

Esempi classici di metodo indiretto

$$F(u) := \int_a^b u(x)^2 dx$$

$$G(u) := \int_a^b |\dot{u}(x)| dx$$

$$H(u) := \int_a^b |\dot{u}(x)|^{1/2} dx$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([a,b]) : u(a) = A, u(b) = B \}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 numeri dati

Oss. $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con spazio di riferimento
 $V := \{ u \in C^1([a,b]) : u(a) = u(b) = 0 \}$

Data $u \in \mathbb{X}$ e $v \in V$ provo a calcolare $\delta F(u, v)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) := F(u+tv) &= \int_a^b u(x)^2 dx + 2t \int_a^b u(x) \dot{v}(x) dx \\ &\quad + t^2 \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx \end{aligned}$$

$$\varphi'(0) = 2 \int_a^b u(x) \dot{v}(x) dx$$

Se u è un p.to di min., allora deve essere $\delta F(u, v) = 0$
 cioè

$$\int_a^b u(x) \dot{v}(x) dx = 0$$

$$\forall v \in V$$

(1^a forma ind.
di ELE)

Integro per parti (non so se $u \in C^2$, ma ME NE FREGO)

$$\left[u(x) v(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \ddot{u}(x) v(x) dx = 0$$

I termini di bordo se ne vanno perché $v(a) = v(b) = 0$
Resta

$$\int_a^b \ddot{u}(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V \quad (2^{\text{a}} \text{ forma int. di ELE})$$

Da questa vorrei dedurre che $\ddot{u}(x) = 0$ (dovrei dirlo, ma ME NE FREGLIO). Quindi deduco

$$\ddot{u}(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad (\text{ELE in forma diff.})$$

Quindi u è la retta che passa per $u(a) = A$ e $u(b) = B$.

Dim. Considero u_0 la retta giusta.

Osservo che u_0 soddisfa tutte le 3 forme di ELE.

Penso ora un altro competitor $w \in \mathcal{X}$ e osservo che

$$w = u_0 + v \quad \text{con } v \in V.$$

Lo stesso conto di prima mi dice che

$$\begin{aligned} F(w) = F(u_0 + v) &= \underbrace{\int_a^b \dot{u}_0^2}_{F(u_0)} + 2 \underbrace{\int_a^b \dot{u}_0 \dot{v}}_{\delta F(u_0, v)} + \underbrace{\int_a^b \dot{v}^2}_{\geq 0} \\ &\geq F(u_0) \end{aligned}$$

Quindi u_0 è un pto di minimo. Inoltre vale il segno = se e solo se

$$\int_a^b \dot{v}(x)^2 dx = 0$$

cioè $\Leftrightarrow \dot{v} \equiv 0 \Leftrightarrow v = \text{costante} = 0$ (per via delle BC)
boundary conditions

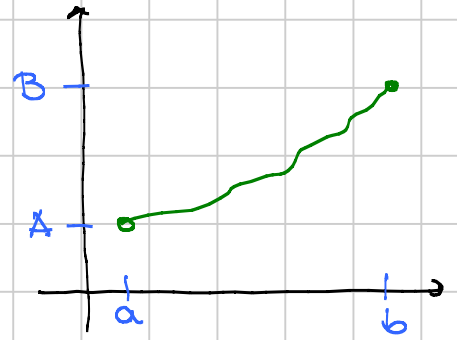
Ora sappiamo che la retta è l'unico p.to di min.

Facciamo ora il minimo per G assumendo WLOG che sia $B > A$.

Per ogni $u \in C^1$ con le BC vale

$$G(u) = \int_a^b |\dot{u}(x)| dx$$
$$\geq \int_a^b \dot{u}(x) dx$$

$$= u(b) - u(a) = B - A$$



Vale il segno di $=$ se e solo se $\dot{u}(x) \geq 0$ sempre in $[a, b]$
(dimostrarlo per bene)

Conseguenza: il min. esiste e tutte le funzioni non cresc. sono argmin.

