

Metodi introdotti nel XX secolo per i pbm. di analisi Matem.

Calcolo delle Variazioni $\begin{cases} \nearrow \text{Metodo indiretto} \\ \searrow \text{Metodo diretto} \end{cases}$

Eq. Deriv. Parziali (PDE) $\begin{cases} \nearrow \text{Eq. ellittiche} \\ \searrow \text{Eq. di Evoluzione} \end{cases}$

Teo. della Misura

Analisi Funzionale

Usiamo, ma vediamo
nulla

$\rightarrow$ Sp. Vett. Top. $\rightarrow$ NULLA

$\rightarrow$ Sp. di Banach $\rightarrow$ min. sindacale

$\rightarrow$ sp. di Hilbert $\rightarrow$ ragionevole

$\rightarrow$ sp. di SOBOLEV $\rightarrow$ BENE

— o — o —

Calc. delle Variazioni $\times$ insieme

$F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Obiettivo: determinare

$$m = \min \{ F(x) : x \in \mathbb{X} \} \quad \rightsquigarrow \text{valore}$$

$$\begin{aligned} \argmin \{ F(x) : x \in \mathbb{X} \} &= \text{p.ti di min} \\ &= \{ x \in \mathbb{X} : F(x) = m \} \end{aligned}$$

(i pbm. di max. sono equivalenti)

Spesso $\mathbb{X}$ = spazio di funzioni = sp. di dim. infinita

Terminologia: $\rightarrow$ funzione

$\rightarrow$ funzionale (in partenza sp. di funz., in arrivo $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

$\rightarrow$ applicazione (di solito è lineare)

$\rightarrow$ operatore (di solito lineare)

$\rightarrow$ mappa

Sono tutti sinonimi, ma con retrogusto diverso
— o — o —

METODO INDIRETTO Road map

$\rightarrow$ cerco di farmi un'idea di chi sono i candidati p.ti di min.

$\rightarrow$ dim. effett. che lo sono

Esempio (Analisi 2) Trovare

$$\min \{ x^2 - 2x + y^2 + 6y : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$\nabla f(x, y) = 0$$

$$2x - 2 = 0$$

$$\leadsto x = 1$$

$$2y + 6 = 0$$

$$\leadsto y = -3$$

Spero che $(1, -3)$ p.to di min.

$$\begin{aligned} \text{Rigoroso: } x^2 - 2x + y^2 + 6y &= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 10 \\ &= (x-1)^2 + (y+3)^2 - 10 \\ &\geq -10 \leftarrow \text{min.} \end{aligned}$$

con ugual. $\Leftrightarrow x=1$ e $y=-3 \leftarrow$ unico argmin.

- METODO DIRETTO** → Dim. che min. esiste senza avere idea di dove si trova
 → Una volta che so che esiste, procedo con cond. nec.

Esempio (di prima)

Osservo che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$

e quindi per W. generalizzato (vedi Analisi 2) min. esiste.

Osservo che $f \in C^1$ e sono autorizzato a procedere come prima.

— o — o —

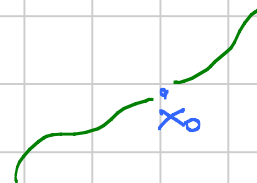
METODO INDIRETTO IN GENERALE

- Derivata nel senso di GATEAUX
 → Equazione di Eulero - Lagrange (ELE)

$$F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$\uparrow$ insieme

$$x_0 \in \mathbb{X} \text{ t.c. } F(x_0) \in \mathbb{R}$$



Prendo una qualunque curva $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{X}$ t.c. $\gamma(0) = x_0$
 Definisco $\varphi : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ come

$$\varphi(t) := F(\gamma(t))$$

Se esiste $\varphi'(0)$ (Analisi 1), dico che $\varphi'(0)$ è la variazione prima di F in x_0 lungo la curva γ .

$$\delta F(x_0, \gamma) := \varphi'(0)$$

Caso speciale X sp. affine con V sp. vett. di riferimento

Dato $x_0 \in X$ e $v \in V$ posso considerare $\gamma(t) := x_0 + t v$
e allora

$$\delta F(x_0, v) = \varphi'(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \alpha v) - F(x_0)}{\alpha}$$

$\uparrow$ se esiste

var. 1^a di F in x_0 nella dir v

(der. direzionale = der. secondo Gateaux)

Teorema (ovvio) X insieme, $F: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funzionale
 $x_0 \in X$ p.to di minimo, $F(x_0) \in \mathbb{R}$.

