

A.A. 2018/2019
Istituzioni di Analisi Matematica
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 3)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 47. Operatori compatti ed operatori simmetrici. Esempio di operatore lineare simmetrico senza autovalori. Continuità degli operatori compatti sotto ipotesi di linearità/simmetria. Quoziente di Rayleigh: definizione ed esistenza del massimo del suo valore assoluto.	6
Lezione 48. Caratterizzazione variazionale di autovalori/autovettori. Teorema spettrale per operatori compatti: enunciato e dimostrazione. Accenno alla compattezza dell'inverso del Laplaciano su un dominio limitato.	12
Lezione 49. Limite uniforme di operatori compatti è compatto. Approssimazione di operatori compatti in spazi di Hilbert. Proiezione non-lineare e approssimazione non-lineare di operatori compatti in spazi normati.	17
Lezione 50. Dal teorema di punto fisso di Brouwer al teorema di punto fisso di Schauder. Dimostrazione del teorema di sola esistenza per equazioni differenziali mediante il teorema di punto fisso di Schauder.	23
Lezione 51. Caratterizzazioni della continuità per applicazioni lineari tra spazi normati. Pseudo-norme e teorema di Hahn-Banach. Funzionale allineato. Discussione dell'esistenza di applicazioni lineari continue e non continue tra spazi normati. . .	28
Lezione 52. Esempio di non unicità del funzionale allineato. Spazio degli operatori lineari tra due spazi normati. Norma di un operatore. Duale topologico di uno spazio normato. Caratterizzazione duale della norma.	34
Lezione 53. Definizione di convergenza debole (in uno spazio normato) e debole* (nel suo duale). Semicontinuità debole della norma. Debole* compattezza delle palle nei duali di spazi separabili. Separazione di insiemi mediante iperpiani: definizioni ed enunciati.	40
Lezione 54. Chiusura forte + convessità implica chiusura debole. Semicontinuità forte + convessità implica semicontinuità debole. Pseudo-norma associata ad un convesso. Dimostrazione dei teoremi di separazione debole/stretta (forme geometriche di Hahn-Banach).	46
Lezione 55. Norme classiche nel piano. Corrispondenza tra punti della sfera unitaria in uno spazio e nel suo duale in dimensione finita. Descrizione dei comuni spazi di successioni e spazi di funzioni. Duale di l_1	52

Lezione 56. Duale dei classici spazi di successioni: l_p , successioni infinitesime, successioni con limite all'infinito, successioni definitivamente nulle. Commenti sul duale di l -infinito.	58
Lezione 57. Duale degli spazi L_p su spazi di misura finiti via teorema di Radon-Nikodym.	64
Lezione 58. Commenti sul duale di L -infinito. Altro esempio di funzionale lineare la cui norma è un $\sup$ ma non un $\max$. Duale degli spazi di Hilbert (via base ortonormale e via proiezione su un convesso chiuso). Accenno al duale delle funzioni continue nulle all'infinito.	70
Lezione 59. Dimostrazioni dirette della compattezza debole delle palle negli spazi L_p : ruolo dei teoremi di rappresentazione del duale. Caso speciale di L -infinito. Bi-duale e spazi riflessivi. Compattezza debole delle palle negli spazi riflessivi.	75
Lezione 60. Separabilità di uno spazio vs separabilità del duale. Le palle di L_1 non sono debolmente compatte (ma diventano debolmente* compatte pensandole in spazi di misure). Esistenza di soluzioni deboli per equazioni ellittiche lineari via teorema di rappresentazione di Riesz (alla Lax-Milgram).	80
Lezione 61. Spazi di Baire: definizioni equivalenti. Gli spazi metrici completi e gli spazi localmente compatti sono spazi di Baire. Gli aperti negli spazi di Baire sono spazi di Baire. Primo esempio di utilizzo degli spazi di Baire.	86
Lezione 62. Insiemi F -sigma e G -delta. L'insieme dei punti di discontinuità di una funzione è un F -sigma. Gli irrazionali non sono un F -sigma. Le successioni debolmente convergenti negli spazi di Hilbert o normati sono limitate.	92
Lezione 63. Non esistono spazi di Banach con base algebrica numerabile. I sottospazi di dimensione finita di uno spazio normato sono chiusi. Teorema di Banach-Steinhaus (doppia versione). Esistenza di funzioni continue non derivabili in nessun punto.	98
Lezione 64. Esistenza di un G -delta denso di funzioni continue e periodiche la cui serie di Fourier non converge in un G -delta denso di punti.	104
Lezione 65. Il limite puntuale di funzioni continue è continuo in un G -delta denso. La derivata di una funzione derivabile è continua in un G -delta denso. Caratterizzazione delle mappe aperte in termini di risolubilità quantitativa.	109
Lezione 66. Ogni vettore è somma di una serie assolutamente convergente a valori in un denso. La risolubilità quantitativa su un denso implica la risolubilità quantitativa ovunque. Teorema della mappa aperta e corollari: continuità dell'inversa, equivalenza di norme, teorema del grafico chiuso.	115
Lezione 67. Esistenza di un solver lineare quantitativo vs esistenza di un supplementare topologico. Operatori non limitati. Caso di un operatore diagonale rispetto ad una base ortonormale in uno spazio di Hilbert. Potenze di un operatore. Operatori non limitati con inverso compatto.	121

- Lezione 68.** Esempi di operatore non limitato: derivata seconda con condizioni al bordo di Dirichlet e periodiche. Calcolo del dominio della potenza $1/2$ della derivata seconda con condizioni di Dirichlet in un intervallo. 125
- Lezione 69.** Esempio classico di terna Hilbertiana. Spazi di Sobolev H_s frazionari in un intervallo: continuità sopra $1/2$ e illimitatezza sotto $1/2$. Delta di Dirac come elemento del duale di H^1 131
- Lezione 70.** Laplaciano (con condizioni di Dirichlet) in dimensione qualunque come operatore non limitato. Dominio della potenza $1/2$ del Laplaciano. La traccia di una funzione H^1 sta in $H^{1/2}$. Enunciato del teorema spettrale per operatori non limitati. 135

Ist. Analisi Matematica

-

LEZIONE 47

Note Title

26/11/2018

TEOREMA SPETTRALE (Versione BABY)Geometria 1 Sia V sp. vett. di dim. finita con un prod. scalareSia $f: V \rightarrow V$ lineare e simmetrica, cioè

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall (v, w) \in V^2$$

Allora esiste base ortonormale di V costituita da autovettori di f .Def. (Operatori compatti)Sia X sp. normato, sia Y sp. metrico, sia $f: X \rightarrow Y$.Diciamo che f è un operatore compatto se l'immagine di ogni sottoinsieme limitato in X è rel. cpt. in Y .In termini di succ: se $\{x_n\} \subseteq X$ è limitata, allora $\{f(x_n)\} \subseteq Y$ ammette s.succ. conv.Def. (Operatori simmetrici)Sia H sp. di Hilbert, sia $A: H \rightarrow H$ lineare.Si dice che A è simmetrico se

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall (x, y) \in H^2$$

Teorema spettrale (per operatori compatti)Sia H sp. di Hilbert e sia $A: H \rightarrow H$.

Supponiamo che

(i) H è separabile e $\dim(H) = +\infty$ (ii) A è lineare e simmetrico(iii) A è compattoAllora esiste base ortonormale $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ^{di H} costituita da autovettori di A .

Oss 1 In generale compatto $\nRightarrow$ continuo
(basta pensare a qualcosa che ha come immagine 2 p.ti)

Oss 2 L'ipotesi (iii) serve davvero nel teorema.

Esempio: $H = L^2(0,1)$ $A: H \rightarrow H$ definito da

$$(Af)(x) = x f(x) \quad \forall f \in H$$

Si vede facilmente che

- $A: H \rightarrow H$ è lineare
- A è simmetrico

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^1 x f(x) \cdot g(x) dx = \langle f, Ag \rangle$$

- A è 1-lipschitz

$$\|Af - Ag\|^2 = \int_0^1 \underbrace{x^2}_{\leq 1} (f(x) - g(x))^2 dx \leq \|f - g\|^2$$

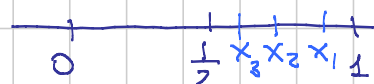
- Se f fosse un autovettore, sarebbe $Af = \lambda f$, cioè

$$x f(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in (0,1) \quad (\text{q.o.})$$

e questa è impossibile a meno che $f(x) = 0$ per q.o. x .

- Tocchiamo con mano che A non è compatto. Mi serve una succ. $\{f_n\} \subseteq L^2(0,1)$ limitata t.c. Af_n non ha s. succ. conv.

Pensiamo una succ. $x_n \searrow \frac{1}{2}$



Prendiamo $f_n(x) = c_n \cdot$ funzione caratt. di $[x_{n-1}, x_n]$
dove c_n è scelto in modo che $\|f_n\| = 1$.

Dico che Af_n non ha s.succ. di Cauchy
Infatti per $n \neq m$ vale

$$\begin{aligned} \|Af_n - Af_m\|^2 &= \|Af_n\|^2 + \|Af_m\|^2 + 2 \underbrace{\langle Af_n, Af_m \rangle}_{=0} \\ &\stackrel{1}{=} \int x^2 f_n(x)^2 \geq \frac{1}{4} \\ &\geq \frac{1}{4} \int f_n(x)^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \int x^2 f_n(x) f_m(x)$$

— 0 — 0 —

Prop. 1 (Compatto + lineare $\Rightarrow$ continuo s-s)

Sia X normato, Y normato, $A: X \rightarrow Y$ lineare e compatto.
Allora A è continuo S-S, cioè

$$x_n \rightarrow x_\infty \text{ in } X \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax_\infty \text{ in } Y$$

Dim. Posso supporre wlog che $x_\infty = 0$ (qui si usa la linearità)

Quindi supponiamo $x_n \rightarrow 0$ e pure $x_n \neq 0$.

Allora $\frac{x_n}{\|x_n\|}$ è limitata, quindi

$A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$ è rel. compatta in Y , dunque è limitata in Y ,
cioè

$$\left\| A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \right\|_Y \leq M$$

Da questo segue che $\|Ax_n\|_Y \leq M \|x_n\|_X$ (ho usato di nuovo la linearità).

Concludo visto che $\|x_n\| \rightarrow 0$.

— 0 — 0 —

Prop 2 (Lineare + compatto + simmetrico $\Rightarrow$ continuo w-s)

Sia H Hilbert, sia $A: H \rightarrow H$ con le 3 ipotesi L+C+S.
Allora

$$x_n \rightarrow x_\infty \text{ debole} \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax_\infty \text{ forte}$$

Dim Wlog $x_\infty = 0$. So che $x_n \rightarrow 0$ e voglio $Ax_n \rightarrow 0$.
Per ogni $v \in H$ ho che

$$\langle Ax_n, v \rangle = \langle x_n, Av \rangle \rightarrow 0 \text{ per conv. debole}$$

Per compattezza sappiamo che $Ax_{n_k} \rightarrow y_\infty$. Ma allora da sopra

$$\langle y_\infty, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H$$

e questo mi dice che $y_\infty = 0$.

Per il solito lemma della sotto-sotto, tutta $Ax_n \rightarrow 0$.

Oss. Abbiamo usato che le succ. conv. deboli sono di unit , quindi

$\rightarrow$ o lo aggiungiamo come ipotesi $x_n \rightarrow x_\infty + \{x_n\}$ dim.
(e ci baster  quando lo useremo)

$\rightarrow$ o aspettiamo di poterlo dedurre.
— o — o —

Def. (Quoziente di RAYLEIGH).

Sia H sp. di Hilbert e sia $A: H \rightarrow H$ un operatore qualunque Poniamo

$$q(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$$

Prop 3 (Proprietà del quoziente di Rayleigh)

Siano H Hilbert e $A: H \rightarrow H$ compatto, lin., simmetrico.

Allora valgono i seguenti fatti

(1) Esiste

$$\begin{aligned} \max \{ |q(x)| : x \in H \setminus \{0\} \} &= \max \{ |\langle Ax, x \rangle| : \|x\| = 1 \} \\ &= \max \{ |\langle Ax, x \rangle| : \|x\| \leq 1 \} \end{aligned}$$

(2) Il max è un autovalore di A

(3) I p.ti di max sono gli autovettori

(4-bis) Vale lo stesso se ci restringo ad un sottospazio $V \subseteq H$ che sia chiuso e A -invariante, cioè
 $Av \in V \quad \forall v \in V.$ (vett.)

Dim. $q(x)$ è 0-homogeneo, quindi radiale. Da questo segue subito che

$$\begin{aligned} \sup \{ |q(x)| : x \in V \setminus \{0\} \} &= \sup \{ |q(x)| : x \in V \text{ e } \|x\| = 1 \} \\ &= \sup \{ |\langle Ax, x \rangle| : x \in V \text{ e } \|x\| = 1 \} \\ &\leq \sup \{ |\langle Ax, x \rangle| : x \in V, \|x\| \leq 1 \} \end{aligned}$$

Verifico che l'ultimo è uguale. Sia $\|x\| < 1$ con $|\langle Ax, x \rangle| > 0$, allora ponendo $y = \frac{x}{\|x\|}$ vediamo che

$$|\langle Ay, y \rangle| = \frac{1}{\|x\|^2} |\langle Ax, x \rangle| > |\langle Ax, x \rangle|$$

i p.ti di max non possono essere interni

Quindi i 3 sup coincidono. Basta che uno dei 3 sia max

Lo dimostro per il terzo. Sia $\{x_n\}$ succ. supizzante.
Sappiamo che $\|x_n\| \leq 1$, quindi ammette s. succ.

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty$$

Per sci della norma $\|x_\infty\| \leq 1$, quindi è un buon compete-
tore. Ora sappiamo che $Ax_{n_k} \rightarrow Ax_\infty$ (Prop. 2)

$$\begin{array}{ccc} \langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle & \rightarrow & \langle Ax_\infty, x_\infty \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ Ax_\infty & & x_\infty \end{array}$$

Resta da dim. che $x_\infty \in V$ se gli $x_n \in V$.

Questo è vero perché V è chiuso forte per ipotesi e
convesso, quindi chiuso debole.

Oss. Abbiamo dim. la caratt. variazionale degli
autovalori.

Oss. Non abbiamo mai detto che $q(x)$ ammette
max / min in $H \setminus \{0\}$.
(Fare un esempio in cui uno dei 2 non esiste).

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 48

Note Title

26/11/2018

Dim. che il max di $|q(x)|$ è autovalore

Uso la prima caratt. come $\max \left\{ \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|^2} : x \in V, x \neq 0 \right\}$

Sia x_0 un p.to di max per $|q(x)|$. Assumo wlog che sia p.to di max per $q(x)$.

Pongo $\varphi(t) = q(x_0 + tv)$ con $v \in V$

Questa deve avere $\varphi'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\langle A(x_0 + tv), x_0 + tv \rangle}{\|x_0 + tv\|^2} \\ &= \frac{\langle Ax_0, x_0 \rangle + 2t \langle Ax_0, v \rangle + t^2 \langle Av, v \rangle}{\|x_0\|^2 + 2t \langle x_0, v \rangle + t^2 \|v\|^2} \end{aligned}$$

Faccio la derivata

$$\varphi'(t) = \frac{(2 \langle Ax_0, v \rangle + 2t \langle Av, v \rangle) \cdot \text{Den} - (2 \langle x_0, v \rangle + 2t \|v\|^2) \cdot \text{Num}}{\text{Den}^2}$$

$$\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow \langle Ax_0, v \rangle \|x_0\|^2 - \langle x_0, v \rangle \langle Ax_0, x_0 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\langle Ax_0 - \frac{\langle Ax_0, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0, v \right\rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

$\in V$ perché v è A -invariante

Quindi deve essere 0, cioè

$$Ax_0 = \frac{\langle Ax_0, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0$$

$q(x_0)$ ed è autovalore

— 0 — 0 —

Oss. Si poteva dimostrare usando $\max \{ |\langle Ax, x \rangle| : \|x\|=1 \}$
 usando i moltiplicatori di Lagrange
 (l'autovalore diventa proprio il moltiplicatore di Lagrange)

Ripasso geometria 1

- ① Per op. simm., gli autovett. con autovalori diversi sono ortogonali

[Se $Au = \lambda u$ e $Av = \mu v$, allora
 $\lambda \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle = \langle u, \mu v \rangle$
 $= \mu \langle u, v \rangle$]

- ② Se A è simm. e V è A -invariante, allora
 $V^\perp$ è A -invariante

[Sia $w \in V^\perp$. Allora per ogni $v \in V$
 $\langle Aw, v \rangle = \langle w, Av \rangle = 0 \Rightarrow Aw \in V^\perp$]

Enunciato completo del teo. spettrale

Ipotesi come sopra.

- ① Tesi di sopra (base di autovettori)
- ② Tutti gli autosp. hanno dim. finita (tranne eventualmente il ker)
- ③ Gli autovalori non nulli si possono sistemare in una succ. $\{\lambda_n\}$ con $|\lambda_n| \rightarrow 0$ se sono infiniti
 (quindi l'insieme degli autovalori è limitato e
 l'unico possibile p.to di accumulazione è 0)

Dim. teo. spettrale L'idea è costruire una succ. $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ di autovalori non nulli con $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ e una succ. di sottospazi $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$ in modo che

λ_k massimizza $|q(x)|$ in $V_k \setminus \{0\}$.

- Passo base: $V_1 := H$ e $|\lambda_1|$ che massimizza $q(x)$ in $V_1 \setminus \{0\}$.
Sceglia un autovettore u_1 con $\|u_1\| = 1$.

