

$$F(u) = \int_a^b F(x, u, \dot{u}) dx$$

Variazione esterna / verticale : data $v \in C_c^\infty((a,b))$ si considera

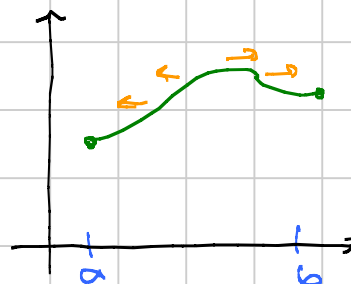
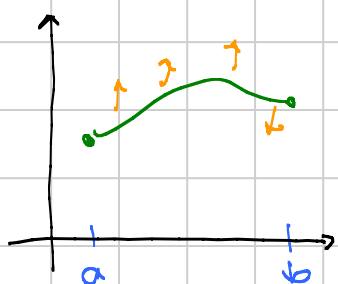
$$\varphi(t) := F(u + tv)$$

Variazione interna / orizzontale : data $v \in C_c^\infty((a,b))$ si considera

$$\varphi(t) := F(u(x + tv(x)))$$

$\in [a,b]$ se $x \in [a,b]$ e $|t|$ è abbastanza piccolo

qui è fondamentale il supporto compatto di v



Poi si procede analogamente calcolando $\varphi'(0)$ (fare per esercizio con la variazione orizz.)

$$\varphi(t) = \int_a^b L(x, u(x + tv(x)), \dot{u}(x + tv(x))(1 + t\dot{v}(x))) dx$$

Oss. Ci sono molti problemi in cui la variazione verticale non ha senso. Due esempi

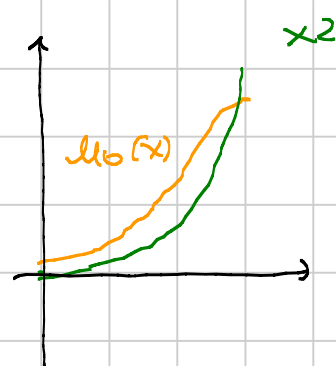
→ pbm. in cui le u sono a valori in una varietà

→ pbm. in cui l'incognita è un insieme

— o — o —

Esempio 1

$$\min \left\{ \int_0^1 \underbrace{[\ddot{u}^2 + (u - x^2)^2]}_{L(x, \dot{u}, p)} dx \right\}$$



$$(ELE) \quad (L_p)' = L_s$$

$$(2\ddot{u})' = 2(u - x^2)$$
$$\ddot{u} = u - x^2$$

Quindi devo risolvere

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - x^2 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

NBC

NBC

risolvo

$$u(x) = a \cos Rx + b \sin Rx + x^2 + 2$$

con le NBC trovo a e b in modo unico (va verificato)

la $u_0(x)$ risultante è l'unico pto di minimo per la stretta convessità

Anche senza risolvere, si può dimostrare che gli eventuali punti di minimo verificano

$$0 \leq u(x) \leq 1$$

max e min di x^2

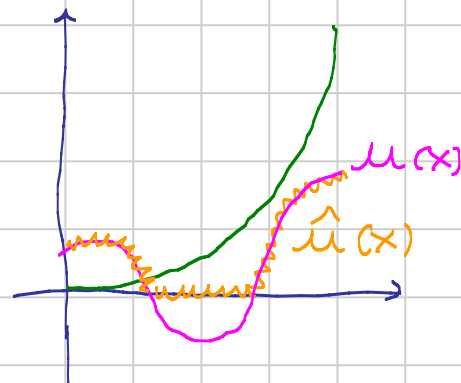
ARGOMENTO DI TRONCAMENTO

Supponiamo che $u(x_0) < 0$ per un qualche x_0

Idea: se trovo a o migliori.

Piccola cautela: la funzione

$$\max\{u(x), 0\}$$



può essere esibibile anche se $u \in C^\infty$ (potrebbe non essere nemmeno C^1 a tratti)

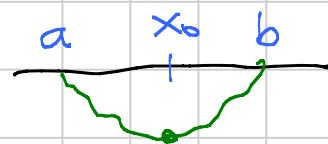
Via d'uscita: definisco

$$a := \sup \{x \in [0, x_0] : u(x) \geq 0\}$$

$$b := \inf \{x \in [x_0, 1] : u(x) \geq 0\}$$

e pongo

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a, b] \\ u(x) & \text{se } x \in [0, a] \cup [b, 1] \end{cases}$$



Questa davvero è C^1 a tratti e si verifica facilmente che

$$F(\hat{u}) < F(u)$$

↑ ho risparmiato su entrambi i
termini in $[a, b]$ perché in $[a, b]$
abbiamo che $\hat{u} = 0$ mentre $u \leq 0$

Per il solito lemma di approx esiste $\tilde{u}$ tale che $F(\tilde{u}) < F(u)$
e $\tilde{u} \in C^1$.

