

Nascita delle condizioni al bordo

$$F(u) := \frac{1}{2} \int [\dot{u}^2 + u^2] dx$$

Esempio 1 $\min \{ F(u) : u \in C^1([0,2]) : u(0)=3, u(2)=7 \}$

$$\begin{aligned} F(u+tv) &= \frac{1}{2} \int (\dot{u} + t\dot{v})^2 + (u+tv)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (\dot{u}^2 + u^2) + t \int_0^2 \dot{u}\dot{v} + uv + \frac{t^2}{2} \int_0^2 \dot{v}^2 + v^2 \end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) = \int_0^2 [\dot{u}(x) \dot{v}(x) + u(x) v(x)] dx$$

per ogni $v \in C^1([0,2])$ t.c. $v(0)=v(2)=0 \rightsquigarrow V$

ELE 1^a forma int. $\int_0^2 (\dot{u}\dot{v} + uv) dx = 0 \quad \forall v \in V$

ELE 2^a forma int. $\int_0^2 (-\ddot{u}v + uv) dx = 0 \quad \forall v \in V$

$$\int_0^2 (-\ddot{u} + u) v dx = 0 \quad \forall v \in V$$

FLCV $\Rightarrow -\ddot{u}(x) + u(x) \equiv 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u \\ u(0) &= 3 \\ u(2) &= 7 \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto eq. diff. di ordine 2 con 2 condizioni al bordo. La soluz. generale di $\ddot{u}=u$ dipende da 2 parametri e con due cond. c'è ragionevole speranza di determinarli univocamente.

Achtung! Non è un p.m. di Cauchy, quindi NON ci sono teoremi di esistenza ed unicità.
Può succedere di tutto

Esempio $\ddot{u} = -u$
 $u(0) = 0$ $\leadsto u(t) = a \sin x$ è sol. $\forall a$
 $u(\pi) = 0$

$\ddot{u} = -u$ $\leadsto$ NON esistenza
 $u(0) = 0$
 $u(\pi) = 1$ (le sol. dell'eq. sono comb. lin. di $\sin x$ e $\cos x$)

Nell'esempio di sopra si verifica che c'è esistenza ed unicità, e l'unica sol. è l'unico p.to di min.

$$F(u) = F(u_0 + v) = \dots$$

Esempio 2 $\min \{ F(u) : u \in C^1([0,2]) \quad u(0) = 3 \}$

Ora $V = \{ v \in C^1([0,2]) : v(0) = 0 \}$

Come prima arrivo a $\int_0^2 (\dot{u} \dot{v} + u v) dx = 0 \quad \forall v \in V$

Quando integro per parti

$$\left[\underset{\text{"}}{\dot{u}(x) v(x)} \right]_0^2 + \int_0^2 (-\ddot{u} + u) v dx \quad \forall v \in V$$

$\dot{u}(2) v(2)$

Quindi la 2ª forma integrale è

$$\dot{u}(2) v(2) + \int_0^2 (-\ddot{u} + u) v = 0 \quad \forall v \in V$$

Due fasi

- Fase 1: mi limito a considerare le $\forall$ t.c. $v(0) = v(2) = 0$
Non ho il termine di bordo e come prima deduco che

$$\ddot{u} = u$$

- Fase 2 Ora che so che $\ddot{u} = u$, la 2ª forma int. diventa

$$\ddot{u}(2)v(2) = 0$$

$$\forall v \in V$$

Nella classe V trovo $v(x)$ t.c. $v(2) = 1$ e quindi per forza $\ddot{u}(2) = 0$.

Quindi $u(x)$ risolve

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ u(0) = 3 \\ \ddot{u}(2) = 0 \end{cases}$$

Eq. diff.

DBC

NBC on the road

DBC: Dirichlet Boundary Condition (prescrivere u al bordo)

NBC: NEUMANN " " (" $\ddot{u}$ al bordo)

Si verifica con i soliti metodi che la sol. è unica ed è p.to di min.