- Pongo $V_2 = \{x \in H : \langle x, u_1 \rangle = 0\}$
Oservo che è chiuso e A -invariante e trovo λ_2 e u_2
:

- Supposto di aver trovato $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, pongo

$$V_{k+1} = \{x \in H : \langle x, u_1 \rangle = \dots = \langle x, u_k \rangle = 0\}$$

e massimizzando su V_{k+1} trovo λ_{k+1} e u_{k+1}

Se strada facendo il max è $\neq 0$, allora ok.

Se strada facendo trovo 0, vuol dire che ciò che rimane è il ker.

In ogni caso fino a quel punto $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$

→ Caso facile: se ad un certo pto $V_k = \ker A$, allora prendo una base ortonormale del ker e ho finito.

→ Altrimenti dico che $|\lambda_k| \rightarrow 0$. Qui serve la compatt.
Supponiamo che $|\lambda_k| \geq \nu > 0$.

Siano u_k i risp. autovett., che per costruzione sono ortonormali. Ora $\{u_k\}$ è limitata, ma $Au_k = \lambda_k u_k$ quindi $\|Au_k - Au_l\|^2 = \|\lambda_k u_k - \lambda_l u_l\|^2 \geq 2\nu$

La dim. NON è finita: so che $\{v_k\}$ sono ortonormali, ma non so ancora che lo Span è denso.

Pongo

$$V_\infty := \{x \in H : \langle x, v_k \rangle = 0 \quad \forall k=1, 2, \dots\}$$

Osservo che $V_\infty \subseteq V_k$ costruiti strada facendo, quindi

$$\max \{ |q(x)| : x \in V_\infty \setminus \{0\} \} \leq \max \{ |q(x)| : x \in v_k \setminus \{0\} \} = |\lambda_k|$$

Ma allora, poiché $|\lambda_k| \rightarrow 0$, V_∞ è il ker di A e quindi mi basta aggiungere ai $\{v_k\}$ una base di $\ker A$.

Così abbiamo base di H .

— o — o —

Esempio H Hilbert separabile con base $\{e_n\}$. Pongo

$$A e_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{1}{n} e_n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

ed estendo per linearità. Questo è operatore compatto con ker di dim. infinita.

— o — o —

Fatto che si tende a trascurare: abbiamo usato che un sottoinsieme chiuso di un separabile è separabile

Questo è vero nei metrici, ma falso in generale nei topologici.

[Provare a fare dim. ed esempi]

— o — o —

L'ESEMPIO

L'esempio più classico di operatore compatto simmetrico è l'inverso del Laplaciano con DBC.

Teorema Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ LIMITATO. Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

(nel senso delle soluzioni deboli)

[Basta minimizzare $F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 + \langle f, u \rangle : u \in H_0^1(\Omega)$]

L'applicazione $A: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ definita ponendo $Af = u$ è un operatore simmetrico compatto

- Lineare è ovvio
- Simmetrico è Gauss - Green (in una variabile è l'integrazione per parti)

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = - \int_{\Omega} \langle Du, Dv \rangle \stackrel{\text{DBC}}{=} \int_{\Omega} u \cdot \Delta v$$

- Compatto : regolarità + immersioni di Sobolev

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 49

Note Title

29/11/2018

Approssimazione di operatori compatti

Idea: approx. operatore compatto mediante operatori che hanno immagine di dim. finita

Prop. 1 (Limite unif. di op. compatti è compatto)

Sia X sp. normato, sia Y metrico, sia $f_n: X \rightarrow Y$ e sia $f_0: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) f_n è cpt. per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $f_n \rightarrow f_0$ unif. sui limitati di X ,

(iii) Y è completo

Allora f_0 è cpt.

Dim. Sia $A \subseteq X$ limitato. Devo dim. che $f_0(A)$ è rel. cpt.

Essendo Y completo, basta dim. $f_0(A)$ tot. dim.

Idea: $f_0(A)$ è vicino a $f_n(A)$, il quale è tot. dim.

• Ci viene dato $\varepsilon > 0$

• Scelgo $n \in \mathbb{N}$ t.c. $d_Y(f_n(x), f_0(x)) \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall x \in A$
(posso per conv. unif.)

• Essendo $f_n(A)$ tot. dim., esistono $y_1, \dots, y_k \in Y$ t.c.

$$f_n(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon)$$

Dipendano da n ,
il quale è scelto
una volta per
tutte.

• Per la triangolare

$$f_0(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon)$$

[$\varepsilon = \varepsilon$ dopo video]

Esercizio Mostrare che le 3 ipotesi servono.

Teorema (Approx. op. compatti negli Hilbert separabili)

Sia X normato, sia H Hilbert separabile, sia $\{e_n\}$ base ortonormale, sia $f: X \rightarrow H$ op. compatto, sia

$H_n = \text{Span}(e_1, \dots, e_n)$, sia $P_n: H \rightarrow H_n$ la proiezione.

Poniamo

$$f_n(x) := P_n(f(x)) \quad \forall x \in X$$

Allora $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui limitati.

Inoltre

- Se f è lineare, allora anche f_n è lineare
- " " continua, " " continua

Dim. Si tratta di far vedere che per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $A \subseteq X$ limitato, esiste n tale che

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$$

- Ci vengono dati A ed ε
- Essendo $f(A)$ relativamente compatto, troviamo $y_1, \dots, y_k$ in H tali che

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon)$$

- Essendo $\text{Span}(e_1, \dots, e_n, \dots)$ denso, possiamo trovare

$$z_i \in B(y_i, \frac{1}{2}\varepsilon) \quad \text{con } z_i \in \underbrace{\text{Span}(e_1, \dots)}_{\text{comb. lin. finite}}$$

- In questo modo avremo che

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(z_i, \varepsilon)$$

- Esiste $m \in \mathbb{N}$ t.c. $z_i \in H_m$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

◦ Considero la $f_n(x) = P_n(f(x))$ e osservo che

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|P_n(f(x)) - f(x)\|$$

$$\leq \text{dist}(f(x), H_n)$$

$$\leq \varepsilon \quad (\text{perché c'è uno degli } z_i \text{ che dista meno di } \varepsilon \text{ da } f(x))$$

per ogni $x \in A$

— o — o —

Oss. Ci sono esempi perversi in cui l'approx. non funziona negli spazi di Banach.

[Aggiunto dopo video: la frase forse non si capisce. Volevo dire: nei Banach esistono operatori lineari che non si approssimano con operatori LINEARI a valori in s.sp. di dim. finita. Quindi bisogna ricorrere ad approssimazioni NON LINEARI, cosa che svilupperemo nel seguito].

Teorema (Approx. non lineare)

Consideriamo

$$\begin{array}{ccccc} K & \subseteq & C & \subseteq & Y \\ \nearrow \text{compatto} & & \uparrow \text{convesso} & & \uparrow \text{sp. normato} \end{array}$$

Sia $f: C \rightarrow K$ (così è automaticamente compatta)

Allora esistono $Y_n \subseteq Y$ s.sp. di dim. finita

$$K_n \subseteq Y_n \cap C \quad \text{compatti}$$

$$f_n: C \rightarrow K_n$$

tali che

$$f_n \rightarrow f \quad \text{unif. in } C$$

Se inoltre f è continua, allora f_n è continua

[Non vale che f lineare $\Rightarrow f_n$ lineare]

— o — o —

Lemma (Proiezione non lineare)

Sia

$$K \subseteq C \subseteq Y$$

$\uparrow$ compatto $\uparrow$ convesso $\uparrow$ sp. normato

Sia $\varepsilon > 0$.Allora esistono un s.sp. $Y_\varepsilon \subseteq Y$ di dim. finita

$$K_\varepsilon \subseteq C \cap Y_\varepsilon \text{ compatto}$$

$$P_\varepsilon : K \rightarrow K_\varepsilon$$

tale che

$$\|P_\varepsilon y - y\| \leq \varepsilon \quad \forall y \in K$$

Dim. Ci viene dato $\varepsilon > 0$.Essendo K tot. limitato,troviamo $y_1, \dots, y_k$ in K tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon) =: A_\varepsilon$$

$\uparrow$ aperto

$$\text{Pongo } Y_\varepsilon := \text{Span}(y_1, \dots, y_k)$$

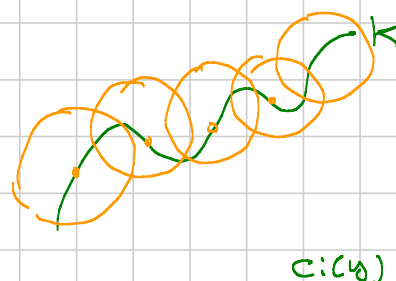
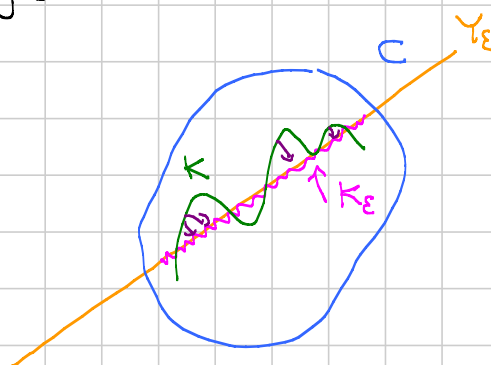
Per ogni $i = 1, \dots, k$ definisco la funzione CONETTO

$$c_i(y) := \max \{0, \varepsilon - \|y - y_i\|\}$$

$$\text{Osservo che } \sum_{i=1}^k c_i(y) > 0 \text{ in } A_\varepsilon$$

e pongo

$$\lambda_i(y) := \frac{c_i(y)}{\sum_{i=1}^k c_i(y)} \in [0, 1]$$



Osservo che $\lambda_i(y)$ è ben definita in A_ε , dunque in K , e vale

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(y) = 1 \quad \forall y \in K$$

Pongo infine

$$P_\varepsilon(y) := \sum_{i=1}^k \lambda_i(y) y_i \quad (\text{comb. convessa di } y_i)$$

Osservo che

- P_ε assume valori in Y_ε ed in C , quindi in $Y_\varepsilon \cap C$
- l'immagine di P_ε è contenuta nell'involuppo convesso di un numero finito di p.ti, e questo è un K_ε compatto
- verifico che per ogni $y \in K$ vale

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon y - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i(y) y_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i(y) y \right\| \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \sum \lambda_i = 1 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i(y) (y_i - y) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(y) \underbrace{\|y_i - y\|}_{\leq \varepsilon \text{ quando } \lambda_i(y) \neq 0} \\ &\leq \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^k \lambda_i(y)}_{=1} = \varepsilon \end{aligned}$$

Dim. Approx. non lineare

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ applico il lemma con $\varepsilon = \frac{1}{m}$. Trovo s.sp. $Y_m \subseteq Y$ di dim. finita, e trovo

$$P_m : K \rightarrow K_m \subseteq C \cap Y_m$$

e pongo

$$f_m(x) := P_m(f(x))$$

Per costruzione l'immagine di f_n è contenuta in un cpt. $K_n \subseteq Y_n \cap C$.

Devo verificare la conv. unif.

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|P_n(f(x)) - f(x)\| \leq \frac{1}{n}$$

↑
perché $f(x) \in K$
e la proiezione P_n
ha questa proprietà.

— o — o —

Oss. Sia $\{e_n\}$ base ortonormale in Hilbert separabile.

Sia $f: H \rightarrow H$ lineare con

$$f(e_n) = \lambda_n e_n$$

Allora f è compatta se e solo se $\lambda_n \rightarrow 0$

Dim. $\Rightarrow$ è il discorso che posso usare e_n come succ. line. e $\lambda_n e_n$ deve avere s. succ. di Cauchy

$\Leftarrow$ in questo caso è facile vedere che è lineare uniforme sui cpt. delle proiezioni finite dimensionali.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 50

Note Title

29/11/2018

TEOREMA DI BROUWER

Sia $d \geq 1$ intero. Sia $\bar{B}$ la palla chiusa in $\mathbb{R}^d$ con centro in o e raggio 1.

Sia $f: \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ continua.

Allora f ammette almeno un pto fisso.

Dim. Corsi di geometria.

Questo vale solo in dimensione finita

Brouwer più generale

Sia $d \geq 1$ intero. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^d$ convesso e chiuso e limitato.

Sia $f: C \rightarrow C$ continua.

Allora f ammette almeno un pto fisso

Dim.

Sia $\bar{B}$ una palla chiusa che contiene C . Sia $P: \bar{B} \rightarrow C$ la proiezione (esiste perché proiezione su convesso chiuso).

Considero $\hat{f}(x) = f(P(x)): \bar{B} \rightarrow \bar{B}$

Questa ha almeno un pto fisso $x \in \bar{B}$ che in realtà sta in C perché $x = \hat{f}(x) \in C$.

Oss. Sene davvero che C sia chiuso e limitato?

No: basta che C sia convesso e

$$f: C \rightarrow K \subseteq C$$

↑
compatto

[Aggiunto dopo video: questa versione + generale (comunque vera, una dimostrata usando Carathéodory) non sene dopo. Nella dim. di Schauder basta considerare le restrizioni $\hat{f}_n: K_n \rightarrow K_n$ e ricordare che K_n è involuppo convesso di un numero FINITO di punti di K , dunque convesso, compatto e $\subseteq C$].

Dim Prendiamo $\bar{B}$ che contiene K . Consideriamo $\bar{B} \cap C$: questo è convesso e definiamo

$$\hat{f}(x) := f(P_{C \cap \bar{B}}(x)) \quad \forall x \in C \cap \bar{B}$$

e tutto funziona come prima se C è chiuso.
 Non serve la chiusura di C se lo sostituisco con
 l'involuppo convesso di K , che è un compatto $\subseteq C$ (sembra
 che serva che ogni pto nell'involuppo convesso è comb. conv.
 di dti pti. [https://en.wikipedia.org/wiki/Carath%C3%A9odory%27s_theorem_\(convex_hull\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Carath%C3%A9odory%27s_theorem_(convex_hull))

↑ [Referenza aggiunta dopo video]

TEOREMA DI SCHAUDER

Consideriamo

$$\begin{array}{ccccc} K & \subseteq & C & \subseteq & Y \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{compatto} & & \text{convesso} & & \text{sp. normato} \end{array}$$

Sia $f: C \rightarrow K$ continua.

Allora f ammette almeno un p.to fisso.

Dim Idea: approssimo f come nel teo. di approx. e sfruttando che le approssimanti hanno p.ti fissi.

Per il teo. di approssimazione, esistono

$$Y_n \subseteq Y \quad \text{s.sp. di dim. finita}$$

$$K_n \subseteq C \cap Y_n \quad \text{compatto}$$

$$f_n: C \rightarrow K_n \quad \text{continue}$$

$$\text{tali che} \quad f_n \rightarrow f \quad \text{unif. su } C$$

$$\text{Considero} \quad C \cap Y_n =: C_n \quad \text{e}$$

$$\hat{f}_n: C_n \rightarrow K_n \subseteq C_n \quad (\text{tutto contenuto in } Y_n)$$

che sono le restrizioni delle f_n

Quindi per il Brouwer finito dimensionale, tutte le $\hat{f}_n$ hanno almeno un pto fisso, cioè

$$f_n(x_n) = x_n \quad x_n \in C_n \subseteq C$$

Ora $f(x_n) \in K$, quindi a meno di s.succ.

$$f(x_{n_k}) \rightarrow y_\infty$$

Dico che y_∞ è un pto fisso per f .

SE dimostro che $x_{n_k} \rightarrow y_\infty$ ho finito, perché

$$\begin{array}{ccccccc} f(y_\infty) & = & f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) & = & \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) & = & y_\infty \\ \uparrow \text{SE} & & \uparrow f \text{ cont.} & & \uparrow \text{def. di } y_\infty & & \end{array}$$

$$\|x_{n_k} - y_\infty\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } x_{n_k}}}{=} \|f_{n_k}(x_{n_k}) - y_\infty\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})\| + \|f(x_{n_k}) - y_\infty\| \\ &\leq \sup_{x \in C} \|f_{n_k}(x) - f(x)\| \quad \downarrow \text{ per def. di } y_\infty \\ &\quad \downarrow \\ &\quad 0 \text{ per conv. unif.} \end{aligned}$$

Oss. Controllare SE e DOVE serve la completezza di Y .

Teorema di sola esistenza per eq. diff. $\dot{u} = f(t, u)$

3 tipi di dim: $\rightarrow$ approssimando f con f_n Lip
 $\rightarrow$ approssimando l'eq. stile Tonelli
 $\rightarrow$ via Schauder

Dim. Setting: $\dot{u} = f(t, u)$ $u(t_0) = u_0$
 $t_0 \in \mathbb{R}$ $u_0 \in \mathbb{R}^k$

$$f: \underbrace{[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(u_0, r)}_R \quad \delta > 0 \quad r > 0$$

$$M := \sup \{ |f(t, u)| : (t, u) \in R \}$$

Sia δ_0 t.c. $\delta_0 \leq \delta$ e $M\delta_0 < r$

Tesi: esiste una soluzione $u: [t_0, t_0 + \delta_0] \rightarrow \overline{B}(u_0, r)$

Risolvere l'equazione + dato iniziale è equiv. a trovare un p.to fisso per l'operatore di Volterra

$$[\Phi(u)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Dal momento che la soluzione può non essere unica, il teo. delle contrazioni non si può usare.

Considero

$$Y := \{ u \in C^0([t_0, t_0 + \delta_0], \mathbb{R}^k) \}$$

con la norma del sup.