Allora $\delta F(x_0, v) = 0$ per ogni v per cui esiste.

Nel caso speciale

$\delta F(x_0, v) = 0$ per ogni $v \in V$ per cui esiste

(ELE)

$\uparrow$
vecchio " $\nabla f = 0$ "

— 0 — 0 —

METODO DIRETTO = teo. di WEIERSTRASS

$\leadsto \mathbb{R}^n$

$\leadsto$ sp. metrici

$\leadsto$ sp. topologici

$\leadsto$ sp. con NOZIONE DI CONVERGENZA (brutalmente: fare la lista delle succ. conv. e relativi limiti).

Def. (Noz. di conv.) Sia X un insieme

$$\text{Succ}(X) = \{\text{successioni a valori in } X\} \\ = \{f: \mathbb{N} \rightarrow X\}$$

Una nozione di conv. è un sottoinsieme qualunque di

$$\text{Succ}(X) \times X.$$

Oss. Non faccio nessuna richiesta pensata sulla nozione, nemmeno le più ovvie (vedi video)

Def. Sia X insieme con nozione di conv.

- Un sottoinsieme $K \subseteq X$ si dice **COMPATTO** se per ogni $\{x_n\} \subseteq K$ esistono n_k succ. di interi strett. cresc. e $x_\infty \in K$ t.c.

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty$$

↑ rispetto alla nozione

- Una funzione $F: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si dice **semicont. inf.** (SCI o LSC) se per ogni $x_n \rightarrow x_\infty$ vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \geq F(x_\infty)$$

— o — o —

Teorema (W.) Sia X insieme $\neq \emptyset$ e $F: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Supponiamo che esista una nozione di conv. in X t.c.

(i) X risulta compatto

(ii) F risulta SCI

Allora esiste per forza $\min \{F(x) : x \in X\}$.

Dim. Sia $I := \sup \{F(x) : x \in X\}$ (esiste sempre)
 Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una succ. sufficiente, cioè t.c.
 $F(x_n) \rightarrow I$
 Per (i) esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ e quindi

$$I \stackrel{\uparrow \text{def. di } I}{\leq} F(x_\infty) \stackrel{\uparrow \text{SCI}}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \stackrel{\uparrow \text{def. di } x_n}{=} I$$

$F(x_n)$ è succ. di numeri reali con limite

Quindi $F(x_\infty) = I$. Da questo momento $I \in \mathbb{R}$ ed è il min. (con $x_\infty \in \text{argmin}$).
 — o — o —

Def. Sdito setting. Allora F si dice coerciva se

$$\exists K \subseteq X \text{ compatto t.c. } \inf \{F(x) : x \in X\} = \inf \{F(x) : x \in K\}.$$

Teo. (W. generalizzato) X ed F come prima.
 Supp. che esista nozione di conv. in X t.c.
 (i) F è coerciva
 (ii) F è SCI
 Allora esiste min.

Dim. Ovvio 😊 : la battaglia per il min. si gioca in K .
 — o — o —

Oss. È difficile conciliare SCI e CPT

- Troppe succ. conv. $\leadsto$ CPT facile, SCI diff.
 - Poche succ. conv. $\leadsto$ CPT diff., SCI facile.
- o — o —

Achtung! [Aggiunto dopo video] Aggiustare se/dove serve per sistemare casi banali (tipo insiemi vuoti o funzioni che valgono sempre $+\infty$).