrow u_\infty$ e $w_m \rightarrow w_\infty$, allora

$$\alpha u_m + \beta w_m \rightarrow \alpha u_\infty + \beta w_\infty$$

Dim. Linearità di prod. scalare e passaggio al limite.

Esercizio 3 Se $u_m \rightarrow u_\infty$, allora

$$\langle u_m, e_k \rangle \rightarrow \langle u_\infty, e_k \rangle \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(le comp. di u_m tendono alle comp. di u_∞)

Dim. Uso def. di conv. debde con $w := e_k$.
— 0 — 0 —

Esercizio 4 Se H ha dimensione finita, allora

$$U_m \rightarrow U_\infty \iff U_m \rightarrow U_\infty$$

Dim In dimensione finita la conv. come vettori è equiv. alla conv. delle componenti.

Esercizio 5 In qualunque Hilbert H vale

$$U_m \rightarrow U_\infty \implies U_m \rightarrow U_\infty$$

Dim Continuità del prod. scalare
— o — o —

Prop. Sia H Hilbert. Supponiamo che

(i) $U_m \rightarrow U_\infty$

(ii) $W_m \rightarrow W_\infty$

(iii) $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|U_m\| \leq M$ per ogni $m \in \mathbb{N}$

(molto più avanti vedremo che questa hp non serve)

Allora

$$\langle U_m, W_m \rangle \rightarrow \langle U_\infty, W_\infty \rangle$$

Dim La solita

$$|\langle U_\infty, W_\infty \rangle - \langle U_m, W_m \rangle| \leq$$

$$\leq \underbrace{|\langle U_\infty, W_\infty \rangle - \langle U_m, W_\infty \rangle|}_{\substack{\downarrow \\ \text{per def. di conv.} \\ \text{debole}}} + \underbrace{|\langle U_m, W_\infty \rangle - \langle U_m, W_m \rangle|}_{\substack{\leq \|U_m\| \cdot \|W_\infty - W_m\| \\ \leq M \quad \downarrow \\ \text{o b}}}}$$

— o — o —

Oss. Due deboli non bastano

$$v_m = w_m = e_n$$

$$v_m \rightarrow 0$$

$$w_m \rightarrow 0$$

$$\underbrace{\langle v_m, w_m \rangle}_{\rightarrow 0} = \underbrace{\|e_n\|^2}_{= 1} = 1 \not\rightarrow 0 = \underbrace{\langle w_0, w_0 \rangle}_{= 1}$$

Domanda: nella def. di conv. debole, quanto posso indebolire la richiesta

$$\langle v_m, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle \quad \forall w \in ?$$

Prop. Sia H un Hilbert, sia $\{v_m\} \subseteq H$ una succ., e sia $v_\infty \in H$.

Supponiamo che $\{v_m\}$ sia limitata.

Supponiamo che

$$\langle v_m, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle \quad \forall w \in W$$

con $\text{Span}(W)$ denso.

Allora davvero $v_m \rightarrow v_\infty$

Oss. Se v_m non è limitata, allora non è vero.

Pseudo $v_m = m e_m$. È chiaro che

$$\langle v_m, e_k \rangle \rightarrow 0 \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}$$

$\uparrow$
è 0 definitivamente

Tuttavia $v_m \not\rightarrow 0$, come si vede scontrando contro

$$w := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \quad \left(\text{converge e } \langle v_m, w \rangle = 1 \text{ per ogni } m \in \mathbb{N} \right)$$

Dim Prop.] Brutta copia... prendo $w \in H$ qualunque e scrivo

$$|\langle u_m, w \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| \leq |\langle u_m, w \rangle - \langle u_m, w_\varepsilon \rangle| \quad (1)$$

$$+ |\langle u_m, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle| \quad (2)$$

$$+ |\langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| \quad (3)$$

Idea: (1) e (3) sono piccoli se $w_\varepsilon \in W$ è vicino a w
(2) è piccolo se n è grande

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Scelgo $w_\varepsilon \in \text{Span}(W)$, che è denso, tale che

$$\|w - w_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{M+1}$$

$\uparrow$ limitazione su $\|u_m\|$

$$\|w - w_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{\|u_\infty\| + 1}$$

• Ricevuto w_ε dal passo prec., scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|\langle u_m, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$$

(posso perché il prod. scal. passa al limite in $\text{Span}(W)$)

• Osservo che per $m \geq m_0$ vale

$$(1) = |\langle u_m, w \rangle - \langle u_m, w_\varepsilon \rangle| \leq \|u_m\| \cdot \|w - w_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$\leq M$

$$(3) = \text{idem.} \leq \|u_\infty\| \cdot \|w - w_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$$\textcircled{2} \leq \frac{1}{4} \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_0$$

Quindi ho finito.

— o — o —

Riassunto

• In dim. finita

conv. vettori $\Leftrightarrow$ conv. delle componenti

• In dim. infinita

conv. vettori $\rightsquigarrow$ conv. forte

conv. componenti, almeno sulle succ. di unitate $\rightsquigarrow$ conv. debole

↑

Posso controllare la conv.
debole solo contro una
base Hilbertiana

— o — o —

BAIRE POINT Le succ. deb. conv. sono di unitate
(per ora non serve)