Questo è uno sp. normato (e se serve pure completo)

$$C := \{ u \in C^0([t_0, t_0 + \delta_0], \overline{B}(u_0, r)) \}$$

Questo è convesso (e se serve anche chiuso)

$$K := \{ u \in C : u \text{ è lip. con costante } \leq M \}$$

Questo è compatto per Ascoli - Arzelà

Basta dimostrare che $\Phi : C \rightarrow K$ ed è continua

- Il fatto che $\Phi : C \rightarrow C$ segue dal fatto che $M\delta_0 \leq 1$ (vedi analisi 2)
- Il fatto che $\Phi(u) \in K$ segue dal fatto che la derivata di $\Phi(u)$ esiste e sta in $[-M, M]$
- La continuità di Φ segue dal fatto che

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ in } Y \Rightarrow u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif. in } [t_0, t_0 + \delta]$$

$$\Rightarrow f(t, u_n(t)) \rightarrow f(t, u_\infty(t)) \text{ unif. (analisi 2)}$$

$$\Rightarrow \text{le primitive convergono unif.}$$

Per Schauder Φ ammette almeno un pto fisso.

— • — • —

Morale : gli operatori che "regolarizzano" tendono ad essere compatti

Esempio $H = L^2((0,1))$ e considero la primitiva

$$(Af)(x) := \int_{\frac{1}{3}}^x f(s) ds \quad \forall f \in H$$

Si vede che $A : H \rightarrow H$ ed è lineare

Dico che è compatto. (Moralmente: regolarizza!)

$\{f_n\} \subseteq H$ limitata. Allora $\{Af_n\}$ sono equi $\frac{1}{2}$ -Hölder e quindi per A.A. ammettono s.succ. conv. unif.

quindi a maggior ragione in L^2 .

$$\text{Idem se } A : L^{2018} \rightarrow L^{8102}.$$

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 51

Note Title

30/11/2018

APPLICAZIONI LINEARI E CONTINUE

Domande:

- ① Se V e W sono sp. vett., esistono $f: V \rightarrow W$ lineari $\neq 0$?
- ② Se in aggiunta V e W sono sp. normati: esistono $f: V \rightarrow W$ lineari e continue $\neq 0$?
- ③ Come sopra, esistono $f: V \rightarrow W$ lineari NON continue.

CA : Choice Axiom

Risposta ① CA $\Rightarrow$ esiste base algebrica (base di HAMEL)
 $\Rightarrow$ usando la base dove mi pare e costruisco $f: V \rightarrow W$

Prop. ($\neq$ sfumature di continuità)Sia V e W sp. normati, e sia $f: V \rightarrow W$ LINEARE

Allora sono equivalenti i seguenti

- (i) f è continua ε/δ
- (ii) f è cont. per succ.
- (iii) f manda limitati di V in limitati di W
- (i') f è cont. ε/δ in 0
- (ii') f è cont. per succ. in 0
- (iii') $f(B_V(0,1))$ è limitato in W
- (iv) f è Lipschitziana

Dim (i) $\Rightarrow$ (i'), (ii) $\Rightarrow$ (ii'), (iii) $\Rightarrow$ (iii') sono ovvie.(i) $\Leftrightarrow$ (ii) vale più in gen. in spazi metrici(i') $\Rightarrow$ (i) segue dalla linearità(ii') $\Rightarrow$ (ii) " "(iii') $\Rightarrow$ (iii) segue dalla linearità $f(B_X(0,m)) = m f(B_X(0,1))$

(iv) $\Rightarrow$ tutto è ovvio

(iii') $\Rightarrow$ (iv) Supponiamo $f(\bar{B}_V(0,1)) \subseteq \bar{B}_W(0,M)$

Allora per ogni $v \in V$ con $v \neq 0$ essendo che

$\frac{v}{\|v\|_V} \in \bar{B}_V(0,1)$ e quindi

$$\frac{1}{\|v\|_V} f(v) = f\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right) \in \bar{B}_W(0,M) \quad \text{e quindi}$$

$$\frac{1}{\|v\|_V} \cdot \|f(v)\|_W \leq M$$

da cui $\|f(v)\|_W \leq M \|v\|_V$ e questa per linearità è la lip., in quanto

$$\|f(v_2) - f(v_1)\|_W = \|f(v_2 - v_1)\|_W \leq M \|v_2 - v_1\|_V$$

Risposta ③: se V ha dim. infinita, allora esistono
 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineari ma non continue

- Se $\dim(V) = +\infty$, possiamo trovare $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ di vettori lin. indip. con $\|v_m\|_V = 1$.
- Con CA li completi ad una base di Hamel
- Definisco f ponendo $f(v_m) = m$ e $f(\text{altri el. base}) = 0$.
- Questa è lineare ma non continua perché (iii) non va

Per rispondere a ②, serve HB.

[Aggiunto dopo video: nella dim. delle 7 sfumature, manca qualcosa che colleghi (i) o (ii) a (iii), del tipo (i) $\Rightarrow$ (iii'). Questa è semplice perché dalla continuità segue che $\exists \epsilon > 0$ t.c. $f(\bar{B}_V(0,1)) \subseteq \bar{B}_W(0,\epsilon)$, e di conseguenza $f(\bar{B}_V(0,1)) \subseteq \frac{1}{n} \bar{B}_W(0,1) = \bar{B}_W(0,\frac{1}{n})$]

Def. (Pseudo-norma) Sia V uno sp. vett.

Una pseudo-norma in V è una funzione $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$(i) \quad p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2) \quad (\text{subadditività})$$

$$(ii) \quad p(\lambda v) = \lambda p(v) \quad \forall v \in V \quad \forall \lambda > 0$$

(omogeneità positiva)

Non ci sono ipotesi di segno.

TEOREMA DI HAHN-BANACH (teo. di estensione)

Sia V sp. vett. e sia $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ una pseudo-norma su V .

Sia $E \subseteq V$ s.sp. vett., e sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ un'applic.

Lineare tale che

$$f(v) \leq p(v) \quad \forall v \in E \quad (\text{senza val. assol.})$$

Allora esiste $\hat{f}: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che

$$\hat{f}(v) \leq p(v) \quad \forall v \in V$$

$$\hat{f}(v) = f(v) \quad \forall v \in E$$

Dim. Consideriamo $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le coppie (F, g) tale che

- F è un s.sp. vett. con $F \supseteq E$
- $g: F \rightarrow \mathbb{R}$ è una estensione di f che verifica la stima con la pseudo-norma in F .

Su $\mathcal{F}$ è possibile definire un ordinamento parziale

$$(F_2, g_2) \geq (F_1, g_1) \Leftrightarrow \begin{aligned} &F_2 \supseteq F_1 \\ &g_2 = g_1 \text{ su } F_1 \end{aligned}$$

In questo ordinamento tutte le sotto-famiglie tot. ordinale ammettono un maggiorante $\{(F_i, g_i)\}_{i \in I}$

Il maggiorante è del tipo $F_\infty := \bigcup_{i \in I} F_i$ con g_∞ def. compatib.

CA $\Rightarrow$ ZORN $\Rightarrow$ esiste estensione massimale (non ulteriormente estendibile).

Sia (F, g) l'estensione massimale. Claim! $F = V$.

Se così non fosse esisterebbe $v_0 \in V \setminus F$. Faccio vedere che posso estendere g a $F + \mathbb{R}v_0$.

Basta trovare $g(v_0)$ e poi porre

$$g(u + \alpha v_0) := g(u) + \alpha g(v_0)$$

L'unico pbm. è che deve valere la stima

$$g(u + \alpha v_0) \leq p(u + \alpha v_0) \quad \forall u \in F \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- Se $\alpha = 0$ è ovvio
- Se $\alpha > 0$ raccoglio e porto fuori (uso omog. di p)

$$\alpha g\left(\frac{u}{\alpha} + v_0\right) \leq \alpha p\left(\frac{u}{\alpha} + v_0\right)$$

$\uparrow$
 generico elem.
 di F

quindi la stima vale se e solo se

$$g(w + v_0) \leq p(w + v_0) \quad \forall w \in F$$

- Se $\alpha < 0$ pongo $\alpha = -\beta$ con $\beta > 0$ e raccogliendo

$$g(v - \beta v_0) \stackrel{?}{\leq} p(v - \beta v_0)$$

$$\cancel{\beta} g\left(\frac{v}{\beta} - v_0\right) \stackrel{?}{\leq} \cancel{\beta} p\left(\frac{v}{\beta} - v_0\right)$$

quindi vale la stima se e solo se

$$g(z - v_0) \leq p(z - v_0) \quad \forall z \in F$$

Conclusione: devo scegliere $g(v_0)$ tale che

$$\begin{aligned} g(w) + g(v_0) &\leq p(w + v_0) \\ g(z) - g(v_0) &\leq p(z - v_0) \end{aligned}$$

$$g(z) - p(z - v_0) \leq g(v_0) \leq p(w + v_0) - g(w)$$

deve essere vera $\forall z \in F$ e $\forall w \in F$

Posso trovare $g(v_0)$ e dimostro che

$$g(z) - p(z - v_0) \leq p(w + v_0) - g(w) \quad \forall (z, w) \in F^2$$

Questa è vera perché

$$g(z) + g(w) = \underset{\uparrow \text{lin.}}{g(z+w)} \leq \underset{\uparrow \text{stima di } F}{p(z+w)} \leq \underset{\uparrow \text{sub-additività}}{p(z-v_0) + p(w+v_0)}$$

e questa è equiv. a quella di sopra 😊

— o — o —

COROLLARIO (Funzionale ALLINEATO)

Sia V sp. normato e sia $v_0 \in V$.

Allora esiste $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che

$$f(v_0) = \|v_0\|_V$$

e

$$|f(v)| \leq \|v\|_V \quad \forall v \in V \quad (\text{1-lip.})$$

Dim Pongo $E := \mathbb{R}v_0$ e definisco $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\varphi(\alpha v_0) = \alpha \|v_0\|_V$$

e uso la norma di V come pseudo-norma.

È ovvio che $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare e soddisfa

$$|\varphi(\alpha v_0)| = |\alpha| \cdot \|v_0\|_V \leq \|\alpha v_0\|_V$$

Per HB esiste una estensione, che è la f cercata.

—○—○—

Risposta (2) Se $W \neq \{0\}$ e $V \neq \{0\}$, allora esistono
 $f: V \rightarrow W$ lineari e continue

Dim. Da V in $\mathbb{R}$ uso il funzionale allineato, poi
da $\mathbb{R}$ in W è facile trovare applic.

Componendo ho $f: V \rightarrow W$

—○—○—

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 52

Note Title

30/11/2018

Oss 1 In uno spazio di Hilbert H , un (ma presto sarà il) funzionale allineato è

$$f(v) = \frac{1}{\|v_0\|} \langle v, v_0 \rangle \quad \forall v \in H$$

(almeno se $v_0 \neq 0$)

Oss 2 Il funzionale allineato NON è nec. unico

Esempio classico $V = \mathbb{R}^2$ con la norma 1

$$\|(x, y)\|_1 := |x| + |y|$$

$v_0 = (1, 0)$ e scopriamo che ci sono almeno 2 funz. all.

$$f_1(x, y) = x$$

$$f_1(1, 0) = 1 = \|(1, 0)\|_1$$

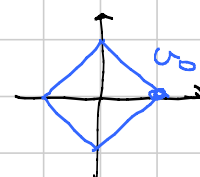
$$|f_1(x, y)| = |x| \leq |x| + |y| = \|(x, y)\|_1$$

$$f_2(x, y) = x + y$$

$$f_2(1, 0) = 1 ; \quad |f_2(x, y)| = |x + y| \leq |x| + |y| = \|(x, y)\|_1$$

Anche $f_2(x, y) = x + 2y$ è allineato se $|2| \leq 1$

La NON unicità dipende dal fatto che la palla unitaria ha "un angolo" in v_0



SPAZI DI APPLICAZIONI LINEARI CONTINUE

Def. Siano V e W sp. normati.

Si indica con $\mathcal{L}(V, W)$ l'insieme delle funzioni $f: V \rightarrow W$ lineari e continue.

Def. Per ogni $f \in \mathcal{L}(V, W)$ si pone

$$\|f\|_{\mathcal{L}(V, W)} := \sup \{ \|f(v)\|_W : v \in V \text{ e } \|v\|_V = 1 \}$$

è il famoso M di (iii')

cioè la costante di Lip. di f

Prop. Siano V, W e $\mathcal{L}(V, W)$ come sopra.

Allora

(1) $\mathcal{L}(V, W)$ è uno sp. vett. e quella definita è una norma

(2) Vale la stima

$$\|f(v)\|_W \leq \|f\|_{\mathcal{L}(V, W)} \cdot \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

(3) Se W è sp. di Banach, allora $\mathcal{L}(V, W)$ è Banach.

Dim. (1) Facile esercizio

(2) Idem

(3) Prendo $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(V, W)$ succ. di Cauchy.

Devo dim. che $f_n \rightarrow f_\infty$ in $\mathcal{L}(V, W)$

Prima devo definire f_∞ . Dato $v \in V$, grazie alla (2) so che $\{f_n(v)\}$ è di Cauchy in W

$$\|f_n(v) - f_m(v)\|_W = \|(f_n - f_m)(v)\|_W$$

$$\stackrel{(2)}{\leq} \underbrace{\|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(V, W)}}_{\text{piccolo se } n, m \text{ grandi}} \cdot \|v\|_V$$

Essendo W sp. di Banach $f_n(u) \rightarrow \text{qualcosa} =: f_\infty(u)$
 Per il momento è conv. puntuale, che basta per
 garantire che f_∞ è lineare.

Basta anche per garantire che f_∞ è continua, perché
 (fatto generale) il limite puntuale di funzioni
 equi-lip. è lip.

Se ne sa conv. rispetto alla norma di $\mathcal{L}(V, W)$.

- Ci viene dato $\varepsilon > 0$
- Scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(V, W)} \leq \varepsilon$
 per ogni $n, m \geq n_0$
- Per ogni $u \in V$ con $\|u\|_V \leq 1$ vale

$$\|f_n(u) - f_m(u)\|_W \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(V, W)} \cdot \|u\|_V \leq \varepsilon$$

se n, m sono $\geq n_0$

- Mandando $m \rightarrow +\infty$ e ottengo

$$\|f_n(u) - f_\infty(u)\|_W \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall u \text{ con } \|u\|_V \leq 1$$

- Facendo il sup su tutti i u con $\|u\|_V \leq 1$ ottengo

$$\|f_n - f_\infty\|_{\mathcal{L}(V, W)} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Oss. Il sup nella def. di norma in $\mathcal{L}(V, W)$ può anche
 essere un max.

Esempio 1 $W = \mathbb{R}$, $V := \{u \in C^0([0, 1]) : u(0) = 0\}$
 con la norma del sup.

V è un Banach. Definisco $f: V \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(u) := \int_0^1 u(x) dx$$

Si vede che f è 1-lip., ma non esiste $u \in V$ con $\|u\|_V \leq 1$ tale che $f(u) = 1$ (dovrebbe essere $u \equiv 1$)

Esempio 2 $V = W = H = L^2((0,1))$ $A: H \rightarrow H$ def. da

$$(Au)(x) := xu(x) \quad \forall u \in H$$

Si vede che A è lineare e 1-lip (senza $x^2 \leq 1$)
ma la costante non si realizza mai.

— 0 — 0 —

Def. (Duale topologico) Sia V sp. normato
Si definisce duale (topologico) V' l'insieme delle applic.
 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineari e continue. Si indica con V' .

Oss. Si tratta di $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ con norma

$$\|f\|_{V'} := \sup \{ |f(u)| : u \in V \text{ e } \|u\| \leq 1 \}$$

Osservo che V' è sempre un Banach, anche se V non lo era (prop. di prima con $W = \mathbb{R}$).

Caratterizzazione duale della norma

Sia V sp. normato, e sia V' il suo duale (topologico).
Allora per ogni $u \in V$ vale

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup \{ |f(u)| : f \in V' \text{ con } \|f\|_{V'} \leq 1 \} \\ &= \max \{ \quad \quad \quad \} \end{aligned}$$

Dim. $\boxed{\geq}$ $|f(u)| \leq \underbrace{\|f\|_{V'}}_{\leq 1} \cdot \|u\|_V \leq \|u\|_V$

$\boxed{\leq}$ (ed esistenza max) è il funzionale allineato

Tutte le dim. per dualità di analisi 2 passano dalla caratt. duale della norma

Esercizio Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ misurabile, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ integrabile (anche continua su una palla)
Allora

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx$$

Ad analisi 2 di solito si dimostra per la norma euclidea. Ma vale per altre norme?

Sia $\|\cdot\|$ una norma qualunque su $\mathbb{R}^d$. Per ogni $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ lineare vale

$$L\left(\int_{\Omega} f(x) dx\right) = \int_{\Omega} L(f(x)) dx \quad (\text{sono numeri})$$

[Questo segue da $L(x) := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_d x_d$]

Ma allora se $\|L\|_{V'} \leq 1$ si ha che

$$\begin{aligned} \left| L\left(\overbrace{\int_{\Omega} f(x) dx}^{\text{vettore}}\right) \right| &= \left| \int_{\Omega} L(f(x)) dx \right| \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{val. absol. di} \\ \text{un numero}}}{\leq} \int_{\Omega} |L(f(x))| dx \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{disug.} \\ \text{Analisi 1}}}{\leq} \int_{\Omega} \underbrace{\|L\|_{V'}}_{\leq 1} \|f(x)\|_V dx \\ &\leq \int_{\Omega} \|f(x)\|_V dx \end{aligned}$$

Facendo il sup su L al LHS trovo $\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\|_V$.

