

- Tecniche di minimalità
- Variazione interna / orizzontale
- Ambientazione del pbm.
- Argomenti di troncamento $\leadsto$ principio del max

Tecniche per dimostrare che un certo x_0 è p.to di min.

- Procedendo per cond. necessarie trovo candidati p.ti di min.
- Provo a dim in 2 modi
 - via convessità
 - via funz. ausiliario

Def. Sia X affine con sp. vett. associato V . Una $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow F(x+tv) \in \mathbb{R}$$

è convessa $\forall x \in X$ e $\forall v \in V$,

(La convessità si testa sulle rette)

Strett. conv. se $F(x+tv)$ è strett. conv. per $v \neq 0$.

Teorema (Minimalità via convessità)

X, V, F come sopra. Supponiamo che

(i) F convessa

(ii) $x_0 \in X$ soddisfa $\delta F(x_0, v) = 0$ per ogni $v \in V$.

Allora x_0 è p.to di min. glob. (unico se F è strett. conv.)

Dim Per ogni competitor x vale

$$F(x) = F(x_0 + (x - x_0)) \geq F(x_0)$$

C'è sotto: pongo $\varphi(t) := F(x_0 + t\sigma)$ con $\sigma = x - x_0 \in V$
e osservo che

$$F(x_0 + (x - x_0)) = \varphi(1) \geq \varphi(0) + (1-0)\varphi'(0) = \varphi(0) = F(x_0)$$

— 0 — 0 —

Teorema (Minimalità via funz. ausiliario)

Sia S un insieme, $F: S \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in S$.

Supponiamo che esista $G: S \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) $F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in S$

(ii) $G(x) \geq G(x_0) \quad \forall x \in S$ (x_0 è p.to di min. per G)

(iii) $F(x_0) = G(x_0)$

Allora x_0 è p.to di min. gl. per F

Dim Per ogni $x \in S$ vale

$$F(x) \geq G(x) \geq G(x_0) = F(x_0).$$

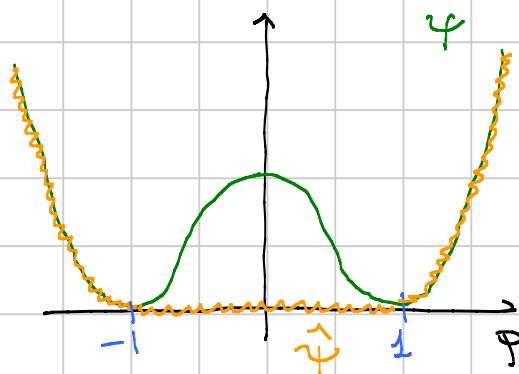
$\uparrow$ (i) $\uparrow$ (ii) $\uparrow$ (iii)
 — 0 — 0 —

Esempio 1 Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il doppio pozzo

$$\psi(p) := (p^2 - 1)^2$$

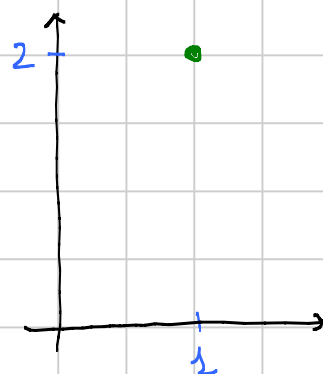
$$\min \left\{ \int_0^1 \psi(u) dx : u \in C^1, u(0)=0, u(1)=2 \right\}$$

$\underbrace{\int_0^1 \psi(u) dx}_{F(u)}$



Congettura: $u_0(x) = 2x$ è l'unico p.to di min.

Non posso usare la convessità perché $F(u)$ NON è convesso



Considero $G(u) := \int_0^1 \hat{\psi}(\ddot{u}) dx$ dove $\hat{\psi}$ è la "convessificata" di ψ

Verifichiamo le 3 ipotesi

- (i) $F(u) \geq G(u)$ (ovvio perché $\psi \geq \hat{\psi}$)
- (ii) $u_0(x)$ è p.to di min per $G(u)$ (vero perché $\hat{\psi}$ è convessa, dunque G è convesso)
- (iii) $F(u_0) = G(u_0)$ (vero perché $\psi(2) = \hat{\psi}(2)$
 $\uparrow$ coeff. angolare

Si verifica anche che $u_0(x) = 2x$ è l'unico p.to di min. di $F(u)$.

Basta osservare che $G(u) > G(u_0)$ quando $u \neq u_0$ cosa che segue dalla disuguaglianza

$$\hat{\psi}(2+a) > \underbrace{\hat{\psi}(2)}_0 + \underbrace{\hat{\psi}'(2)}_0 \underbrace{a}_0 \quad \forall a \neq 0$$

Esempio 2 $\min \{F(u) : u \in C^1, u(0)=0, u(1)=0\}$

Cond. iniziale: $u_0(x) \equiv 0$ è p.to di min., magari non unico

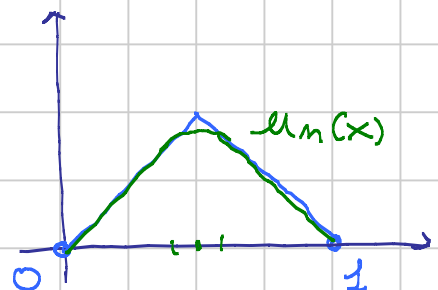
FALSA !! Il minimo non esiste e $\inf = 0$.

