

FLCV : Fundamental Lemma in the Calc. of Variations

DBR(L) : Lemma di Du Bois REYMOND

FLCV (Versione classica - C^0) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $f \in C^0(\Omega)$.

Supponiamo che

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad (*)$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.
 $\uparrow$ a supporto compatto

Allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$.

FLCV (Versione Lebesgue) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

Stessa ipotesi (N.B.: Ω integrale ha senso).

Allora $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$.

$L^1(\Omega')$ per ogni
 $\Omega' \subset\subset \Omega$
 $\uparrow$
 $\text{clos}(\Omega') \subset \Omega$
 $\uparrow$ compatto

Dim 1 classica Per assurdo supponiamo che esista $x_0 \in \Omega$ tale che $\delta := f(x_0) > 0$ (wlog)

Allora esiste $\eta > 0$ t.c.

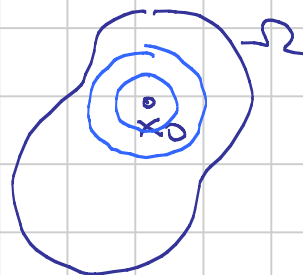
$$f(x) \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{per ogni } x \in B(x_0, \eta) \subset \Omega$$

Scelgo $\varphi \in C_c^\infty(B(x_0, \eta))$ tale che

(i) $\varphi(x) \geq 0$ per ogni $x \in B(x_0, \eta)$

(ii) $\varphi(x) = 1$ " " $x \in B(x_0, \frac{\eta}{2})$

È chiaro che $\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = \int_{B(x_0, \eta)} \dots > 0$.



Dim 2 classica

Idea brutale: se vale (*) per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, allora vale per ogni $\varphi \in C^0(\Omega)$. A quel punto scelgo $\varphi = f$ e ottengo

$$\int_{\Omega} f(x) \cdot f(x) dx = 0 \leadsto f(x) \equiv 0.$$

Argomento di approssimazione: sia $f \in C^0(\Omega)$, sia $\Omega' \subset \subset \Omega$ allora esiste una successione φ_n di funzioni $C_c^\infty(\Omega')$ tale che

- (i) $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente per ogni $x \in \Omega'$
- (ii) esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $|\varphi_n(x)| \leq M$ per ogni $x \in \Omega'$
per ogni $n \in \mathbb{N}$

A questo punto posso passare al limite per conv. dominata

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} f(x) \cdot f(x) dx &= \int_{\Omega'} f(x) \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega'} f(x) \cdot \varphi_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi_n(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Quindi $f(x) = 0$ q.o. in Ω' . Essendo Ω' arbitrario posso concludere.

— o — o —

Dim caso LEBESGUE Provo a riciclare la 2ª dim., cosa quasi immediata se $f \in L^2$, ma abbiamo assunto solo L^1_{loc}

Non mi tanto prendere $\varphi(x) = \text{sign}(f(x))$

Prendo qualunque $\Omega' \subset \subset \Omega$ e scelgo $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega')$ t.c.

- (i) $\varphi_m(x) \rightarrow \text{sign}(f(x))$ per q.o. $x \in \Omega'$
(ii) $|\varphi_m(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \Omega'$ e ogni $m \in \mathbb{N}$

$$0 = \int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \int_{\Omega'} f(x) \cdot \varphi_m(x) dx$$

$\uparrow$ Ω $\uparrow$ Ω'
 H^p $\varphi_m \in C_c^\infty(\Omega')$

$$\int |f(x) \varphi_m(x)| \leq |f(x)|$$

$$\int_{\Omega'} f(x) \cdot \text{sign}(f(x)) dx$$

$$= \int_{\Omega'} |f(x)| dx$$

Quindi $f(x) = 0$ per q.o. $x \in \Omega'$ che è arbitrario
— o — o —

Domanda: quanto posso indebolire la classe di funzioni test su cui richiedo che valga (*)

Posso limitarmi ad una classe V tale che $\text{Span}(V)$ sia "denso" in un opportuno senso in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Detto meglio:

per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ e per ogni $g: \Omega' \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ misurabile, esiste $\{\varphi_m\} \in \text{Span}(V)$ tali che

(i) $\varphi_m(x) \rightarrow g(x)$ per q.o. $x \in \Omega$

(ii) esiste M t.c. $|\varphi_m(x)| \leq M$ per ogni...
— o — o —

Esempio Se $\Omega = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ posso usare

$$V = \{ \varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \varphi(\frac{1}{2}) = 7, \varphi^{(2018)}(\frac{1}{3}) = 5 \}$$

Lemma DBR $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $f \in C^0(\Omega)$ [$f \in L^1_{loc}(\Omega)$]

Supponiamo che

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ t.c. $\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 0$

Allora $f(x)$ è loc. costante in Ω (cioè costante sulle comp. connesse) Dopo video: NO, è costante e basta!

[$f(x)$ coincide q.o. in Ω con una funt. loc. cost.]

Idea fondamentale: se $f(x)$ soddisfa l'ipotesi, allora anche $f(x) + c$ soddisfa l'ipotesi.

Scelgo c in maniera tale che

$$\int_{\Omega} (f(x) + c) dx = 0$$

e a quel punto uso $\varphi(x) = f(x) + c$

Dim Supponiamo Ω connesso e prendiamo $\Omega' \subset\subset \Omega$ (posso anche supporre Ω' sia una palla).

Scelgo c in modo che

$$\int_{\Omega'} (f(x) + c) dx = 0$$

Approssimo sign $(f(x) + c)$ con funzioni $C_c^\infty(\Omega')$ a media nulla. Idea per farlo

→ approssimo fregandoci della media con $\varphi_n(x)$

→ osservo che

$$\int_{\Omega'} \varphi_n(x) dx \rightarrow 0$$

- scelgo $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$ con integrale positivo
- congegno prendendo

$$\hat{f}_n(x) := f_n(x) + c_n \psi(x)$$

Giusta osservazione: questa funziona se $f(x) \in L^2_{loc}(\Omega)$ perché in questo caso posso approssimare $f(x) + c$.
Nel caso generale ... ci pensiamo ...

— o — o —

Dopo video: nel caso $f \in L^1_{loc}$ scelgo c t.c. $f(x) + c$ abbia media nulla in Ω' e d t.c. $\text{sign}(f(x) + c) + d$ abbia pure lei media nulla in Ω' . Poi approssimo quest'ultima.

— o — o —

Corollario $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $f \in L^2((a, b))$.

Supponiamo che

↑
una bnta L^1_{loc} , of course.

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((a, b))$$

Allora $f(x)$ è costante (q.o.) in (a, b) .

Dim. abusiva Integro per parti e applico FLCV

$$0 = \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx$$

$$\leadsto f'(x) \equiv 0 \leadsto f(x) = \text{costante}$$

Oss. fondamentale

$$\left\{ \varphi \in C_c^\infty((a, b)) : \int_a^b \varphi(x) dx = 0 \right\} = \left\{ \varphi' : \varphi \in C_c^\infty((a, b)) \right\}$$

A questo p.to uso DBR.

[La dim. dell'osservazione è fare la primitiva o derivare a seconda dell'inclusione che vogliamo dim.]

— o — o