Oss. Tutta la parte iniziale di Analisi 2 si può enunciare tra spazi normati!

Ad esempio la nozione di diff. $f: V \rightarrow W$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + L(R) + o(\|R\|)$$

↑ elemento di $\mathcal{L}(V, W)$

Se x e y sono punti di V , allora

$$\|f(y) - f(x)\|_W \leq \|y - x\|_V \|L(c)\|_{\mathcal{L}(V, W)}$$

↑
p.to misterioso nel
segmento di estremi
 x e y .

Dom. Stessa di Analisi 2. Si parte considerando

$$\Delta(f(y) - f(x))$$

al variare di Δ in W' con $\|\Delta\|_{W'} \leq 1$.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 53

Note Title

03/12/2018

CONVERGENZA DEBOLE E DEBOLE *

(convergenza, non TOPOLOGIA)

Def. Sia V sp. normato, sia V' il duale topologico (è sempre Banach)(1) Sia $\{u_m\} \subseteq V$ una succ. e sia $u_\infty \in V$.Si dice che $u_m \rightarrow u_\infty$ (debole) se

$$f(u_m) \rightarrow f(u_\infty) \quad \forall f \in V'$$

$\uparrow$ conv. di numeri

(Intuitivamente: negli sp. normati gli el. di V' sono in un certo senso le componenti di un vettore)(2) Sia $\{f_m\} \subseteq V'$ una succ. e sia $f_\infty \in V'$.Si dice che $f_m \xrightarrow{*} f_\infty$ (debole*) se

$$f_m(u) \rightarrow f_\infty(u) \quad \forall u \in V$$

$\uparrow$ conv. di numeri

(Si tratta della conv. puntuale di analisi 2)

Proprietà semplici

- Unicità del limite
- Linearità
- Forte $\Rightarrow$ debole

} quasi ovvie

[Dim. unicità per il limite debole] Supponiamo che

$$u_m \rightarrow u_\infty$$

$$u_m \rightarrow \hat{u}_\infty$$

$$f(u_m) \rightarrow f(u_\infty)$$

$$f(u_m) \rightarrow f(\hat{u}_\infty) \quad \forall f \in V'$$

Basta trovare $f \in V'$ t.c. $f(u_\infty) \neq f(\hat{u}_\infty)$, cioè

$$f(u_\infty - \hat{u}_\infty) \neq 0$$

Basta prendere $f :=$ funzione allineata con $u_\infty - \hat{u}_\infty$.

[Abbiamo usato HB, cioè CA!]

TEOREMA (Sci della norma)

Sia V sp. normato, sia V' il duale top.

(1) Se $u_n \rightarrow u_\infty$ in V , allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_V \geq \|u_\infty\|_V$$

(2) Se $f_n \xrightarrow{*} f_\infty$ in V' , allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{V'} \geq \|f_\infty\|_{V'}$$

Dim. (1) Serve la caract. duale della norma. Per ogni $f \in V'$ con $\|f\|_{V'} \leq 1$ vale

$$|f(u_n)| \leq \|f\|_{V'} \cdot \|u_n\|_V \leq \|u_n\|_V$$

e quindi

$$|f(u_\infty)| \overset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di} \\ \text{conv. debole}}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} |f(u_n)| \overset{\substack{\downarrow \\ f(u_\infty)}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_V$$

Si conclude osservando che $\|u_\infty\|_V = \sup_{\max} \text{LHS su } \|f\|_{V'} \leq 1$.

[In realtà basterebbe fare il conto con funz. allineato con u_∞]

(2) Per ogni $u \in V$ con $\|u\|_V \leq 1$ vale

$$|f_n(u)| \leq \|f_n\|_{V'} \cdot \|u\|_V \leq \|f_n\|_{V'}$$

da cui

$$|f_\infty(u)| \overset{\substack{\downarrow \\ \text{def. conv. } *}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(u)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{V'}$$

Ora $\|f_\infty\|_{V'}$ è il sup del LHS su tutti i $\|u\|_V \leq 1$.

TEOREMA (Compattezza debbe * delle palle del duale)

Sia V sp. normato, sia V' il duale, sia $\{f_n\} \subseteq V'$ una succ.

Supponiamo che

(i) $\{f_n\}$ è limitata, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|f_n\|_{V'} \leq M$
per ogni $n \in \mathbb{N}$,

(ii) V sia separabile.

Allora $\{f_n\}$ ammette s.succ. debole * convergente $f_{n_k} \xrightarrow{*} f_\infty$.

Achtung! Non c'è un "duale" di questo teorema in V .

Dim Prendiamo $D \subseteq V$ denso e numerabile.

Per ogni $d \in D$ osserviamo che

$$|f_n(d)| \leq \|f_n\|_{V'} \cdot \|d\|_V \leq M \cdot \|d\|_V$$

quindi volendo esiste una s.succ. conv.

Essendo D numerabile, esiste f_{n_k} tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(d) \text{ esiste per ogni } d \in D$$

" $f_\infty(d)$

Per il momento $f_\infty : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Voglio dim. che $f_{n_k}(v)$ converge per ogni $v \in V$, senza ulteriori s.succ.

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(v) - f_{n_q}(v)| &\leq |f_{n_k}(v) - f_{n_k}(d)| \leq M \|v - d\|_V \\ &\quad + |f_{n_k}(d) - f_{n_q}(d)| \\ &\quad + |f_{n_q}(d) - f_{n_q}(v)| \leq M \|v - d\|_V \end{aligned}$$

Formalmente:

- ci viene dato $\varepsilon > 0$
- Scegliamo $d \in D$ t.c. 1^a e 3^a riga $\leq \frac{1}{4} \varepsilon$
- visto il d , scegliamo $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. 2^a riga $\leq \frac{1}{4} \varepsilon$ appena $k, k \geq k_0$
- questo mostra che $\{f_{n_k}(v)\}$ è di Cauchy, quindi ha un limite che chiamiamo $f_\infty(v)$.

Ora abbiamo def. $f_\infty : V \rightarrow \mathbb{R}$. Sta in V' ?

Questo è vero perché

→ Dim. puntuale di lineari è lineare

→ " " " M -lip è M -lip.

— o — o —

Oss. Dove si inceppa la dim. se dualizzo tutto?

$D \subseteq V'$ denso. Per ogni $f \in V'$ vale $f(u_n)$ limitata, quindi

$$f(u_{n_k}) \rightarrow \text{q.c.} \quad \forall f \in D$$

↑
dovrebbero essere $f(u_\infty)$. Voglio trovare un vettore con un po' di sue "componenti"

Mettiamo anche che $f(u_{n_k}) \rightarrow \text{q.c.} \quad \forall f \in V'$.

Nessuno mi dice che esiste un vettore t.c. $\text{q.c.} = f(u_\infty)$.

Finestra sul futuro: posso dire che $\text{q.c.} \in (V')'$ e vonei tanto che questo fosse $V \dots$

— o — o —

SEPARAZIONE MEDIANTE IPERPIANI

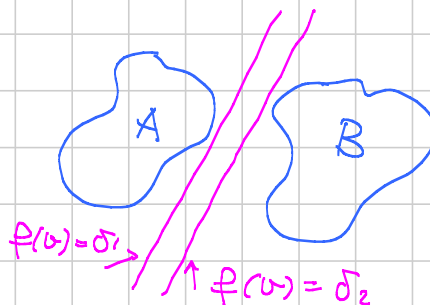
Def. Siano V e V' come sempre, siano $A \subseteq V$ e $B \subseteq V$

- Si dice che $f \in V'$ separa debolmente A e B se

$$f(a) < f(b) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

- Si dice che $f \in V'$ separa strettamente A e B se esistono $\delta_1 < \delta_2$ t.c.

$$f(a) \leq \delta_1 < \delta_2 \leq f(b) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$



Teorema 1 (Separazione debole) (1ª forma geom. di HB)

Sia V, V', A, B come nella def.

Supponiamo che

- (i) $A \cap B = \emptyset$
- (ii) A convesso aperto
- (iii) B convesso

Allora esiste una separazione debole

Teorema 2 (Separazione stretta) (2ª forma geom. di HB)

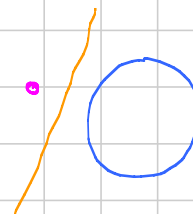
Siano V, V', A, B come nella def.

Supponiamo che

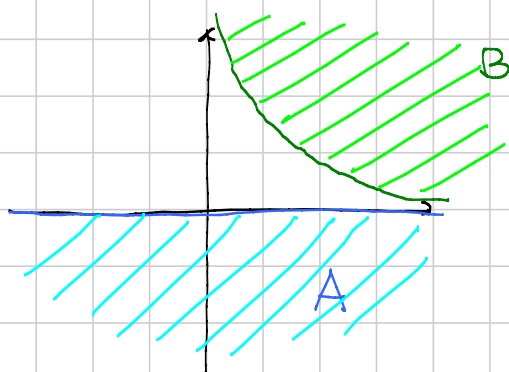
- (i) $A \cap B = \emptyset$
- (ii) A convesso compatto
- (iii) B convesso chiuso

Allora esiste una separazione stretta.

Corollario teo. 2 Esiste sempre separazione stretta tra un p.to ed un convesso chiuso che non lo contiene.



Oss. Non bastano due convessi chiusi per avere separazione stretta, nemmeno in $\mathbb{R}^2$



Una separazione debole esiste ed è data da $f(x,y) := y$

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 54

Note Title

03/12/2018

Teorema Sia V sp. normato, e sia $A \subseteq V$ un sottoinsieme.

Supp. che

(i) A è convesso

(ii) A è fortemente chiuso, cioè se $u_m \rightarrow u_\infty$ forte e $u_m \in A$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, allora $u_\infty \in A$.

Allora A è chiuso debole, cioè se $u_m \rightarrow u_\infty$ debole e $u_m \in A$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, allora $u_\infty \in A$.

Dim. Supponiamo $u_\infty \notin A$. Per il condizionale di separazione forte esistono $f \in V'$ e $\delta_1 < \delta_2$ t.c.

$$f(a) \leq \delta_1 < \delta_2 = f(u_\infty) \quad \forall a \in A$$

Ma allora

$$f(u_m) \leq \delta_1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

e passando al limite pure $f(u_\infty) \leq \delta_1$. Assurdo.

— o — o —

Teorema Sia V sp. normato, e sia $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ (non nec. lineare).

Supponiamo che

(i) φ è convessa

(ii) φ è sci forte

Allora φ è sci debole.

Dim. Data una qualunque $u_m \rightarrow u_\infty$ debole, devo dire che

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \varphi(u_m) \geq \varphi(u_\infty)$$

Se il LHS è $+\infty$, è fatta.

Supponiamo wlog che LHS = $l \in \mathbb{R}$.

Sia u_{m_k} la succ. che l_0 realizza, cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(u_{m_k}) = l$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo il sottolivello

$$S_\varepsilon := \{ u \in V : \varphi(u) \leq l + \varepsilon \}$$

↑ serve per averlo chiuso

Essendo φ sci e convessa, S_ε è convesso e chiuso forte per ogni $\varepsilon > 0$. Ora $u_{m_k} \in S_\varepsilon$ definitivamente in k . Poiché S_ε è anche chiuso debole per il te. prec., ne segue che $u_\infty \in S_\varepsilon$ e quindi $\varphi(u_\infty) \leq l + \varepsilon$.

Essendo ε arbitrario segue che $\varphi(u_\infty) \leq l$.

Prop. (Pseudo-norma associata ad un convessa)
(Gauge in inglese, jauge in francese)

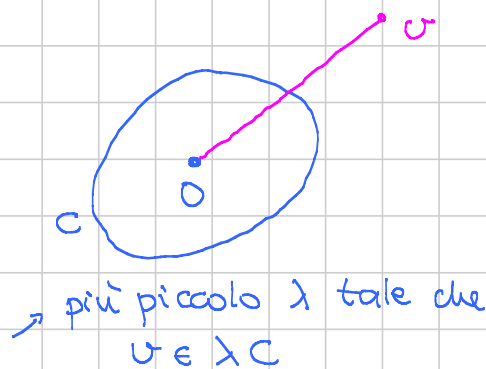
Sia V sp. normato, e sia $C \subseteq V$.

Supponiamo che

- (i) C è convesso
- (ii) C è aperto
- (iii) C contiene 0.

Per ogni $v \in V$ poniamo

$$p(v) := \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{v}{\alpha} \in C \right\}$$



Allora valgono le seguenti proprietà

- (1) p è una pseudo-norma
- (2) esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $0 \leq p(v) \leq M \|v\|$ per ogni $v \in V$
- (3) vale

$$C = \{ v \in V : p(v) < 1 \} \quad (\text{specie di palla unitaria})$$

Dim $p(v) := \inf \underbrace{\left\{ \alpha > 0 : \frac{v}{\alpha} \in C \right\}}_{A(v)}$

Osservo che l'insieme $A(v)$

- è $\neq \emptyset$ (qui serve che una certa $B(0, r) \subseteq C$)
- è una semiretta destra
- è aperto (qui serve che C è aperto).

(1) Devo verificare due cose

- $p(\lambda v) = \lambda p(v)$ per ogni $v \in V$ e $\lambda > 0$. Questo segue da $A(\lambda v) = \lambda A(v)$

- $p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2)$

Questo è dimostrato se facciamo vedere che

$$A(v_1 + v_2) \supseteq A(v_1) + A(v_2)$$

(poi sono proprietà degli inf.)

Dati $\alpha_1 \in A(v_1)$ e $\alpha_2 \in A(v_2)$ devo dimostrare che $\alpha_1 + \alpha_2 \in A(v_1 + v_2)$

$$\frac{v_1 + v_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \underbrace{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}}_{\in C} \underbrace{\frac{v_1}{\alpha_1}}_{\in C} + \underbrace{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}}_{\in C} \underbrace{\frac{v_2}{\alpha_2}}_{\in C} \in C$$

hanno somma a 1: qui uso C convesso

(2) $p(v) \geq 0$ è ovvio. Per $p(v) \leq M \|v\|$, prendo $r > 0$ t.c.

$$\overline{B}(0, r) \subseteq C$$

e osserviamo che per ogni $v \in V \setminus \{0\}$ vale $r \frac{v}{\|v\|} \in C$
cioè $\frac{\|v\|}{r} \in A(v)$

$$\text{quindi } p(v) \leq \frac{\|v\|}{r} = M \|v\| \quad \uparrow \frac{1}{r}$$

(3) Devo dire due cose

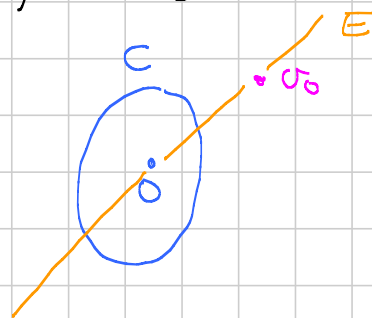
- Se $u \in C$, allora $p(u) < 1$
(infatti $\exists \epsilon \in A(u)$, ma essendo $A(u)$ aperto d'inf., cioè $p(u)$ sarà < 1)
- Se $p(u) < 1$, allora $u \in C$
(se $p(u) < 1$, allora $\exists \epsilon \in A(u)$, cioè $\frac{u}{\epsilon} \in C$).

Prop. 0 Sia V sp. normato, sia $C \subseteq V$, sia $u_0 \in V$.

Supponiamo che

- (i) $u_0 \notin C$
- (ii) C è convesso aperto
- (iii) C contiene l'origine.

Allora posso separare debolmente u_0 da C



Dim. Prendo la pseudo-norma associata a C .
Prendo il sottospazio $E \subseteq V$ definito come $\mathbb{R}u_0$.
Definisco $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(\alpha u_0) = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Osservo che è lineare e verifica la stima

$$f(\alpha u_0) \leq p(\alpha u_0) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

[Se $\alpha \leq 0$, allora è ovvio. Per $\alpha > 0$ devo dire che

$$f(u_0) \leq p(u_0)$$

" e sappiamo che $p \geq 1$ fuori da C]

HB fa il lavoro sporco e fornisce $\hat{f}: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineare che estende f e verifica

$$\hat{f}(u) \leq p(u) \quad \forall u \in V$$

Questa $\hat{f}$ è la separazione cercata. Infatti

$$\hat{f}(v) \leq p(v) \leq 1 = f(v_0) \quad \forall v \in C$$

Manca la continuità, ma questa segue da

$$\hat{f}(v) \leq p(v) \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

[Applicandola con v e $-v$ la ottengo con il valore assoluto al LHS].

— o — o —

Prop. 1 Sia V sp. norm., sia $C \subseteq V$, sia $v_0 \in V$ t.c.

(i) C è convesso e aperto

(ii) $v_0 \notin C$

Allora esiste separazione debole di v_0 da C

Dim. Prendiamo $w_0 \in C$ e poniamo

$$\hat{C} := C - w_0$$

$$\hat{v}_0 := v_0 - w_0$$

Questi ricadono nelle ipotesi della Prop. 0

— o — o —

Dim. Teo. sep. debole

$$A \cap B = \emptyset$$

A convesso aperto

B convesso

Introduco $C := A - B = \{a - b : a \in A \text{ e } b \in B\}$

Si verifica che

- C è convesso e aperto (unione di traslati di A)
- $0 \notin C$

Ma allora posso separare 0 da C , cioè $\exists f \in V'$ t.c.

$$0 = f(0) < f(a - b), \text{ cioè}$$

$$f(b) < f(a) \quad \forall b \in B \quad \forall a \in A$$

Dim. teo. sep. forte

$$A \cap B = \emptyset$$

A convesso compatto

B convesso chiuso

Li ε -allargo ponendo

$$A_\varepsilon := A + B(0, \varepsilon)$$

$$B_\varepsilon := B + B(0, \varepsilon)$$

Per $\varepsilon > 0$ piccolo sono disgiunti. Diciamo per $\varepsilon = \frac{1}{n}$
con n grande.