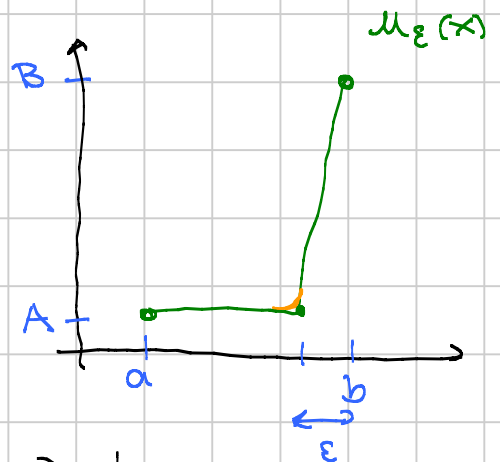
Passiamo ad $H(u) = \int_a^b |\dot{u}(x)|^{1/2} dx$

In questo caso il min non esiste e l'inf. è 0!!!

$u_\varepsilon(x)$ è costante fino a $b-\varepsilon$
e poi "sale alla fine"

$$H(u_\varepsilon) = \int_{b-\varepsilon}^b \left| \frac{B-A}{\varepsilon} \right|^{1/2} dx$$

$$= (B-A)^{1/2} \cdot \sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0^+$$



Uhuh... non è C^1 ... ma posso fare un piccolo raccorciamento tra $b-2\varepsilon$ e $b-\varepsilon$ pagandolo poco o nulla (verificare!)

Riassunto

- $F(u) \rightsquigarrow$ esistenza e unicità del min
 p^2 è strett. convessa 😊
- $G(u) \rightsquigarrow$ esistenza ma non unicità
 $|p|$ è conv. ma non strett. 😞 potenziali guai
- $H(u) \rightsquigarrow$ non esistenza e cose strane
 $|p|^{1/2}$ non è convessa 😞 guai GROSS!

Caso strett. convesso Sca $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa strett.
Consideriamo

$$F(u) := \int_a^b \psi(u(x)) dx$$

Allora la retta è l'unico p.to di min. per il pbm

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([a,b]) : u(a) = A, u(b) = B \}$$

Dim. Supponiamo che ψ sia di classe C^2 . Allora per Analisi 1 vale la disug.

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a)b \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$\text{con} = \text{se e solo se } b=0$$

(Taylor-Lagrange o funz. conv. sopra retta tangente)
 $\psi \in C^2$ $\psi \in C^1$

Sia u_0 la retta giusta e sia w un altro competitor.
Allora

$$w = u_0 + v \quad \uparrow \quad v(a) = v(b) = 0$$

Solito conto:

$$\begin{aligned} F(u) - F(u_0 + v) &= \int_a^b \psi(\dot{u}_0(x) + \dot{v}(x)) dx \\ &\geq \underbrace{\int_a^b \psi(\dot{u}_0(x)) dx}_{F''(u_0)} + \int_a^b \psi'(\dot{u}_0(x)) \dot{v}(x) dx \\ &= \psi'(u_0) \int_a^b \dot{v}(x) dx \\ &\quad \text{coeff.} \quad \text{aug. retta} \quad \uparrow \\ &= \psi'(u_0) (v(b) - v(a)) = 0 \\ &\geq F(u_0) \end{aligned}$$

Ancora una volta: la retta è un p.to di min. (per qui ho usato solo la convessità)

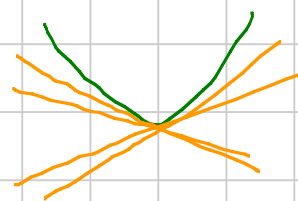
Se la conv. è stretta, allora vale se e solo se $\dot{v}(x) \equiv 0$ da cui come prima $v(x) \equiv 0$.

Quindi in questo caso u_0 è l'unico p.to di min.

Sapendo bene Analisi 1, non ho usato che $\psi \in C^1$. Infatti per ogni convessa vale

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \mu b$$

↑ qualunque elemento compreso tra derivata dx e sx di ψ in a (vedi Analisi 1)



e questo è quello che serve per concludere in entrambi i casi (conv. stretta o no)