Se dimostro che $\inf = 0$, allora per forza min N.E.

(Dovrebbe essere $\equiv 0$, ma allora $\psi(\ddot{u}(x)) \equiv 0$, ma allora $\ddot{u}(x) \in \{\pm 1\}$, il che è incompatibile con DBC)

Poiché $F(u) \geq 0$ sempre, basta trovare un t.c. $F(u_n) \rightarrow 0$

Basta fare un piccolo raccordo in $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ ed il gioco è fatto



Esempio 3 $\psi(p) = (p^2 - 1)^2$

$$\psi'(p) = 2(p^2 - 1) \cdot 2p = 4(p^3 - p)$$

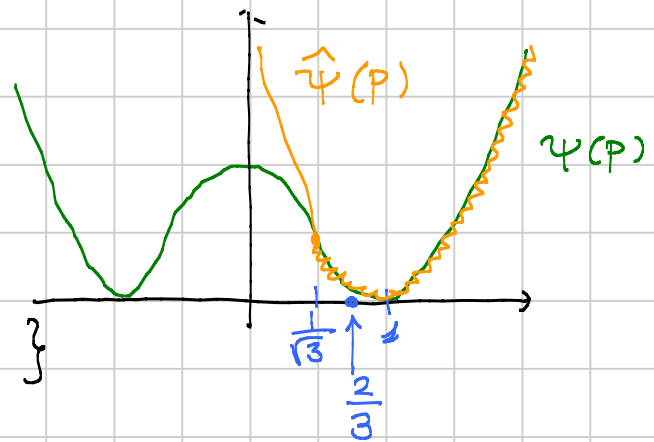
$$\psi''(p) = 4(3p^2 - 1)$$

I p.ti di flesso sono $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1$$

$$u(0) = 0, u(1) = \frac{2}{3}$$

$$\dot{u}(x) \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ovunque} \}$$



N.B. L'insieme $\mathbb{X}$ non è più uno spazio affine

Cons. La retta è l'unico p.to di minimo

Dim Costruisco $G(u) := \int_0^1 \hat{\psi}(u) dx$ con $\hat{\psi}(p)$

CONVESSA che coincide con $\psi(p)$ per $p \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Le 3 verifiche sono ovvie.

(i) $F(u) \geq G(u)$ per ogni $u \in \mathbb{X}$ (vale pure =)

(ii) $G(u) \geq G(\text{retta})$ per ogni $u \in \mathbb{X}$ (vale addirittura senza considerare il vincolo)

(iii) $F(\text{retta}) = G(\text{retta})$.

— o — o —

Osservazione Per i classici funzionali integrali

$$F(u) = \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

anche con integrali multipli o con derivate di ordine superiore, la convessità di F segue dalla convessità della funzione

$$(s, p) \rightarrow L(x, s, p) \quad \forall x \in (a, b) \quad (2)$$

SPAZI DI AMBIENTAZIONE

$$\min \left\{ \int_a^b \dot{u}^2 + \sin(u) : u(a) = 0, u(b) = 7 \right\}$$

Dove prendo u ?

- Ambientazione classica: $u \in C^1$
- " ristretta: $u \in C^\infty$
- " creativa: $u \in C^{2018}$
- " più inclusiva: $u \in C^1$ a tratti (continua e C^1 in un numero finito di tratti)

Tra qualche lezione: $u \in H^1$.

MORALE: se la Lagrangiana è decente, non cambia praticamente nulla.

Teorema Sia $L(x, s, p)$ continua nelle 3 variabili.

Allora l'inf è lo stesso in tutte le classi (da C^1 a tratti fino a C^∞). Più avanti sarà vero pure in H^1 .

Lemma di approssimazione (versione classica)

Sia $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 a tratti, e sia $S \subseteq [a, b]$ l'insieme dei p.ti in cui u è discontinua.

Allora esiste $\{u_m\} \subseteq C^\infty([a, b])$ tale che

$$\begin{aligned} (i) \quad u_m(x) &\rightarrow u(x) && \text{unif. su } [a, b] \\ \dot{u}_m(x) &\rightarrow \dot{u}(x) && \text{unif. sui cpt. contenuti in } [a, b] \setminus S \end{aligned}$$

$$(ii) \quad |u_m(x)| + |\dot{u}_m(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad \text{volendo possiamo anche imporre } u_m(a) = u(a) \\ u_m(b) = u(b)$$

→ Il Lemma di approx si dimostra in 1000 modi
(volendo basta approx φ con funzioni C^∞ e fare
la primitiva)

→ Dato il Lemma, per il teorema basta osservare che
se $u_n \rightarrow u$ come nel Lemma, allora

$$F(u_n) \rightarrow F(u)$$

(qui si usa la continuità di $L(x, s, p)$)

[Provare a dim. tutto ciò usando solo analisi 1+2].