

Funzionali integrali con integrali multipli

$$F(u) = \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $L: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 $L(x, s, p_1, \dots, p_d)$

Oss. Più variabili in partenza, 1 sola in arrivo
 (il caso "vettoriale", cioè con più variabili anche in arrivo, presenta vari problemi)

Ripassino di Analisi 2: Gauss - Green

Ingredienti: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ "abbastanza regolare"

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad "$$

$$E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \quad "$$

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} E dx = \int_{\partial\Omega} f \langle E, n \rangle d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, E \rangle dx$$

$\nearrow$ normale esterna ad Ω $\nearrow$ integrale sul bordo

Esempio classico: funzionale di Dirichlet

$$F(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

DBC: assegnare i valori di $u(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

$$\varphi(t) := F(u+tv) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u + t \nabla v|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} t^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + t \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx$$

$$\delta F(u, v) = \varphi'(0) = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx$$

1ª formula
integrale

Ora uso GG con $v(x) \rightsquigarrow f(x)$, $\nabla u(x) \rightsquigarrow E$

$$\delta F(u, v) = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u(x)) \cdot v(x) dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} v(x) \langle \nabla u(x), n \rangle d\sigma$$

"0 quando uso v che sono nulle in $\partial\Omega$

$$= - \int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot v(x) dx + \text{eventuale bordo}$$

2ª formula integrale

Supponendo che u sia DLM rispetto a tutte le $v \in C_c^\infty(\Omega)$ posso usare FLCV e otteniamo

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 \\ + BC \end{cases}$$

— o — o —

In generale se partiamo da

$$F(u) = \int_{\Omega} L(x, u, \nabla u)$$

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} L(x, u+tv, \nabla u+t\nabla v)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_{\Omega} L_s(x, u+tv, \nabla u+t\nabla v) v \\ &\quad + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d L_{p_i}(x, u+tv, \nabla u+t\nabla v) v_{x_i} \end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) = \int_{\Omega} L_s(x, u, \nabla u) v + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} L_{p_i}(x, u, \nabla u) v_{x_i}$$

$$= \int_{\Omega} L_s(x, u, \nabla u) v + \langle \nabla_p L(x, u, \nabla u), \nabla v \rangle$$

Se e quando posso integrare per parti ottengo

$$\begin{aligned} \delta F(u, v) &= \int_{\Omega} \{ L_s(x, u, \nabla u) - \operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) \} v \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla_p L(x, u, \nabla u), n \rangle d\sigma \end{aligned}$$

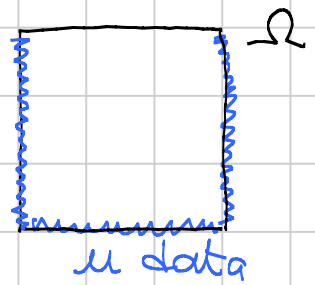
Se u è DLM risp. a tutte le $v \in C_c^\infty(\Omega)$ ottengo

$$\operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) = L_s(x, u, \nabla u)$$

ELE
Differenziale

Se non ho DBC, cosa nasce "on the road"

Mettiamo di avere funzionale di Dirichlet sul quadrato con dato assegnato solo su 3 lati



Come sempre arrivo alla 2^a forma integr.

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} v(x) \langle \nabla u(x), n \rangle d\sigma = 0$$

Fase 1: uso $v \in C_c^\infty(\Omega) \rightsquigarrow \Delta u(x) \equiv 0$

Fase 2: so che il 1^o termine è nullo e uso delle funzioni v che non si annullano sul 4^o lato

Otengo una specie di FLCV sul quarto lato, da cui deduco che

$$\langle \nabla u(x), n \rangle \equiv 0 \quad \text{sul 4^o lato}$$

In generale questo è

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \quad \text{sul 4^o lato}$$

↑
derivata nella direzione
normale al bordo

Idea: dove non ho posto le DBC ottengo NBC del tipo $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Ponendo nel funzionale generale trovo

$$\langle \nabla_p L(x, u(x), \nabla u(x)), n \rangle = 0 \quad \text{sui pezzi opportuni di } \partial\Omega$$

Tutti i discorsi di conversità si riciclano.

Esempio Ω = palla o quashato in $\mathbb{R}^2$

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} |u(x) - f(x)|^2 dx$$

dove $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione data.

Voglio $\min \{ F(u) : u \in C^1(\Omega) \}$

Brutalmente: cerco $u(x)$ che sia "vicina ad $f(x)$ " ma non oscilli troppo.

$$\operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) = L_s$$

$$\Delta u(x) = u(x) - f(x)$$

ELE differenziale

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$$

$$\forall x \in \partial\Omega$$

NBC on the road

Supponiamo di essere in grado di risolvere ELE + NBC e sia $u_0(x)$ la soluzione.

Dico che $u_0(x)$ è l'unico p.to di min.

Sia w un altro competitore. Lo scrivo come $w = u_0 + v$ e faccio il solito conto

$$F(u_0 + v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0 + \nabla v|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_0 + v - f)^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_0 - f)^2 \rightsquigarrow F(u_0)$$

$$+ \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle + \int_{\Omega} (u_0 - f) v \rightsquigarrow \delta F(u_0, v) = 0$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 \geq 0$$

Quindi $F(u_0+v) \geq F(u_0)$ con $=$ se e solo se $v \equiv 0$.
— 0 — 0 —

ELE con derivate superiori

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u})$$

$$F(u+tv) = \int_a^b L(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}, \ddot{u}+t\ddot{v})$$

$$\delta F(u, v) = \int_a^b L_S(\dots) v + L_{P_1}(\dots) \dot{v} + L_{P_2}(\dots) \ddot{v}$$

$$= \int_a^b L_S(\dots) v - [L_{P_1}(\dots)]' v + [L_{P_2}(\dots)]'' v$$

+ eventuale bordo

... solito FLCV ... e concludo

Se avessimo derivate fino ordine k ...

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \frac{d^i}{dx^i} L_{P_i}(x, u, \dot{u}, \dots) = L_S(x, u, \dot{u}, \dots)$$

— 0 — 0 —