Se non fosse così, avrebbero un elemento in comune

$$\underbrace{a_m}_{\in A} + \underbrace{z_m}_{\in B(0, \frac{1}{n})} = \underbrace{b_m}_{\in B} + \underbrace{w_m}_{\in B(0, \frac{1}{n})} \quad \text{per } m \text{ valori di } n$$

Essendo A compatto

$$a_{m_k} \rightarrow a_\infty$$

Ma allora pure

$$b_{m_k} \rightarrow a_\infty$$

$$b_m = \underbrace{a_m}_{\rightarrow a_\infty} + \underbrace{z_m}_{\rightarrow 0} - \underbrace{w_m}_{\rightarrow 0}$$

Essendo A_ε e B_ε disgiunti e aperti, li posso
separare debolmente

$$f(a + \varepsilon_0 v) < f(b + \varepsilon_0 w)$$

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B$$

$$\forall v \in B(0, 1)$$

$$\forall w \in B(0, 1)$$

Per dim. che la sep. è stretta prendo $v_0 \in B(0, 1)$ con
 $f(v_0) > 0$, prendo un reale c che sta nella separazione
dei due insiemi

$$f(a) = f(a + \varepsilon_0 v_0 - \varepsilon_0 v_0) = f(a + \varepsilon_0 v_0) - \varepsilon_0 f(v_0) \leq c$$

$$f(b) = f(b - \varepsilon_0 v_0 + \varepsilon_0 v_0) = f(b - \varepsilon_0 v_0) + \varepsilon_0 f(v_0) \geq c$$

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 55

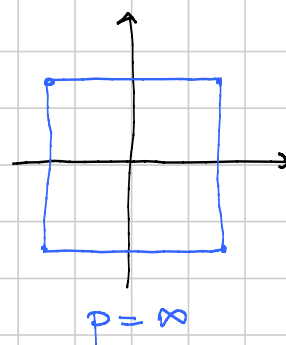
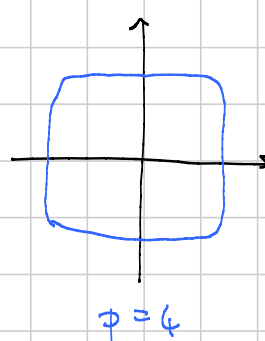
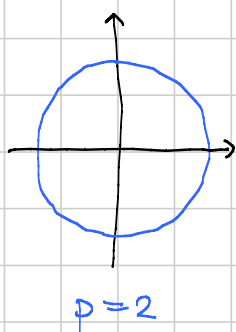
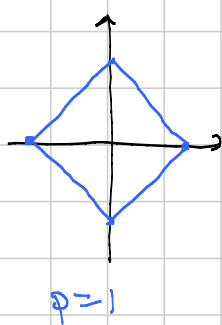
Note Title

06/12/2018

Duali di spazi normatiGià su $\mathbb{R}^2$ ci sono tante norme non isometricheNorme su $\mathbb{R}^2$. Norme p-esime

$$\|(x, y)\|_p := \{ |x|^p + |y|^p \}^{1/p} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall p \geq 1$$

$$\|(x, y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$$



Esercizio $\mathbb{R}^2$ con $\|\cdot\|_1$ è isometrico a $\mathbb{R}^2$ con $\|\cdot\|_\infty$, cioè esiste $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare tale che

$$\|f(x, y)\|_\infty = \|(x, y)\|_1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Basta definire $f(x, y) := (x+y, x-y)$ e verificare che

$$\max\{|x+y|, |x-y|\} = |x| + |y|$$

(si dimostra distinguendo un po' di casi)

In $\mathbb{R}^2$ ci sono varie altre norme, e sono in corrispondenza con i convessi limitati che contengono l'origine come p.to interno e sono simm. risp. all'origine.

Esercizio Determinare il duale di $\mathbb{R}^2$ con $\|\cdot\|_1$

Cerco $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineari e sono $f(x,y) = ax+by$ e cerco la norma indotta su V' .

Prendiamo $f(x,y) = ax+by$. Qual è la sua norma?

$$\sup \{ |ax+by| : (x,y) \text{ con } |x|+|y| \leq 1 \}$$

$$\begin{aligned} |ax+by| &\leq |a| \cdot |x| + |b| \cdot |y| \\ &\leq \max\{|a|, |b|\} \cdot (|x|+|y|) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|ax+by\|_{V'} \leq \max\{|a|, |b|\}$$

Per la disug. opposta suppongo wlog che $|a| \geq |b|$ e uso $(x,y) = (\text{Sign}(a), 0)$. In questo modo $\|(x,y)\|_1 = 1$ e

$$\|f\|_{V'} \geq |f(x,y)| = a \cdot \text{sign} a = |a|$$

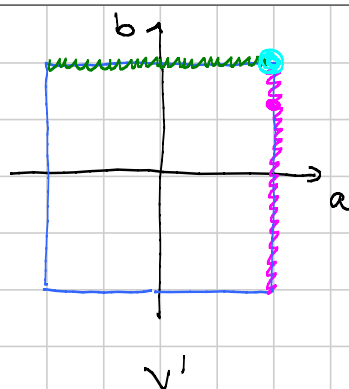
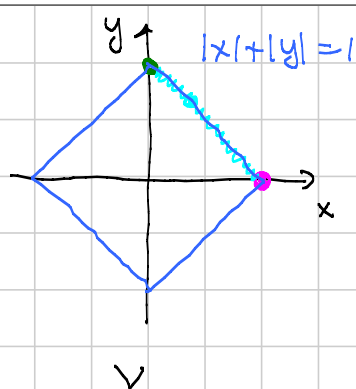
e questo mostra l'altra disuguaglianza.

Nell'esempio precedente, per ogni a e b con $\max\{|a|, |b|\} = 1$ esiste almeno un vettore (x,y) t.c. $|x|+|y| = 1$ e

$$\max\{|a|, |b|\} = \|f\|_{V'} = |f(x,y)|$$

e questo dice che $f(x,y) = ax+by$ è il funzionale allineato di (x,y) .

Ogni f è sfera unitaria di V' è allineato con almeno un vettore della sfera unitaria di V .



Accade che

- i funzionali allineati di $(1,0)$ sono tutti $f(x,y) = ax + by$ con $a=1$ e $b \in [-1,1]$
- i funzionali allineati di $(0,1)$ sono $f(x,y) = ax + by$ con $b=1$ e $a \in [-1,1]$
- i funzionali allineati di (x_0, y_0) con $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$ e $x_0 + y_0 = 1$ sono unici e sempre lo stesso, cioè $f(x,y) = x + y$

— o — o —

Esempi classici di spazi di dim. infinita

Spazi di successioni : $\mathcal{L}^p = \text{succ. } \{x_n\}$ con norma

$$\|x_n\|_p := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{1/p} \quad p \in [1, +\infty)$$

$$\|x_n\|_{\infty} := \sup \{ |x_n| : n \in \mathbb{N} \}$$

Questi sono sp. di Banach

→ direttamente, come si è fatto con $\mathcal{L}^2$

→ usando il cannone $\mathcal{L}^p = L^p(\mathbb{N})$

↑ con la misura che conta i punti

$$C_0 = \{ \{x_n\} \in \mathcal{L}^{\infty} : x_n \rightarrow 0 \}$$

$$C_{\infty} = \{ \{x_n\} \in \mathcal{L}^{\infty} : x_n = 0 \text{ definitivamente} \}$$

$$C = \{ \{x_n\} \in \mathcal{L}^{\infty} : x_n \text{ ha limite per } n \rightarrow +\infty \}$$

Oss. C_0 e C sono sp. di Banach
 (tes. di scambio dei limiti dell'analisi 2, dopo
 aver pensato le succ. come funzioni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 ed aver utilizzato il teorema di scambio dei
 limiti con la conv. uniforme)
 C_0 non è completo, ma solo normato.

Spazi di funzioni: spazi $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ con $p \in [1, +\infty]$

$$C^0(K) = \{ f: K \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \} \quad "C"$$

$\uparrow$
compatto

$$C_c^0(X) = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue a supp. compatto} \} \quad "C_0"$$

$\uparrow$
metrico

$$C_0^0(X) = C_0(X) = \text{chiusura di } C_c^0(X) \text{ rispetto alla norma } \infty \quad "C_0"$$

= funzioni su X "nulle al bordo"

— o — o —

Domanda: come sono fatti i duali di questi spazi?

Caso 1 Il duale di ℓ^1 è ℓ^∞ .

Pongo $V := \ell^1$ e costruisco una applicazione $\ell^\infty \rightarrow (\ell^1)'$
 che sia

- bigettiva
- lineare
- isometria

Data $y \in \ell^\infty$ (si intende $y = \{y_n\}$), costruisco

$$J_y: \ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

Come

$$J_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$

- È ben definita e continua perché

$$|J_y(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \cdot |x_n| \leq \|y\|_{\infty} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|y\|_{\infty} \cdot \|x\|_1$$

Questo mostra che $\|J_y\|_{V'} \leq \|y\|_{\infty}$

- La linearità è quasi ovvia

- Serve che $\|J_y\|_{V'} = \|y\|_{\infty}$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $i \in \mathbb{N}$ t.c. $|y_i| \geq \|y\|_{\infty} - \varepsilon$

Considero x tale che $x_i = \text{sgn}(y_i)$ e
 $x_n = 0$ per ogni $n \neq i$

e osservo che

$$\|J_y\|_{V'} \geq |J_y(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ha } \|x\|_1 = 1}}{=} y_i \text{sgn}(y_i) = |y_i| \geq \|y\|_{\infty} - \varepsilon.$$

- Serve la bigettività. L'injectività segue dall'essere isometria. Manca la SURGETTIVITÀ, cioè che ogni $L: \ell^1 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua è del tipo descritto sopra!

Considero $e_n = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } n.}}{1}, 0, \dots)$

Pongo $y_n := L(e_n)$ e osservo che

$$|y_n| = |L(e_n)| \leq \|L\|_{V'} \cdot \|e_n\|_{V'} = \|L\|_{V'} \quad \text{quindi} \quad y \in \ell^{\infty}$$

Ora pongo

$$\hat{L}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$

e osservo che L ed $\hat{L}$ coincidono su $\{e_n\}$, quindi
coincidono su $\text{Span degli } e_n$, il quale è denso in ℓ^2 .

Ist. Analisi Matematica –

LEZIONE 56

Note Title

06/12/2018

DUALE DI ℓ^p CON $p \in (1, +\infty)$

Il duale di ℓ^p è $\ell^{p'}$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

(quindi $(\ell^p)' = \ell^{p'}$)

È facile costruire $J: \ell^{p'} \rightarrow (\ell^p)'$ isometria lineare

Data $y \in \ell^{p'}$ si pone $J_y: \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$J_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$

La buona positura (cioè la conv. della serie) e la linearità seguono da Hölder

$$|J_y(x)| \leq \|y\|_{p'} \cdot \|x\|_p$$

Da questa segue pure che $\|J_y(x)\|_{(\ell^p)'} \leq \|y\|_{p'}$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta devo usare la successione x con

$$x_n := |y_n|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_n)$$

Vediamo il conto

$$\begin{aligned} \|J_y\|_{(\ell^p)'} \cdot \|x\|_{\ell^p} &\geq |J_y(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cdot \underbrace{|y_n|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_n)}_{x_n} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p'} \end{aligned}$$

Da questa segue che

$$\begin{aligned}
 \|y\|_{p'}^{p'} &\leq \|J_y\|_{(\mathcal{Q}^p)'} \cdot \|x\|_p \\
 &= \|J_y\|_{(\mathcal{Q}^p)'} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p(p'-1)} \right\}^{\frac{1}{p'}} \\
 &\quad p(p'-1) = pp' \left(1 - \frac{1}{p'}\right) = pp' \frac{1}{p} = p' \\
 &= \|J_y\|_{(\mathcal{Q}^p)'} \cdot \|y\|_{p'}^{p'}
 \end{aligned}$$

Portando l'ultima uguaglianza al LHS segue

$$\|y\|_{p'}^{p'(1-\frac{1}{p'})} = \|y\|_{p'} \leq \|J_y\|_{(\mathcal{Q}^p)'}$$

- Resta da dimostrare la surgettività, cioè per ogni $L: \mathcal{Q}^p \rightarrow \mathbb{R}$ continua esiste $y \in \mathcal{Q}^{p'}$ t.c. $L = J_y$

Come definisco y ? Prendo $e_n = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \text{pos. } n}{1}, 0, \dots)$ e pongo

$$y_n := L(e_n)$$

In questo modo è ovvio che, se fosse $y_n \in \mathcal{Q}^{p'}$, avremmo che

$$L(e_n) = J_y(e_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi L e J_y coincidono su e_n , quindi sullo span, quindi sulla chiusura dello span, che è proprio $\mathcal{Q}^p$. Occorre solo dire che $y \in \mathcal{Q}^{p'}$.

Occorre unire il conto precedente. Come prima poniamo

$$x_n := |y_n|^{p'-1} \operatorname{sign}(y_n)$$

e per ogni $m \in \mathbb{N}$ calcoliamo

$$\sum_{i=1}^m |y_i|^{p'} = \sum_{i=1}^m x_i y_i = \sum_{i=1}^m x_i L(e_i)$$

$$= L\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right)$$

$$\leq \|L\|_{\mathcal{L}(p',1)} \cdot \left\| \sum_{i=1}^m x_i e_i \right\|_p$$

$$= \|L\|_{\dots} \left\{ \sum_{i=1}^m |x_i|^p \right\}^{1/p}$$

$$= \|L\|_{\dots} \left\{ \sum_{i=1}^m |y_i|^{p'} \right\}^{1/p'}$$

↑
stesso conto di prima $p(p'-1) = p'$

Portando al LHS troviamo

$$\left\{ \sum_{i=1}^m |y_i|^{p'} \right\}^{1/p'} \leq \|L\|_{\dots}$$

Essendo vero per ogni $m \in \mathbb{N}$ la serie converge, quindi $y \in \ell^{p'}$.

Estremamente diseducativo! il duale di c_0 è ℓ^1

Definiamo $J: \ell^1 \rightarrow (c_0)'$ come uno si aspetta

$$J_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$

Vale la stima

$$|J_y(x)| \leq \|y\|_1 \cdot \|x\|_{\infty} \quad \leadsto \quad \|J_y\| \leq \|y\|_1$$

Questo dice che $J_y \in (c_0)'$ ma anche $(\ell^{\infty})'$, $(c)'$, $(c_{00})'$

Verifichiamo che $\|Jy\| = \|y\|_1$
 $\uparrow$
 in tutti i duali
 di sopra

- In $(\ell^\infty)'$ è semplice perché posso usare x definito come

$$x_n := \text{sign}(y_n)$$

$$\text{Allora } |Jy(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|y\|_1$$

Lo posso usare perché $x \in \ell^\infty$ e $\|x\|_\infty = 1$

- Negli altri non posso usare x perché è ben difficile che $x \in C_0$ o C_{00} o C .

Basta considerare $\sum_{i=1}^n x_i e_i$ (trovo x mettendolo a 0 da $n+1$ in poi)

$$|Jy(\sum_{i=1}^n x_i e_i)| = \sum_{i=1}^n |y_i|$$

Facendo il sup su n ottengo esatt. $\|y\|_1$.

Questo vale in C_{00} e quindi a maggior ragione negli spazi intermedi.

Domanda: dove J è suriettivo?

Risposta: solo sul duale di C_0

Prendo $L: C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e costruisco y con $y_i = L(e_i)$
 Si vede bene che $y \in \ell^1$. Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |y_i| &= \sum_{i=1}^n \text{sign}(y_i) \cdot y_i = \sum_{i=1}^n \text{sign}(y_i) L(e_i) \\ &= L\left(\sum_{i=1}^n \text{sign}(y_i) e_i\right) \leq \|L\| \cdot \underbrace{\left\|\sum_{i=1}^n \text{sign}(y_i) e_i\right\|_\infty}_{=1} \end{aligned}$$

Essendo n arbitrario si deduce che $y \in \ell^4$.

Ora J_y e L coincidono su $\text{Span}(e_i)$.

"succe. def. nulle" = C_{00}

ORA QUESTO SPAN È DENSO in C_0 ma non in ℓ^∞

Quindi J_y e L coincidono SOLO in C_0 .

— o — o —

Chi è il duale di C_{00} ?

È lo stesso di C_0 , quindi ℓ^4 . Motivo: C_0 è il completamento di C_{00} (volendo C_{00} è denso in C_0), quindi ogni $L: C_{00} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, dunque lip., dunque unif. continua, si estende in modo unico.

— o — o —

Chi è il duale di C ? Si può dimostrare in modo del tutto analogo che ogni $L: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua è del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n + y_{\infty} x_{\infty}$$

$\uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

La dimostrazione è del tutto analoga con

$$y_i := L(e_i)$$

$$\text{e } y_{\infty} := L(\underbrace{1, 1, 1, \dots}_{e_{\infty}}) - \sum_{n=1}^{\infty} L(e_i)$$

A un certo punto si conclude osservando che lo span di tutte le e_i e e_{∞} è davvero C .