Esempio 3 $\min \{ F(u) : u \in C^1([0,2]) \}$

Idea: nascono le Neumann

2ª forma di ELE ...

$$\ddot{u}(2)v(2) - \ddot{u}(0)v(0) + \int_0^2 [-\ddot{u} + u]v = 0 \quad \forall v \in V = C^1([0,2])$$

1^a fase : uso v nulle al bordo e trovo $\ddot{u} = u$

2^a fase : uso v con $v(0)=0$ e $v(2)=1 \rightsquigarrow \dot{u}(2)=0$
" " " $v(0)=1$ e $v(2)=0 \rightsquigarrow \dot{u}(0)=0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(2) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{NBC} \\ \text{NBC} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(2) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{array}} \right\} \text{ on the road}$$

Esempio 4 $\min \{ F(u) : u \in C^1(\dots), u(0) = u(2) \}$

Ora $V = \{ v \in C^1(\dots) : v(0) = v(2) \}$

ELE 2^a forma diventa

$$\dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0) + \int_0^2 [-\ddot{u} + u]v \, dx = 0 \quad \forall v \in V$$

1^a fase $\rightsquigarrow \ddot{u} = u$

2^a fase $\rightsquigarrow$ prendo $v \in V$ t.c. $v(2) = v(0) = 1$ e trovo
 $\dot{u}(2) = \dot{u}(0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} = u \\ u(0) = u(2) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2) \end{array} \right. \left. \vphantom{\begin{array}{l} \ddot{u} = u \\ u(0) = u(2) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{(PBC)} \\ \uparrow \text{Periodic} \end{array}$$

(Se ripeto la u per periodicità, me la ritrovo C^1)

— o — o —

Esempio 5

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} \ddot{u}^2 - 7\ddot{u} + \frac{1}{2}u^2$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^2([0,1]), u(0) = 5 \}$$

$$\begin{aligned} F(u+tv) &= \int_0^1 \frac{1}{2} \ddot{u}^2 - 7\ddot{u} + \frac{1}{2}u^2 \\ &\quad + t \int_0^1 (\ddot{u} \ddot{v} - 7\ddot{v} + uv) \\ &\quad + t^2 \int_0^1 \frac{1}{2} \ddot{v}^2 + \frac{1}{2}v^2 \end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) = \int_0^1 (\ddot{u} \ddot{v} - 7\ddot{v} + uv)$$

$$(\text{ELE 1ª forma}) \quad \delta F(u, v) = 0 \quad \forall v \in V = \{ \dots v(0) = 0 \}$$

Integro per parti cercando di arrivare a v ovunque

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ddot{u} \ddot{v} &= [\ddot{u} \dot{v}]_0^1 - \int_0^1 \ddot{u} \dot{v} \\ &= [\ddot{u} \dot{v}]_0^1 - [\ddot{u} v]_0^1 + \int_0^1 \ddot{u}^{\vee} v \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \ddot{v} = [\dot{v}]_0^1$$

Quindi ELE in 2ª forma integrale diventa

$$\begin{aligned} \ddot{u}(1) \dot{v}(1) - \ddot{u}(0) \dot{v}(0) - \ddot{u}(1) v(1) + \underbrace{\ddot{u}(0) v(0)}_{=0} + \int_0^1 \ddot{u}^{\vee} v \\ - 7v(1) + \underbrace{7v(0)}_{=0} + \int_0^1 uv = 0 \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

1ª fase Pseudo $v \in C_c^\infty([0,1]) \rightsquigarrow$

$$\int_0^1 (u'' + u) v = 0 \rightsquigarrow \text{FLCV} \rightsquigarrow u'' = -u$$

2ª fase • Pseudo v t.c. $v(1) = \dot{v}(1) = 0$ e $\dot{v}(0) = 1$
 $\rightsquigarrow \ddot{u}(0) = 0$

• Pseudo $\dot{v}(1) = 1$ e gli altri $= 0 \rightsquigarrow \ddot{u}(1) = 0$

• Pseudo $v(1) = 1$ e gli altri $= 0 \rightsquigarrow \ddot{u}'(1) = -7$

Conclusione: se u è p.to di min. deve soddisfare per forza

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' = -u \\ u(0) = 0 \\ \ddot{u}(0) = 0 \\ \ddot{u}(1) = 0 \\ \ddot{u}'(1) = 7 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{DBC dall'inizio} \\ \text{note on the road} \end{array}$$

Oss. • L'ordine dell'eq. diff. è il doppio dell'ordine delle derivate nel funzionale

• Il numero di cond. in ogni estremo è uguale all'ordine delle derivate nel funzionale.

• Per l'eq. di ordine 4 in ogni estremo c'è
→ una cond. tra u e $\ddot{u}$
→ una cond. tra $\ddot{u}$ e $\ddot{u}'$

(in tutti i termini di bordo la somma è $= 3$).

— 0 — 0 —