— o — o —

L'argomento di troncamento è anche suggerito da EGE

$$\ddot{u} = u - x^2$$

Se fosse $u(x_0) < 0$ da qualche parte, sarebbe min $u < 0$

Sia y_0 il p.to di min., allora

$$\ddot{u}(y_0) = u(y_0) - y_0^2 < 0$$

$< 0 \quad \leq 0$

il che è assurdo.

Questo funziona se il p.to di minimo sta in $(0, 1)$.

Può essere al bordo? Sappiamo che al bordo la derivata
è nulla, quindi niente di male. A quel p.to il segno
in un intorno è deciso dalla derivata 2^a.

— o — o —

Esempio 2 $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 + [u - x^2]^2 : u\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \right\}$

↑
valore assegnato in p.to interno

Idea: spezzare in 2 problemi $\int_0^{1/2} \dots + \int_{1/2}^1 \dots$

e minimizzo separatamente con DBC $u\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.

In ogni tratto nasce NBC nell'altro estremo e trovo soluzione unica (verificare!).

Ci sono 2 casi

- se le sol. dx/sx si ricollano C^1 in $\frac{1}{2}$, allora il pbm. originario ha sol. unica in C^1
- se non si ricollano C^1 , allora il pbm. originario non ha minimo in C^1 , ma ha minimo in C^1 a tratti e questo min. è l'inf. in C^1 .

Esempio 3 $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 + [u - x^2] : u(0) = 7, \tilde{u}(0) = 8 \right\}$

Se faccio il metodo indiretto, nasce comunque la NBC $\tilde{u}(1) = 0$, per cui mi ritrovo 3 soluzioni.

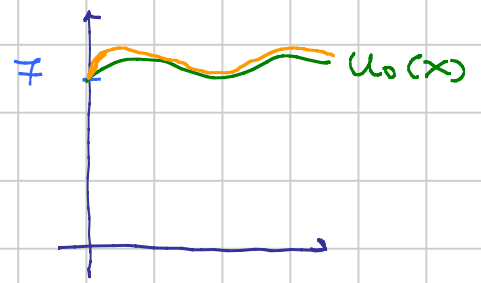
Risolve $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 + [u - x^2] : u(0) = 7 \right\}$

$$\dots \begin{cases} \ddot{u} = u - x^2 \\ u(0) = 7 \\ \tilde{u}(1) = 0 \end{cases} \quad \leadsto \text{sol. unica } u_0(x)$$

Ci sono 2 casi

- se per puro caso $\tilde{u}_0(0) = 8$, allora pbm. originario ha sol. in C^1
- se $\tilde{u}_0(0) \neq 8$, allora il pbm. or. non ha sol. in C^1 e l'inf. è $F(u_0)$

Con un piccolo racconchiuto
possiamo appross $u_0(x)$ con
funzioni $u_n(x)$ con $\dot{u}_n(0) = 8$
e: $F(u_n) \rightarrow F(u_0)$



MORALE Se la lagrangiana contiene solo derivate di
ordine 1, non ha senso mettere condizioni
su u che coinvolgono $\ddot{u}$ o derivate di
ordine superiore.

Esempio 4 $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 dx : u(0) = 7, \int_0^1 u(x) dx = 9 \right\}$

$$V = \left\{ v \in C^1 : v(0) = 0 \text{ e } \int_0^1 v(x) dx = 0 \right\}$$

$$\begin{aligned} \delta F(u, v) &= 2 \int_0^1 \dot{u} \dot{v} dx \quad \forall v \in V \\ &= -2 \int_0^1 \ddot{u} v + \text{termini di bordo} \end{aligned}$$

Uso v nulle al bordo e ottengo per il lemma DBR

$$\begin{cases} \ddot{u} = \lambda \\ u(0) = 7 \\ \dot{u}(1) = 0 \\ \int_0^1 u(x) dx = 9 \end{cases}$$

— o — o —