

Eq. di EULERO - LAGRANGE in varie forme

→ Forma "classica"

→ Forma DBR

→ Forma ERDMANN

Setting: funzionali integrali in dim 1

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

dove

$$L: [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

x s p

$$L(x, s, p)$$

$\uparrow$ Lagrangiana

Calcoliamo la variazione prima

$$\varphi(t) := F(u + tv) = \int_a^b L(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v}) dx$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_a^b \frac{d}{dt} L(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v}) dx \\ &= \int_a^b \{ L_s(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v}) v + L_p(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v}) \dot{v} \} dx \end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) = \varphi'(0) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) v + L_p(x, u, \dot{u}) \dot{v} \} dx$$

1^a forma integrale della variazione prima

Ipotesi sufficienti: $\rightarrow L_s$ e $L_p \in C^0$ dove definiti
 $\rightarrow u$ e $v \in C^1$

Sotto ulteriori hp di regolarità integro per parti il 2° pezzo:

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ L_s(\dots) v - (L_p(x, u, \dot{u}))' v \} dx + [L_p(\dots) v]_a^b$$

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) - (L_p(x, u, \dot{u}))' \} v dx$$

$$+ [L_p(x, u, \dot{u}) v]_a^b$$

2ª forma integrale

Ipotesi suff.: $\rightarrow L_p(x, u(x), \dot{u}(x)) \in C^1$
(ad esempio ok se $L_p \in C^1$ e $u \in C^2$)

Supponiamo che u sia p.to di minimo per $F(u)$. Allora
 $\delta F(u, v) = 0$ per ogni v ammissibile

Oss. Minimo in che senso?

$\rightarrow$ GM (global minimum), cioè min. assoluto è ok

$\rightarrow$ ma basta DLM (directional loc. min.), cioè

$t=0$ è p.to di min. locale per $t \rightarrow F(u+tv)$
— 0 — 0 —

Supponiamo che stiamo cercando il min di $F(u)$ tra tutte le $u \in C^1$ che verificano DBC $u(a)=A$ e $u(b)=B$ allora se abbiamo suff. regolarità ogni DLM verifica

$$(L_p(x, u, \dot{u}))' = L_s(x, u, \dot{u})$$

ELE in forma diff.

Questa vale tutte le volte che posso usare una classe di v per cui vale FLCV e nulle al bordo.

Riscrivo l'eq. esplicitando LHS (left hand side)

$$L_{px}(x, u, \dot{u}) + L_{ps}(x, u, \dot{u}) \dot{u} + L_{pp}(x, u, \dot{u}) \ddot{u} = L_s(x, u, \dot{u})$$

In particolare: se $L \in C^2$ e $u \in C^2$ è DLM, allora vale $\uparrow$

Qss Se so per qualche motivo che $L_{pp} > 0$ (cioè L strett. conv. nella variabile p), allora l'eq. la posso mettere in forma normale.

Se in un estremo non ho DBC, allora posso usare v non nulle e procedendo in 2 fasi (vedi les. 4) nasce "on the road" la NBC

$$L_p(x, u, \dot{u}) = 0 \quad \text{nell'estremo in questione}$$

— o — o —

ELE in forma DBR

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) v + L_p(x, u, \dot{u}) \dot{v} \} dx$$

Idea: far diventare il 1° termine $\dot{v}$

Pongo $\hat{L}(x) := \int_a^x L_s(y, u(y), \dot{u}(y)) dy$ e per parti,

supponendo di usare v nulle al bordo, ritrovo

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ -\hat{L}(x) + L_p(x, u, \dot{u}) \} \dot{v} dx$$

Supponiamo ora che u sia DLM rispetto a tutte le $v \in C_c^\infty(a, b)$. Allora dal lemma DBR deduco

$$L_p(x, u, \dot{u}) = \hat{L}(x) + \text{costante}$$

oppure più dettagliatamente

$$L_p(x, u(x), \dot{u}(x)) = c + \int_a^x L_s(y, u(y), \dot{u}(y)) dy$$

ELE in
forma
DBR

Oss. Se ho abbastanza reg., questa si ottiene anche integrando da classica

- Si tratta di equ. di ordine 1, ma con una costante dentro
- u è presente anche dentro un integrale
 $\quad \quad \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$

ELE in forma ERDMANN

Supponiamo che $L(x, s, p)$ **NON** dipenda da x

ELE classica è $[L_p(u, \dot{u})]' = L_s(u, \dot{u})$

Moltiplico per $\ddot{u}$ a dx e sx :

$$\ddot{u} [L_p(u, \dot{u})]' = L_s(u, \dot{u}) \ddot{u}$$

$$[\ddot{u} L_p(u, \dot{u})]' - \ddot{u} L_p(u, \dot{u}) = L_s(u, \dot{u}) \ddot{u}$$

Aggiustando i termini

$$[\ddot{u} L_p(u, \dot{u})]' = L_s(u, \dot{u}) \ddot{u} + L_p(u, \dot{u}) \ddot{u} = [L(u, \dot{u})]'$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\tilde{u} L_p(u, \tilde{u}) = c + L(u, \tilde{u})$$

ELE in forma
Erdmann

Oss 1 Questa è eq. diff. di ordine 1 con una costante arbitraria.

Oss 2 Occhio che ELE classica NON è equiv. a ELE-ERD.

→ u risolve classica $\Rightarrow$ u risolve Erdmann

→ il viceversa vale solo per gli $x \in [a, b]$ t.c. $\tilde{u}(x) \neq 0$.

MINIMALITÀ VIA CONVESSITÀ

Supponiamo di essere interessati al minimo di $F(u)$ con DBC (ma il discorso vale più in generale).

Supponiamo che $u_0(x)$ risolva ELE classica con DBC

Supponiamo che $L(x, s, p)$ sia convessa nelle variabili (s, p) per ogni $x \in [a, b]$.

Allora $u_0(x)$ è p.to di minimo (unico se la conv. è stretta).

Dim Per analisi 2 vale

$$\begin{aligned} L(x, s_0 + s_1, p_0 + p_1) &\geq L(x, s_0, p_0) \\ &\quad + s_1 L_s(x, s_0, p_0) \\ &\quad + p_1 L_p(x, s_0, p_0) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} L(x, s_0 + s_1, p_0 + p_1) &\geq L(x, s_0, p_0) \\ &\quad + s_1 L_s(x, s_0, p_0) \\ &\quad + p_1 L_p(x, s_0, p_0) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{funzioni conv.} \\ \text{stanno sopra} \\ \text{piano tang.} \end{array}$$

per ogni valore ammissibile delle variabili.

Ma allora

$$\begin{aligned}
 F(w) &= F(u_0 + v) = \int_a^b L(x, u_0 + v, \dot{u}_0 + \dot{v}) dx \\
 &\quad \text{nulla al} \uparrow \text{ bordo} \\
 &\geq \int_a^b L(x, u_0, \dot{u}_0) dx \\
 &\quad + \underbrace{\int_a^b \{ L_s(x, u_0, \dot{u}_0) v + L_p(x, u_0, \dot{u}_0) \dot{v} \} dx}_{= \delta F(u_0, v) = 0} \\
 &\geq F(u_0) \quad \text{😊}
 \end{aligned}$$

Se ho convessità stretta, ho disug. stretta appena $v(x) \neq 0$
oppure $\dot{v}(x) \neq 0$ da qualche parte.

Oss. Volendo si può risparmiare sulla strettezza della convessità. Basta rispetto alla variabile p .