La norma del funzionale scritto sopra è

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| + |y_{\infty}|$$

e quindi è come fare l'elemento $(y_{\infty}, y_1, y_2, \dots) \in \ell^1$
 — o — o —

Nel duale di ℓ^{∞} c'è molta roba STRANA.

Prendo un qualunque elemento del duale di ℓ^{∞} , ad esempio

$$L(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Per HB questo si estende ad ℓ^{∞} .

Questa estensione è DRAMMATICAMENTE non unica.
 — o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 57

Note Title

07/12/2018

DUALE DI SPAZI $L^p(X, m, \mu)$

- $\rightarrow (X, m, \mu)$ spazio di misura finita, cioè $\mu(X) < +\infty$
 $\rightarrow$ " " " " σ -finita, cioè $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$
 con $\mu(X_n) < +\infty$
 $\rightarrow$ caso generale

Teorema misterioso (RADON-NIKODYM)

Sia X un insieme, m una σ -algebra.

Sia $\nu: m \rightarrow \mathbb{R}$ una misura a valori reali (con segno)
 $\uparrow$ numerabilmente additiva sui disgiunti

Sia $\mu: m \rightarrow [0, +\infty)$ una misura positiva finita.

Supponiamo che $\nu \ll \mu$, cioè

$$\forall A \in m \quad \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Allora esiste $g \in L^1(X, m, \mu)$ tale che

$$\nu(A) = \int_A g(x) d\mu \quad \forall A \in m.$$

— o — o —

Consideriamo (X, m, μ) sp. di misura finita.

Per ogni coppia di funzioni $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ definiamo

$$[J(g)](f) := \int_X g(x) f(x) d\mu$$

Questo ha senso per opportune g ed f .

Duale di L^1

Versione breve : $(L^1)' = L^\infty$

Versione lunga : l'operatore J , visto come applicazione

$$J : L^\infty \rightarrow (L^1)'$$

è

- ben definito
- biiettivo
- lineare
- isometrico

Dim. Buona definizione : $\forall g \in L^\infty$ e $\forall f \in L^1$

$$|[J(g)](f)| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$$

$$\text{da cui } \|J(g)\|_{(L^1)'} \leq \|g\|_\infty$$

Disuguaglianza opposta : se $g \neq 0$ c'è poco da fare.

Se $g \neq 0$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste sottoinsieme $A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ di misura positiva tale che

$$|g(x)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon \quad \forall x \in A_\varepsilon$$

Considero $1_{A_\varepsilon}(x)$ (funzione caratteristica di A_ε)

$$(\|g\|_\infty - \varepsilon) \mu(A_\varepsilon) \leq \int_{A_\varepsilon} |g(x)| d\mu$$

$\in L^1$

$$= \int_{A_\varepsilon} g(x) \cdot \overbrace{\text{sign}(g(x)) 1_{A_\varepsilon}(x)}^{\in L^1} d\mu$$

$$\leq \|J(g)\|_{(L^1)'} \cdot \|\text{sign}(g(x)) 1_{A_\varepsilon}(x)\|_1 \leq \|J(g)\| \cdot \mu(A_\varepsilon)$$

Semplificando la misura e sfruttando l'arbitrarietà di ε si ha l'uguaglianza.

Surgettività Prendiamo $L: L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua.
Per ogni $A \in \mathcal{M}$ poniamo

$$\nu(A) := L(\mathbb{1}_A)$$

Vogliamo mostrare che $\nu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ è una misura con segno e $\nu \ll \mu$

- $\nu(\emptyset) = 0$ banale
- Numerabile additività sui disgiunti: $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ e se ne segue che

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

Osservazione fondamentale

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}$$

nel senso di L^1 (Beppo - Levi)

Ne segue che

continuità di L

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = L\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} L\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n L(\mathbb{1}_{A_i}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

- Assoluta continuità segue da

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \|1_A(x)\| \equiv 0 \quad (\text{nel senso } L^1 \text{ del termine})$$

$$\Rightarrow \nu(A) = L(0) = 0.$$

Per RN esiste $g \in L^1(X)$ tale che

$$\nu(A) = \int_A g(x) d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

Resta da dimostrare che $g \in L^\infty(X)$. Mostriamo che

$$\|g\|_\infty \leq \|L\|_{(L^1)',}$$

Sia $\varepsilon > 0$. Vogliamo dimostrare che

$$\{x \in X : g(x) \geq \|L\|_{(L^1)',} + \varepsilon\} = A_\varepsilon$$

ha misura nulla.

$$\mu(A_\varepsilon) (\|L\|_{(L^1)',} + \varepsilon) \leq \int_{A_\varepsilon} g(x) d\mu$$

$$= \int_X g(x) \cdot 1_{A_\varepsilon}(x) dx = \nu(A_\varepsilon) = L(1_{A_\varepsilon})$$

$$\leq \|L\|_{(L^1)',} \cdot \|1_{A_\varepsilon}\|_{L^1}$$

$$= \|L\|_{(L^1)',} \cdot \mu(A_\varepsilon)$$

Questa è possibile solo se $\mu(A_\varepsilon) = 0$. In modo analogo si ragiona con

$$B_\varepsilon = \{x \in X : g(x) \leq -\|L\|_{(L^1)',} - \varepsilon\}$$

- Occorre dimostrare che

$$L(f) = \int_{\mathbb{X}} g(x) f(x) d\mu \quad \forall f \in L^1$$

RN ci ha detto che questo vale per $f = 1_A$ con $A \in \mathcal{M}$.
Concludo osservando che le caratteristiche spaziano
un denso in L^1 .

— o — o —

Duale di L^p Versione breve: $(L^p)' = L^{p'}$

Buona definizione: Hölder

Disuguaglianza opposta: si usa $f(x) = |g(x)|^{p'-1} \text{sign}(g(x))$

L'osservazione fondamentale è che

$$\int_{\mathbb{X}} |f(x)|^p d\mu = \int_{\mathbb{X}} |g(x)|^{p'} d\mu \quad p(p'-1) = p'$$

Surgettività Definisco $\nu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ come nel caso L^1
e verifico la numerabile additività osservando che

$$\| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \|_{L^p} \xrightarrow{L^p} \| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \|_{L^\infty} \quad (\text{se } A_i \text{ sono disgiunti})$$

RN ci consegna $g \in L^1$ t.c.

$$\int_A g(x) d\mu = \nu(A)$$

cioè

$$\int_{\mathbb{X}} g(x) 1_A(x) d\mu = L(1_A)$$

Grazie alla densità dello span delle caratteristiche, ho finito se dimostro che $g \in L^{p'}$

- Dimostriamo che $g \in L^{p'}$. L'osservazione fondamentale è che

$$\int_X g(x) f(x) d\mu = L(f)$$

per ogni $f \in L^\infty(X)$ (lo span delle caratteristiche è denso in $L^\infty(X)$ e sappiamo che $g \in L^1$)

A questo punto per ogni $n \in \mathbb{N}$ posso troncare $g(x)$ tra $-n$ ed n ottenendo $g_n(x)$ e usare

$$f_n(x) = |g_n(x)|^{p'-1} \cdot \text{sign}(g(x)) \in L^\infty$$

$\uparrow$ è lo stesso di $g_n(x)$

Otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_X |g_n(x)|^{p'} d\mu &= \int_X |g_n(x)|^{p'-1} |g_n(x)| d\mu \\ &\leq \int_X |g_n(x)|^{p'-1} \cdot |g(x)| d\mu \\ &= \int_X |g_n(x)|^{p'-1} \text{sign}(g(x)) \cdot g(x) d\mu \\ &= \int_X f_n(x) g(x) d\mu \\ &= L(f_n(x)) \\ &\leq \|L\|_{(L^p)', \|f_n(x)\|_p \\ &= \|L\|_{(L^p)'} \cdot \left\{ \int_X |g_n(x)|^{p'} d\mu \right\}^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

Portando al LHS ottengo $\|g_n\|_{p'} \leq \|L\|_{(L^p)'}$ e usando $n \rightarrow \infty$.

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 58

Note Title

07/12/2018

Oss. Cosa fallisce nella dim. del duale di L^p se ci mettiamo in L^∞ ?

→ È ancora vero che lo span delle funzioni caratteristiche è denso

→ NON è più vero che

$$\| \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \| = \lim_{n \rightarrow \infty} \| \bigcup_{i=1}^n A_i \|$$

↑
nel senso L^∞

e quindi non si riesce a dim. che ν è numerabilmente additiva, ma solo FINITAMENTE ADDITIVA.

Per queste misure NON vale RN in nessuna forma.

Oss. Si può dimostrare che $(L^\infty)'$ non è L^1 , almeno tramite casi speciali

Esempio: $L^\infty((-1,1))$. Prendiamo

$$L(f) = f(0) \quad \forall f \in \underbrace{C_c^\infty((-1,1))}_{\text{sottospazio}}$$

Questo è continuo sul sottospazio rispetto a $\|\cdot\|$ e quindi ammette almeno una estensione continua per H.B. Questa non si rappresenta con una $g(x)$, nemmeno sul solo sottospazio.

In questo caso per forza la ν non sarebbe num. additiva.

— o — o —

Esempio $L^1((0, +\infty))$ $L \in (L^1)'$ dato da

$$L(f) := \int_0^{+\infty} \arctan x \cdot f(x) dx$$

Si ha che $L \in (L^1)'$ e $\|L\|_{(L^1)'} = \frac{\pi}{2}$

ma non esiste nessuna $f \in L^1$ con $\|f\|_1 \leq 1$ t.c.

$$|L(f)| = \frac{\pi}{2}$$

Altro esempio in cui il sup nella def. di $\|L\|$ non è raggiunto.

Oss. Come caratterizzare il duale di $L^p(X, m, \mu)$ con misura solo σ -finita.

- avendo X con sottosistemi $X_k \subseteq X_{k+1}$ di misura finita
- osservo che ogni $L: L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare induce un $L^k: L^p(X_k) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare
- rappresento questi con $g_k \in L^{p'}(X_k)$ e dimostro che $g_{k+1} \equiv g_k$ in X_k
- definisco g_∞ unendo le g_k e dimostro che quella rappresenta L su tutto lo spazio.

— o — o —

DUALE DEGLI HILBERT

Versione breve: $H' = H$

Versione lunga: l'applicazione $J: H \rightarrow H'$ definita da

$$[J(u)](x) := \langle u, x \rangle$$

è

- ben definita
- lineare
- bigettiva
- isometria.

È tutto quasi ovvio, tranne la surgettività, cioè per ogni

$$L: H \rightarrow \mathbb{R}$$

lineare e continua, esiste $u \in H$ t.c.

$$L(x) = \langle u, x \rangle \quad \forall x \in H.$$

Dim. 1, via base ortonormale

(richiede la separabilità, oppure accettare basi non num.)

Sia $\{e_n\}$ una base. Pongo

$$u_n := L(e_n)$$

e spero che

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n$$

funzioni. Se dimostro che sta in H , allora ho finito perché funziona su $\text{Span}(e_n)$ e quindi ovunque. Per dim. che sta in H , facciamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i^2 &= \sum_{i=1}^n u_i L(e_i) = L\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right) \\ &\leq \|L\|_{H'} \cdot \left\| \sum_{i=1}^n u_i e_i \right\|_H = \|L\|_{H'} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n u_i^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Porto al LHS e passo al limite in n .

Dim 2, via proiezione sul convesso chiuso

Sia K il Ker di L . Se $K = H$, usiamo $u = 0$.
 Se K non è tutto H , allora è comunque un convesso chiuso. Prendo $w_0 \in K$ e pongo

$$u_0 = w_0 - P_K w_0 \quad (\text{questo è } \perp \text{ a } K)$$

Dico che vale la rappresentazione con

$$u = \frac{L(u_0)}{\|u_0\|^2} u_0$$

(riprova: deve succedere che $L(u_0) = \langle u, u_0 \rangle$)

Mostriamo che funziona per ogni $x \in H$. L'idea è che ogni $x \in H$ si scrive come

$$x = \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{R}}}{\alpha} u + \underset{\substack{\uparrow \\ \in K}}{w}$$

Se questo è vero, allora

$$\langle u, x \rangle = \langle u, \alpha u + w \rangle = \alpha \|u\|^2 + \overset{0}{\langle u, w \rangle}$$

$$L(x) = L(\alpha u + w) = \alpha L(u) + \overset{0}{L(w)}$$

Le due espressioni coincidono se $L(u) = \|u\|^2$, e questa è una facile verifica.

Perché ogni $x \in H$ si scrive nella forma $\alpha u + w$?

Basta porre $\alpha := \frac{L(x)}{L(u)}$

$$L(\alpha u + w) = \alpha L(u), \text{ cioè } \alpha = \frac{L(x)}{L(u)}$$

Se usiamo il valore di α suggerito abbiamo che

$$w = x - \alpha v = x - \frac{L(x)}{L(v)} v$$

e questo sta chiaramente nel ker perché

$$L(w) = L\left(x - \frac{L(x)}{L(v)} v\right) = L(x) - L(x) = 0.$$

Per scrupolo controlliamo che

$$L(v) = \|v\|^2 \quad \text{con} \quad v = \frac{L(v_0)}{\|v_0\|^2} v_0$$

$$L(v) = \frac{L(v_0)}{\|v_0\|^2} L(v_0) \quad \text{↗} \quad \text{☺}$$

$$\|v\|^2 = \left(\frac{L(v_0)}{\|v_0\|^2}\right)^2 \cdot \|v_0\|^2$$

Oss Tutti gli Hilbert separabili sono iso-tutto a ℓ^2 .
Sapendo che $(\ell^2)' = \ell^2$ (cio, su duali spazi di succ.)
questo fornisce dim. alternativa di $H' = H$
(la realtà è da dire 1. di questa lezione).

Teorema misterioso

Versione breve: il duale di $C_0(X)$
(sp. funzioni continue "nulle al bordo")
è lo spazio delle misure di Radon in X
(misure positive con boreliani
misurabili + q.c.) che agiscono per
integrazione

$$L(f) = \int_X f(x) d\mu$$

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 59

Note Title

10/12/2018

Perché le palle in $L^p(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sono debolmente compatte?

- Vero per $p \in (1, +\infty)$
- Vero per $p = +\infty$ nel senso di debole* compattezza.

Oss. In $L^2(\Omega)$ segue già dalla teoria degli sp. di Hilbert
In $L^p(\Omega)$ con $p \geq 2$ e Ω di misura finita segue dalla teoria in $L^2(\Omega)$

$\{u_n\} \subseteq L^p(\Omega)$ limitata $\rightsquigarrow \{u_n\} \subseteq L^2(\Omega)$ limitata
 $\uparrow$
 misura finita

$\rightsquigarrow$ esiste $u_n \rightharpoonup u$ debole $L^2(\Omega)$ $\rightsquigarrow$ per la SCI della norma L^p (e in realtà di qualunque funzionale con integranda convessa, addirittura rispetto alla debole di L^1)
 seguiva che $u \in L^p(\Omega) \rightsquigarrow$ con un argomento di densità si otteneva $u_n \rightharpoonup u$ debole $L^p(\Omega)$]

Oss. La convergenza debole in $L^p(\Omega)$, senza ipotesi particolari su Ω , è la convergenza debole* nel duale di $L^{p'}(\Omega)$, e le palle sono debole* compatte nei duali degli spazi separabili (e gli L^p classici sono separabili)

Esempio $\{u_n\} \subseteq L^6(\Omega)$ limitata

Ora $L^6(\Omega)$ è $[L^{6/5}(\Omega)]'$. Quindi $\{u_n\}$ è limitata in $[L^{6/5}(\Omega)]'$. Quindi per compattezza debole*

esiste $u_{n_k} \xrightarrow{*} u_\infty$ debde * in $(L^{6/5}(\Omega))'$

Questo è equivalente a dire che

$$\int_{\Omega} u_{n_k} v \rightarrow \int_{\Omega} u_\infty v \quad \forall v \in L^{6/5}(\Omega)$$

e questa è la debbole vera in $L^6(\Omega)$.

— o — o —

Nuovo tentativo di dimostrazione

Ipotesi: $\{u_n\} \subseteq L^6(\Omega)$ è limitata

Teo: esiste $n_k \rightarrow +\infty$ monot. ed esiste $u_\infty \in L^6(\Omega)$ t.c.

$$\int_{\Omega} u_{n_k} v \rightarrow \int_{\Omega} u_\infty v \quad \forall v \in L^{6/5}(\Omega)$$

Step 1 Prendo un denso $\overset{\text{num}}{D} \subseteq L^{6/5}(\Omega)$ e con il solito procedimento diagonale trovo una s.succ. u_{n_k} tale che

$$\int_{\Omega} u_{n_k} v \rightarrow L_\infty(v) \quad \forall v \in D$$

Step 2 So che $L_\infty : D \rightarrow \mathbb{R}$ è Lipschitziana, quindi estendibile a tutto $L^{6/5}(\Omega)$ con la stessa costante e si può dimostrare che

$$\int_{\Omega} u_{n_k} v \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{estensione}}}{L_\infty(v)} \quad \forall v \in L^{6/5}(\Omega)$$

[Volevo si può far vedere che $\int_{\Omega} u_{n_k} v$ è di Cauchy per ogni v aggiungendo e togliendo una opp. $w \in D$]

Step 3 Con poca fatica si vede che la $L_\infty(v)$ estesa è lineare (line. puntuale di lineari).
Vogliamo tanto concludere che

$$L_\infty(v) = \int \mu_\infty v$$

per una opportuna $\mu_\infty \in L^{6/5}(\Omega)$.

