

- $\mathbb{R}^n$
- Sp. di Hilbert (funziona tutto con POCHE eccezioni)
- Sp. di Banach (" nulla " POCHE ")
- Sp. Vett. Top. Loc. Convessi
- Sp. Vett. Top.
- Insieme

Norma Sia V vettoriale una NORMA è una funzione
 $V \ni x \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$

$$(m1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$$

$$(m2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(m3) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V$$

$$(m4) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Sp. di Banach Sp. vett. V munito di una norma che lo rende un metrico completo.

Prod. scalare Sia V vettoriale. Un PROD. SCALARE è

$$V^2 \ni (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

$$(p1) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall \dots$$

$$(p2) \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall \dots$$

$$(p3) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V \quad \text{con} = 0 \text{ e solo se } x = 0$$

Facile verifica : se $\langle x, y \rangle$ è prod. scal., allora

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2} \quad \text{è una norma}$$

Def. Uno sp. di Hilbert = sp. vett. H con un prod. scal. che induce una norma che induce una metrica che lo rende completo.

Def. Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita (se $\dim H < +\infty$, allora $H = \mathbb{R}^n$)

Una base Hilbertiana è un sottoinsieme $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

(i) Vale

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \left. \vphantom{\langle e_i, e_j \rangle} \right\} \begin{array}{l} \text{cioè gli } e_n \\ \text{sono} \\ \text{ortonormali} \end{array}$$

(ii) $\text{Span}(\{e_n\})$ è denso in H
 $\uparrow$ comb. lin. FINITE

Teorema 1 Sia H uno sp. di Hilbert di dim. infinita. Supponiamo che H sia separabile (esiste sottoinsieme denso numerabile). Allora esiste una base Hilbertiana.

Teorema 2 Sia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base Hilbertiana in uno sp. di Hilbert H (che a quel punto è separabile). Per ogni $x \in H$, poniamo

$$x_k := \langle x, e_k \rangle \quad (k\text{-esima comp. di } x \text{ rispetto alla base})$$

Allora

$$x = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n}_{\text{serie di vettori}}$$

$$\|x\|^2 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2}_{\text{serie di numeri}}$$

Se $y \in H$ ha comp. y_n , allora $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$.

Brutalmente: uno sp. di Hilbert separabile è " $\mathbb{R}^\infty$ ".

Achtung! Una base Hilbertiana NON è una base algebrica

Dim. Teo. 1) Sia $D \subseteq H$ il denso numerabile

$$D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$$

Step 1) Esiste sottosucc. $\{d_{n_k}\}$ con la proprietà che

$\text{Span} \{d_{n_1}, d_{n_2}, \dots, d_{n_k}\}$ ha dim k e coincide con

$$\text{Span} \{d_1, d_2, \dots, d_{n_k}\}$$

Osservo che $\text{Span} \{d_1, d_2, d_3, \dots\} = \text{Span} \{d_{n_1}, d_{n_2}, \dots\}$
e quindi è denso

Step 2) Applico Gram-Smidt a $\{d_{n_1}, d_{n_2}, \dots\}$
ottenendo così un sottoinsieme ortonormale.

Nomenclatura Sono sinonimi

"Base Hilbertiana"

"Sistema ortonormale completo"

Oss. La base Hilbertiana costruita dal teo. 1 vive
nello span del denso numerabile D .

Lemma 0 (Continuità (forte) di norma e prod. scalare)

Se $x_n \rightarrow x_\infty$ e $y_n \rightarrow y_\infty$, allora

$$\|x_n\| \rightarrow \|x_\infty\| \quad \text{e} \quad \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_\infty, y_\infty \rangle$$

Lemma 1 (Caratterizzazione serie Hilbertiane conv.)

Sia $\{e_n\}$ base Hilb. in H . Sia $\{a_n\}$ una succ. di numeri.

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \text{ conv.} \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \text{ conv.},$$

Lemma 2 (Proprietà somma della serie)

Sia $\{e_n\}$ base Hilb. in H . Sia $\{a_n\}$ una succ. tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$

Consideriamo $v := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ (che sappiamo conv.)

Allora

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

$$\langle v, e_n \rangle = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lemma 3 (Caratterizzazione del vettore nullo)

Sia $\{e_n\}$ base Hilb. in H . Sia $v \in H$ tale che

$$\langle v, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora $v = 0$.

Dim. Lemma 0

- Continuità della norma: segue dalla triangolare

$$| \|x_\infty\| - \|x_n\| | \leq \|x_\infty - x_n\| \quad (\text{dimostrarlo!})$$

- Continuità del prod. scalare

$$| \langle x_\infty, y_\infty \rangle - \langle x_n, y_n \rangle | \leq | \langle x_\infty, y_\infty \rangle - \langle x_n, y_\infty \rangle |$$

$$+ | \langle x_n, y_\infty \rangle - \langle x_n, y_n \rangle |$$

$$\begin{array}{c} \text{c.s.} \nearrow \leq \underbrace{\|x_\infty - x_n\|}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\|y_\infty\|}_{\downarrow \text{numero}} + \underbrace{\|x_n\|}_{\downarrow \text{limitato}} \cdot \underbrace{\|y_\infty - y_n\|}_{\downarrow 0} \\ \text{(le succ. conv. lo sono)} \end{array}$$

— 0 — 0 —

Dim. Lemma 1

$$S_m := \sum_{k=0}^m a_k e_k$$

$$\hat{S}_m := \sum_{k=0}^m a_k^2$$

Per ogni $m > n$ vale

$$\|S_m - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m a_k e_k \right\|^2$$

$$\begin{array}{l} \text{geometria} \nearrow \\ \text{1} \end{array} = \sum_{k=n+1}^m a_k^2 = \hat{S}_m - \hat{S}_n$$

Questo ci dice che $\{S_n\}$ è di Cauchy in H se e solo se

$\{\hat{S}_n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.

Conclusioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \text{ conv. in } H \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ è di C. in } H$$

$$\Leftrightarrow \{\hat{S}_n\} \text{ è di C. in } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \text{ converge}$$

— o — o —

Oss. Non ho usato ancora lo Span denso

Dim. Lemma 2

$$v := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$$

Pongo $v_n := \sum_{k=0}^n a_k e_k$ e per def. $v_n \rightarrow v$

Ma allora $\|v_n\| \rightarrow \|v\|$ e

$$\|v_n\|^2 = \sum_{k=0}^n a_k^2 \quad (\text{geometria 1})$$

Per ogni k fisso $\langle v_n, e_k \rangle \rightarrow \langle v, e_k \rangle$

n

a_k non appena $n \geq k$

— o — o —

Continuo a non usare la densità ...

Dim. Lemma 3

Dall'ipotesi segue che $\langle v, w \rangle = 0$
per ogni $w \in \text{Span}(\{e_n\})$.

Voglio dim. che $\forall \varepsilon > 0$ vale $\|v\|^2 \leq \varepsilon$. Uso finalmente la densità.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $w_\varepsilon \in \text{Span}(\{e_n\})$ t.c. $\|v - w_\varepsilon\|^2 \leq \varepsilon$

Ma allora

$$\varepsilon \geq \|v - w_\varepsilon\|^2 = \|v\|^2 + \|w_\varepsilon\|^2 - 2 \underbrace{\langle v, w_\varepsilon \rangle}_0 \geq \|v\|^2 \quad \text{☺}$$

— o — o —