Quello che serve è un TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE del duale di $L^{6/5}(\Omega)$.

— o — o —

Per $p = +\infty$ prendiamo una succ. $\{u_n\} \subseteq L^\infty$ limitata.
Allora esiste

$$u_{n_k} \xrightarrow{*} \mu_\infty \quad \text{debole } *$$

Nel dire questo stiamo pensando L^∞ come il duale di L^1

Dim Prendo un denso numerabile $D \subseteq L^1(\Omega)$ che fort. è separabile e trovo u_k t.c.

$$\int_\Omega u_{n_k} v \rightarrow L_\infty(v) \quad \forall v \in D$$

Con i soliti metodi vediamo che si può estendere L_∞ a tutto L^1 e

$$\int_\Omega u_{n_k} v \rightarrow L_\infty(v) \quad \forall v \in L^1$$

↑ estensione lin. + lip.

Teo. di rappresentazione del duale ci dice che esiste $\mu_\infty \in L^\infty$ t.c.

$$L_\infty(v) = \int_\Omega \mu_\infty v \quad \forall v \in L^1$$

— o — o —

Def. Dato V sp. normato esiste una mappa

$$J : V \rightarrow (V')'$$

definita da $[J(v)](f) = f(v) \quad \forall v \in V \quad \forall f \in V'$

Proprietà di J (1) J è lineare (banale)
(2) J è isometria (dunque iniettiva)

Dim (2) $\|J(v)\|_{(V')'} = \|v\|_V$

$\|$

$$\sup \{ |[J(v)](f)| : f \in V' \text{ con } \|f\|_{V'} \leq 1 \}$$

$$= \sup \{ |f(v)| : f \in V' \text{ con } \|f\|_{V'} \leq 1 \}$$

$$= \|v\|_V \quad \text{per caratt. duale della norma}$$

Def. Uno spazio normato V si dice riflessivo se

$J : V \rightarrow (V')'$ è surgettiva

Achtung! NON BASTA che ci sia una qualunque

$L : V \rightarrow (V')'$ lineare e isometrica.

Deve essere proprio la J .

Teorema Sia V sp. di Banach riflessivo.
 Supponiamo che V' sia separabile (però che si
 paga per lavorare con le successioni)
 Sia $\{u_n\} \subseteq V$ limitata.
 Allora esiste

$$u_{n_k} \longrightarrow u_\infty \text{ debole in } V$$

Dim 1 La convergenza debole in V è la conv. debole $*$
 in $(V')'$.

Dim 2 Step 1 Prendo $D \subseteq V'$ denso e numerabile
 Con un procedimento diagonale trovo n_k t.c.

$$f(u_{n_k}) \longrightarrow L_\infty(f) \quad \forall f \in D$$

Step 2 Mostro che per ogni $f \in V'$ la succ. $f(u_{n_k})$ è
 di Cauchy, quindi

$$f(u_{n_k}) \longrightarrow L_\infty(f) \quad \forall f \in V'$$

Osservo che L_∞ è lineare e l.p., dunque $L_\infty \in (V')'$

Step 3 Per la riflessività (cioè la surgettività di J) possiamo
 concludere che $L_\infty = J(u_\infty)$, cioè

$$L_\infty(f) = f(u_\infty)$$

da cui la tesi.

— o — o —

Step 3 Pongo $W =$ chiusura dello Span

Se $W = V$ sono felice.

Se W è contenuto strettamente in V , esiste $f \in V'$ t.c.

$$f(w) = 0 \quad \forall w \in W$$

ma $f \neq 0$

[Si costruisce con HB : prendo $v_0 \in V \setminus W$ e definisco f in $W \oplus \mathbb{R}v_0$ in modo che $f \equiv 0$ in W ma non in v_0 e poi lascio estendere ad HB].

Vediamo che succede a $f(v_n)$ dove i v_n sono quelli costruiti sopra.

Posso costruire f con $\|f\|_{V'} = 1$ [basta aver preso v_0 con $\|v_0\| = 1$ e aver posto $f(v_0) = 1$].

Esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\|f_n - f\|_{V'} < \frac{1}{2}$ per densità

$$|f(v_n)| = |f(v_n) - f_n(v_n) + f_n(v_n)|$$

$$\geq |f_n(v_n)| - |f(v_n) - f_n(v_n)|$$

$$= \underbrace{|f_n(v_n)|}_{> \frac{1}{2}} - \underbrace{\|f - f_n\|_{V'}}_{< \frac{1}{2}} \underbrace{\|v_n\|_V}_{= 1} > 0$$

e questo non va bene perché $f \equiv 0$ in W .

Compattanza debole mancante per $p=1$

Esempio $L^1((-1,1))$

$\{f_n\}$ come in figura
è limitata in L^1 , ma
non ha s.succ. che conv.
debolmente.



Esercizio alla LAX-MILGRAM

Sia $f \in L^2((0,1))$. Dimostrare che esiste $u \in H_0^1((0,1))$ tale che

$$-\int_0^1 u_x \varphi_x \, dx = \int_0^1 f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0,1))$$

Approccio classico variazionale

Sto risolvendo $u_{xx} = f$ che è ELE du

$$F(u) = \int_0^1 (u_x^2 + u f) \, dx$$

Con il metodo diretto dim. che esiste

$$\min \{ F(u) : u \in H_0^1((0,1)) \}$$

e quel punto ricavo ELE debole calcolando la derivata di $F(u+t\varphi)$ e quella richiesta è la prima forma integrale.

Approccio + astratto

Considero lo spazio $H_0^1((0,1))$.
È un Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u_x v_x \, dx$$

Verifiche

→ bilinearità ovvia

→ definito positivo?

$$\langle u, u \rangle = \int_0^1 u_x^2 \, dx = 0 \iff u \equiv 0 \text{ per DBC}$$

Esaminiamo RHS dell'equazione $\int_0^1 f \varphi$

Data $f \in L^2$ fissata, dico che questa è una applicazione lineare e continua in H_0^1 , vista come funzione di φ

$$\varphi \rightarrow \int_0^1 f \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1$$

è lineare + continua. Lineare è ovvio.

Continua ?

$$\left| \int_0^1 f \varphi \right| \stackrel{?}{\leq} L \|\varphi\|_{H_0^1} = L \left\{ \int_0^1 \varphi_x^2 dx \right\}^{1/2}$$

POINCARÉ !!!

$$\left| \int_0^1 f \varphi \right| \leq \underbrace{\|f\|_{L^2}}_L \|\varphi\|_{L^2} \leq \left\{ \int_0^1 \varphi_x^2 dx \right\}^{1/2} \text{ per Poincaré}$$

Per Riesz in H_0^1 l'applicazione lineare si rappresenta con il prodotto scalare, quindi esiste $u \in H_0^1$ misteriosa tale che

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1$$

"
LHS nell'eq.
iniziale.

— o — o —

Allo stesso modo si dimostra l'esistenza di soluz. deboli per equ. del tipo

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f \quad u \equiv 0 \text{ su } \partial\Omega$$

con $A(x)$ matrice ellittica e abb. regolare
↑ simmetrica

Formul. debole
$$-\int_{\Omega} \langle A(x) Du(x), D\varphi(x) \rangle = \int_{\Omega} f \varphi$$

$$\forall \varphi \in C_c^{\infty} \text{ opp } H_0^1$$

Definisco
$$\langle\langle u, v \rangle\rangle := \int_{\Omega} \langle A(x) Du(x), Dv(x) \rangle$$

Questo è prod. scalare su H_0^1 , e l'ellitticità è quella che mi dà def. pos.

Il RHS è lineare e continuo rispetto a questo prodotto

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} f \varphi \right| &\leq \|f\|_{L^2} \underbrace{\|\varphi\|_{L^2}}_{\leq \langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle^{1/2}} \\
 &\quad \uparrow \text{Poincaré + lim. dall'alto per } A(x)
 \end{aligned}$$

Ora RIESZ fa il lavoro conclusivo.

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 61

Note Title

12/12/2018

SPAZI DI BAIRE

Idea: un sottoinsieme di uno spazio topologico è "piccolissimo" se è chiuso con parte interna vuota.

Un sottoinsieme è "piccolo" se è unione numerabile di piccolissimi.

NB I sottoinsiemi piccoli sono stabili per unione numerabile.

Uno spazio di Baire è uno spazio in cui i piccoli hanno parte interna vuota.

Def. Uno spazio di Baire è uno sp. topologico in cui vale la seguente proprietà.

Se $\{C_n\}$ è una successione di chiusi, allora

$$\text{Int}(C_n) = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \text{Int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \emptyset$$

Oss. Ci sono almeno altri 2 modi equiv. di dare la def.

• Se C_n sono chiusi e $\text{Int}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) \neq \emptyset$, allora

esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{Int}(C_{m_0}) \neq \emptyset$. (Counterpositive)

• Se A_n sono aperti densi per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ è denso.}$$

Oss. Negli spazi di Baire vale un pigeonhole topologico: se una unione numerabile non è piccola, almeno un termine non è piccolo.

Teorema 1 Gli spazi metrici completi sono sp. di Baire

Teorema 2 Gli spazi top. loc. compatti sono sp. di Baire

Prop. Se X è uno sp. di Baire e $A \subseteq X$ è aperto, allora A è uno sp. di Baire

Oss. Un chiuso in uno sp. di Baire non è detto che sia uno sp. di Baire.

(Ma un chiuso in un metrico completo sì)

(" " " top. loc. compatto sì)

[Controesempio: $\mathbb{R}^2$ meno irrazionali dell'asse x]

Dim. teo. 1 Usiamo la caratterizzazione con gli aperti densi.
Siano A_n aperti densi, voglio dim. che

$$A_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{è denso}$$

Basta dim. che A_∞ interseca ogni palla $B(x_0, r_0)$.

Idea: costruire x_n ed r_n tali che

$$B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n)$$

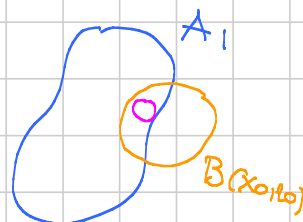
$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap A_{n+1}$$

$$r_n \leq \frac{r_0}{n}$$

La costruzione è induttiva

- Considero $A_1 \cap B(x_0, r_0)$, che è aperto $\neq \emptyset$ perché A_1 è denso
Dunque esiste

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq A_1 \cap B(x_0, r_0)$$



- Considero $A_2 \cap B(x_1, r_1)$, che è aperto $\neq \emptyset$ perché A_2 è denso. Dunque esiste

$$\bar{B}(x_2, r_2) \subseteq A_2 \cap B(x_1, r_1)$$

- E così via...

Claim: x_n è succ. di Cauchy e $x_n \rightarrow x_\infty \in A_\infty \cap B(x_0, r_0)$

La successione è di Cauchy perché definitivamente

$$x_n \in B(x_k, r_k) \quad \forall n \geq k$$

e $r_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$

A questo p.to passando al limite

$$x_\infty \in \bar{B}(x_k, r_k) \subseteq A_k \cap B(x_0, r_0)$$

↑
è importante che ad
essere contenute siano le
palle chiuse

Essendo vero per ogni k abbiamo la conclusione.
— o — o —

La stessa tecnica funziona per il tes. 2

Dato un qualunque aperto U_0 , devo dim. che $A_\infty \cap U_0 \neq \emptyset$.

Costruisco una successione U_k di aperti con chiusura cpt. tali che

$$\bar{U}_{k+1} \subseteq U_k \cap A_{k+1}$$

A quel p.to pongo $U_\infty := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bar{U}_k \neq \emptyset$ e sta in $U_0 \cap A_\infty$
↑
compatte
involate

— o — o —

Esercizio Aperto in Baire è Baire $A \subseteq X$

Dim. Prendo $C_n \subseteq A$ chiusi relativamente ad A e con parte interna vuota relativamente ad A , e spero che la loro unione abbia parte interna vuota in A .

Osservo che

$$C_k = A \cap \bar{C}_k$$

↑ chiusura in X

Osservo che $\bar{C}_k$ sono chiusi in X con parte interna vuota (va verificato: una eventuale parte interna...)

Essendo X sp. di Baire

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{C}_n \text{ ha parte interna vuota in } X$$

Ma

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A \cap \bar{C}_k) = A \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bar{C}_k \right)$$

e il RHS non può avere parte interna in A perché la avrebbe in X .

— o — o —

Esercizio costruttivo

- Provare a dim. che chiuso $\subseteq$ Baire è Baire
- Riuscirai
- Poi trovare l'enore visto che c'è il controesempio.

— o — o —

Provare a fare la dim. con gli aperti invece che con i chiusi.

Esempio di sp. NON di Baire

$\mathbb{N}$ non è $\mathbb{N}$ (è metrico completo!) (I pt hanno parte interna!)

È $\mathbb{Q}$!! I punti hanno parte interna $\emptyset$, ma la loro unione è tutto $\mathbb{Q}$ che ha parte interna.

BAIRE POINT 1 (Analisi 1)

Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. ^{continua} Supponiamo che esista $l \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx) = l \quad \forall x > 0$$

Allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Dem. C'è una info. qualitativa che deve diventare quantitativa.

Fissato $\varepsilon > 0$ definiamo

$$C_k := \{x > 0 : |f(nx) - l| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq k\} \quad \begin{array}{l} \text{limite} \\ \text{quantitativo} \end{array}$$

Si vede che i C_k sono chiusi essendo f continua e la loro unione è tutto $(0, +\infty)$ che è sp. di Baire. Almeno uno ha parte interna.

Supponiamo

$$(a, b) \subseteq C_{k_0}$$

Allora

$$|f(mx) - l| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq k_0 \quad \forall x \in (a, b)$$

cioè

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \bigcup_{n \geq k_0} (na, nb)$$

Idea: l'ultima unione contiene una semiretta del tipo $[A, +\infty)$.

Per questo basta verificare che

$$\begin{array}{c} na \\ (n+1)a \end{array} \quad \begin{array}{c} nb \\ (n+1)b \end{array}$$

$$nb > (n+1)a \text{ definitivamente.}$$

$$n(b-a) > a \text{ definitivamente. } \odot$$

— o — o —

Varianti da esplorare

- Cosa accade se $f(x)$ non è continua
- Cosa accade se f è continua e assunto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nx) = l(x) \quad (\text{può dipendere da } x)$$

[Hint a voce].

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 62

Titolo nota

12/12/2018

BAIRE POINT 2 (Analisi 1)

Non esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ discontinua "solo" in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Def. Un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice

- F_σ se è unione numerabile di chiusi
- G_δ se è intersezione numerabile di aperti.

Fatto generale L'insieme dei punti di discontinuità di una funzione (anche tra due sp. metrici) è un F_σ .

Dim. lo facciamo (quasi wlog) nel caso di $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 Studiamo quantitativa la discontinuità
 Per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo

$$D_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} : \forall \delta > 0 \text{ esistono } y, z \text{ in } [x-\delta, x+\delta] \text{ t.c. } |f(y) - f(z)| \geq \varepsilon\}$$

Fatto: x_0 è un p.to di discontinuità $\Leftrightarrow x_0 \in D_\varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che D_ε è chiuso. Sia $x_n \rightarrow x_\infty$ con $x_n \in D_\varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Conclusione

qui trovo y e z che vanno bene anche per x_∞

$$\text{p.ti di disc.} = \bigcup_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon = \bigcup_{\substack{n \geq 1 \\ m \in \mathbb{N}}} D_{1/m}$$

Volendola fare complicata, possiamo definire

$$\text{osc}(f, x, \delta) := \sup \{ |f(y) - f(z)| : y \in [x-\delta, x+\delta], z \in [x-\delta, x+\delta] \}$$

$$\text{osc}(f, x) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{osc}(f, x, \delta) \quad \text{(esiste per monotonia e può fare +\infty a tappeto)}$$

Si verifica che

- f è continua in $x \Leftrightarrow \text{osc}(f, x) = 0$
- $x \in D_f \Leftrightarrow \text{osc}(f, x) > 0$
- $x \mapsto \text{osc}(f, x)$ è semicont. sup. (i sopralivelli sono chiusi)

Fatto: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ NON è un F_σ

Dim Se fosse $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ con C_n chiusi in $\mathbb{R}$

allora è evidente che $\text{Int}(C_n) = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ma allora sarebbe

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

e quindi avrei scritto $\mathbb{R}$ come unione numerabile di chiusi con parte interna vuota.

Oss. Abbiamo dim. che il complementare di un denso numerabile in uno sp. di Baire non è F_σ

BAIRE POINT 3 (Analisi 2)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ SEPARATAMENTE CONTINUA e nulla su un denso.

Allora $f \equiv 0$.

Oss. È molto facile se il denso è $\mathbb{Q}^2$, ma esistono dei sottocinsiemi di $\mathbb{R}^2$ densi che intersecano ogni retta // agli assi al massimo una volta.

Dau. Per assurdo esiste (x_0, y_0) t.c. $f(x_0, y_0) \geq 4\delta > 0$
 Allora esiste $\rho_0 > 0$ t.c. $\uparrow$
WLOG

$$f(x, y_0) \geq 2\delta \quad \forall x \in [x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0]$$


Per ogni $x \in [x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0]$ esiste $r(x) > 0$ t.c.

$$f(x, y) \geq \delta \quad \forall y \in [y_0 - r(x), y_0 + r(x)]$$

Mi servirebbe un minimo sindacale per $r(x)$...

Conco di rendere il discorso quantitativo. Poniamo

$$C_k := \{x \in [x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0] : f(x, y) \geq \delta \quad \forall y \in [y_0 - \frac{1}{k}, y_0 + \frac{1}{k}]\}$$

$r(x) \geq \frac{1}{k}$

Si verifica che i C_k sono chiusi: se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora

$$\begin{aligned} f(x_n, y) &\rightarrow f(x_\infty, y) \quad \text{per cont. a } y \text{ fissato} \\ \geq \frac{1}{k} &\Rightarrow \geq \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Inoltre l'unione dei C_k è $[x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0]$.

Quindi almeno uno C_{k_0} ha parte interna, cioè

$$(a,b) \subseteq C_{k_0}$$

Ma allora $f(x,y) \geq \delta$ in $(a,b) \times [y_0 - \frac{1}{k_0}, y_0 + \frac{1}{k_0}]$

Ma nel rettangolo casca almeno un p.to del denso.

— o — o —

BAIRE POINT 4 Sia H Hilbert. Sia $u_n \rightarrow u_\infty$ debole.

Allora $\{u_n\}$ è limitata

Dim. Per ogni $v \in H$ accade che

$$\langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v \rangle$$

dunque il LHS è limitato. Rendiamolo quantitativo

$$C_k := \{v \in H : |\langle u_n, v \rangle| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Si verifica facile che C_k è chiuso e l'unione dei C_k è tutto H , che è spazio di Baire, quindi esiste

$$B(x_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$$

Dico che C_{k_0} contiene anche una palla centrata nell'origine
Per ipotesi

$$|\langle u_n, x_0 + r_0 w \rangle| \leq k_0 \quad \forall w \in B(0,1)$$

Ma allora

$$\langle u_n, w \rangle = \frac{1}{r_0} \langle u_n, r_0 w \rangle = \frac{1}{r_0} \langle u_n, r_0 w + x_0 - x_0 \rangle$$

da cui

$$\begin{aligned} |\langle v_n, w \rangle| &\leq \frac{1}{n_0} \underbrace{|\langle v_n, x_0 + n_0 w \rangle|}_{\leq k_0} + \frac{1}{n_0} \underbrace{|\langle v_n, x_0 \rangle|}_{\leq k_0} \\ &\leq \frac{2k_0}{n_0} \end{aligned}$$

Quindi ho dimostrato che $B(0,1) \subseteq C \frac{2k_0}{n_0}$

Uso come w il vettore $\frac{v_n}{\|v_n\|}$ e ottengo

$$\|v_n\| \leq \frac{2k_0}{n_0} \quad \text{--- o --- o ---}$$

BAIRE POINT 5 Sia V normato e sia $v_n \rightarrow v$ debole. Allora $\{v_n\}$ è limitata.

Dim Per ogni $f \in V'$ (Banach, quindi Baire) vale

$$f(v_n) \rightarrow f(v)$$

dunque LHS limitato. Poniamo

$$C_k := \{f \in V' : |f(v_n)| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Sono chiusi e d'unione è tutto, quindi esiste

$$B_{V'}(f_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$$

$$\text{cioè} \quad |(f_0 + r_0 g)(v_n)| \leq k_0 \quad \forall g \in B_{V'}(0,1)$$

Voglio dim. che $B_{V'}(0,1) \subseteq C_{\text{qualcosa}}$

$$g(u_m) = \frac{1}{n_0} \log(u_m) = \frac{1}{n_0} [\log(u_m) + f_0(u_m) - f_0(u_m)]$$

da cui

$$\begin{aligned} |g(u_m)| &\leq \frac{1}{n_0} \underbrace{|(f_0 + \log)(u_m)|}_{\leq k_0} + \frac{1}{n_0} \underbrace{|f_0(u_m)|}_{\leq k_0} \\ &\leq \frac{2k_0}{n_0} \end{aligned}$$

è vera per ogni $m \in \mathbb{N}$ e ogni $g \in B_{Y'}(0,1)$.

Facciamo il sup su g a n fisso, per caratterizzazione duale della norma troviamo

$$\|u_m\|_Y \leq \frac{2k_0}{n_0} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 63

Titolo nota

13/12/2018

BAIRE POINT 6 Uno sp. di Banach (o di Hilbert) NON può avere base ALGEBRICA numerabile

Dim. Sia $\{u_n\}$ base algebrica. Considero

$$C_k := \text{Span} \{u_1, \dots, u_k\}$$

Allora i C_k sono chiusi e hanno parte interna $\emptyset$. Se è vero ho un assunto perché la loro unione è tutto lo spazio.

- Parte interna $\emptyset$ è semplice: altrimenti contenebbero una palla centrata in un certo $v \in C_k$ e quindi contenebbero $v + \varepsilon u_{k+1}$

per ε piccolo.

- Perché sono chiusi?

Fatto generale Se V è sp. normato e $W \subseteq V$ è s.sp. vett. di dim. finita, allora W è chiuso.

Dim. 1 Sia $w_1, \dots, w_k$ una base algebrica di W .

Posso identificare W con $\mathbb{R}^k$

$$\mathbb{R}^k \ni (c_1, \dots, c_k) \rightarrow c_1 w_1 + \dots + c_k w_k \in W$$

Su W posso mettere 2 norme

- norma ereditata da V
- norma ereditata da $\mathbb{R}^k$ $\|w\| = \{c_1^2 + \dots + c_k^2\}^{1/2}$

Caution: 2 norme in uno sp. di dim. finita sono equiv.

Quindi W è completo anche rispetto alla norma che eredita da V e quindi è chiuso.

Dim 2 (Con le mani)

Prendiamo una successione di elementi di W , che scriviamo come

$$c_1^n w_1 + \dots + c_k^n w_k = v_n$$

Sappiamo che $v_n \rightarrow v_\infty$ in V . Vorremmo che $v_\infty \in W$.

Ci piacerebbe tanto che

$$c_1^n \rightarrow c_1^\infty$$

$$\vdots$$

$$c_k^n \rightarrow c_k^\infty$$

almeno a livello di s.succ.

Ci servirebbe che i coeff. sono limitati. Per questo posso usare l'equiv. delle norme o ragionare per assurdo.

Supp. che non lo siano, wlog $c_1^n \rightarrow +\infty$ a meno di s.succ.

Considero $\frac{1}{c_1^n} v_n$ (divido tutto per c_1^n) e lo indico con

$$w_1 + a_2^n w_2 + \dots + a_k^n w_k$$

Posso anche supporre che c_1^n fosse il coeff. + grande in valore assoluto. Ora so che $|a_i^n| \leq 1$ per ogni i, n , quindi a meno di s.succ.

$$a_i^n \rightarrow a_i^\infty$$

e quindi

$$\boxed{\frac{1}{c_1^n} v_n} \rightarrow w_1 + a_2^\infty w_2 + \dots + a_k^\infty w_k = 0$$

$$\downarrow$$

0

quindi i $w_1, \dots, w_k$ non sono lin. indep.

— 0 — 0 —

BAIRE POINT 7**Teorema (BANACH - STEINHAUS)**

Siano X sp. di Banach, Y sp. normato, $L_i : X \rightarrow Y$ operatori lineari continui con $i \in I$ (insieme di indici). Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

(i) per ogni $x \in X$ vale $\sup_{i \in I} \|L_i(x)\|_Y < +\infty$ (LIMITAZIONE QUALITATIVA)

(ii) $\sup_{i \in I} \|L_i\|_{\infty(X,Y)} < +\infty$, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|L_i(x)\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X \quad \forall i \in I$$

(LIMITAZIONE QUANTITATIVA)

Dim. Basta fare (i) $\Rightarrow$ (ii). Cerco di rendere la (i) quantitativa. Pongo

$$C_K := \{x \in X : \|L_i(x)\|_Y \leq K \quad \forall i \in I\}$$

I C_K sono chiusi (perché le L_i sono continue) e la loro unione è X per ipotesi (i).

Allora almeno uno ha parte interna, diciamo

$$B(x_0, r_0) \subseteq C_{K_0}$$

cioè

$$\|L_i(x_0 + r_0 v)\|_Y \leq K_0 \quad \forall v \in B(0,1) \quad \forall i \in I$$

Cerco di ottenere limitazione per $L_i(v)$. Osservo

$$L_i(v) = \frac{1}{r_0} L_i(r_0 v) = \frac{1}{r_0} L_i(x_0 + r_0 v) - \frac{1}{r_0} L_i(x_0)$$

da cui

$$\begin{aligned} \|L_i(v)\|_Y &\leq \frac{1}{r_0} \|L_i(x_0 + r_0 v)\|_Y + \frac{1}{r_0} \|L_i(x_0)\|_Y \\ &\leq \frac{2k_0}{r_0} \quad \forall i \in I \quad \forall v \in B(0,1) \end{aligned}$$

Facendo il sup su v troviamo $\|L_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \frac{2k_0}{r_0}$.

— o — o —

Enunciato alternativo:

BANACH-STEINHAUS bis Siano X, Y, L_i come sopra.
Allora sono alternativi i seguenti fatti

(i) esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|L_i(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$ per ogni i, x

(ii) esiste un G_δ denso in X ($\cap$ num. di aperto) tale
che per ogni x in questo insieme vale

$$\sup \{ \|L_i(x)\|_Y : i \in I \} = +\infty$$

Dim. Prendiamo i C_k come prima

- Se almeno uno di questi ha parte interna $\neq \emptyset$, allora siamo nel caso (i)
- Se tutti hanno parte interna vuota, allora

$$\sup \{ \|L_i(x)\|_Y : i \in I \} < +\infty$$

per x nella loro unione, che quindi è un F_σ con
parte interna vuota, quindi il sup è $+\infty$ nel complementare,
che è G_δ denso.

— o — o —

BAIRE POINT 8 Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e non derivabile in nessun punto, anzi ne esistono proprio tante.

Dim. Sia X lo spazio delle funzioni cont e limitate con la norma del sup. Questo è un Banach. Pongo

$$C_k := \{ f \in X : \exists x \in [-k, k], \forall \alpha \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] |f(x+\alpha) - f(x)| \leq k|\alpha| \}$$

Claim:

- ① C_k è chiuso su X
- ② se f è derivabile in almeno un p.to, allora $f \in C_k$ per qualche k
- ③ C_k ha parte interna $\emptyset$

Se dimostro i claim, allora le f derivabili in almeno un p.to sono contenute in un F_σ con parte interna $\emptyset$.

Dim ①: Sia $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. con $f_n \in C_k$. Devo dire che $f_\infty \in C_k$. Sia x_n il p.to speciale di f_n . A meno di s.succ. $x_n \rightarrow x_\infty \in [-k, k]$. Dico che x_∞ è speciale per f_∞

$$\begin{aligned} |f_n(x_n + \alpha) - f_n(x_n)| &\leq k|\alpha| & \forall \alpha \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] \\ \downarrow & \quad \downarrow \leftarrow \text{teo. doppio scambio} \\ |f_\infty(x_\infty + \alpha) - f_\infty(x_\infty)| &\leq k|\alpha| \end{aligned}$$

Dim ② Se f è deriv. in x_0 , allora

$$\left| \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha} \right| \leq 2 |f'(x_0)| \quad \text{per } |\alpha| \leq \delta$$

Basta prendere k in maniera tale che

$$x_0 \in [-k, k]$$

$$\frac{1}{k} \leq \delta$$

$$k \geq 2 |f'(x_0)|$$

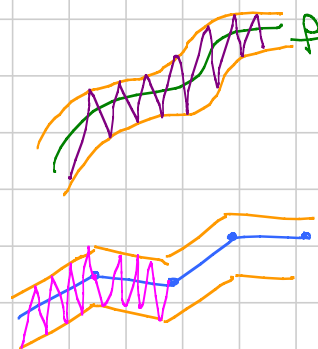
Dim ③ Data $f \in X$ e dato $\varepsilon > 0$, devo trovare in $B_X(f, \varepsilon)$ delle funzioni che non stanno in C_k

Idea

- posso approx. f a meno di $\frac{\varepsilon}{2}$ con funzioni affini a tratti (basta unire dei puntini sul grafico abbastanza ravvicinati)

- posso approx. ogni affine a tratti a meno di $\frac{\varepsilon}{2}$ con affini a tratti con pendenza $\geq 2k$, e che quindi non stanno in C_k .

— o — o —



Isb. Analisi Matematica

LEZIONE 64

Titolo nota

13/12/2018

BAIRE POINT 9 Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e 2π -periodica la cui serie di Fourier non converge ad $f(x)$ in almeno un p.to.

Dim. Supponiamo anche f a media nulla, così la serie di Fourier è del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)$$

dove

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

Siano $S_n(x)$ le somme parziali della serie. A meno della costante π

$$\begin{aligned} S_n(x) &:= \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} f(t) [\sin(kt) \sin(kx) + \cos(kt) \cos(kx)] dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k(t-x)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) \underbrace{\sum_{k=1}^n \cos(k(t-x))}_{D_n(t-x)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t-x) dt \end{aligned}$$

Ci concentriamo wlog su $x=0$

$$S_n^f(0) = \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t) dt$$

C'è una formula per $D_n(t)$:

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}$$

(si dimostra pensando
 $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$)

Supponiamo che per ogni f continua e 2π -periodica, si
 abbia che spazio X Banach rispetto
 cont. unif.

$$S_n^f(0) \rightarrow f(0)$$

Vorrebbe dire che per ogni $f \in X$ vale $\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n^f(0)| < +\infty$

(sto pensando $X \ni f \rightarrow S_n^f(0) \in \mathbb{R}$)

Allora per BS vale $|S_n^f(0)| \leq M \|f\|_X \quad \forall f \in X$
 oppure equivalentemente

$$\|S_n^f(0)\|_{X'} \leq M$$

Quindi non basta dimostrare che le norme di $S_n^f(0)$ non
 sono equivanibate.

Fatto generale Qual è la norma di un operatore del tipo

$$f \rightarrow \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$$

Si tratta di $\|g\|_{L^1(0,2\pi)}$. Infatti $\leq$ segue da Hölder

$$\left| \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt \right| \leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1}$$

Per il $\geq$ vorrei tanto usare $f(x) := \operatorname{sign} g(x)$, che però non è continua.

Allora prendiamo $f_m: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ continue che approssimano $\operatorname{sign}(g(x))$ nel senso della conv. puntuale quasi ovunque (basta fare delle convulsioni).

A questo per conv. dominata

$$\int_0^{2\pi} f_m(t) g(t) dt \rightarrow \int_0^{2\pi} |g(x)| dt = \|g\|_{L^1}$$

Fatto questo, non ci resta che dim. che

$$\int_0^{2\pi} |D_m(t)| dt \rightarrow +\infty \quad \text{per } m \rightarrow +\infty$$

e questo è esercizio di Analisi 1

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\sin \frac{t}{2}} dt &\geq 2 \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t} dt \\ &\quad \uparrow \sin \frac{t}{2} \leq \frac{t}{2} \\ &= 2 \int_0^{(n+\frac{1}{2}) \cdot 2\pi} \frac{|\sin y|}{y} dy \\ &\rightarrow 2 \int_0^{+\infty} \frac{|\sin y|}{y} dy = +\infty \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che $S_m^f(0)$ non è limitato come operatore, quindi per BS in versione alternativa si ha che

$$\{f \in X : |S_m^f(0)| \text{ non è limitato}\}$$

(dunque di sicuro non converge)

è un G_δ denso.

Ripetendo il ragionamento con un qualunque $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 2\pi]$ troviamo che esiste un G_δ denso contenuto in X tale che

$$\forall f \in G_\delta \quad \forall q \in \mathbb{Q} \cap [0, 2\pi] \quad S_n^f(q) \text{ non \u00e9 limitata}$$

Pu\u00f2 essere che la serie converga nei p.ti che non stanno in $\mathbb{Q}$?

Dim che NO Definiamo

$$S^*(f, x) := \sup \{ |S_n^f(x)| : n \in \mathbb{N} \}$$

Fissata f , questa \u00e9 una funzione di x che \u00e9 sup di funzioni continue, quindi \u00e9 SCI.

L'insieme dei p.ti in cui una funzione SCI vale $+\infty$ \u00e9 un G_δ perch\u00e9, se $g(x)$ \u00e9 questa funzione, si pu\u00f2 scrivere come

$$\{x \in \mathbb{R} : g(x) = +\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in \mathbb{R} : g(x) > k\}}_{\text{aperti}}$$

Nel nostro caso l'insieme degli x per cui $S^*(f, x) = +\infty$ \u00e9 un G_δ denso perch\u00e9 contiene $\mathbb{Q}$, quindi contiene molti pi\u00f9 punti rispetto a $\mathbb{Q}$.

Conclusione Esiste un G_δ denso contenuto nelle funzioni continue e 2π -periodiche tale che, per ogni f appartenente a questo insieme, la serie di Fourier non converge per ogni x appartenente ad un G_δ denso in $\mathbb{R}$.

Fatto Se $f \in H^1((0, 2\pi))$, allora la serie di Fourier converge uniformemente a f .

Dim Se i coeff. decadono abbastanza, allora la conv. unif. segue da quella totale

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

(usato condizioni periodiche
che al bordo)

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) \cos(nt) dt$$

da cui

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)| \cdot |\cos(nt)| dt$$

$$\leq \frac{1}{n\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} |\cos(nt)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Non basta. Se avessi come ipotesi $f \in H^2$, allora verrebbe un'altra n al denominatore.

Idea generale : più $f \in H^k$, più i coeff. decadono
— 0 — 0 —

Esercizio Non c'è nessuna norma che renda $\mathbb{R}[x]$ completo. Cosa succede se completo $\mathbb{R}[x]$ rispetto a

$$\int_0^{2\pi} |p(x)| dx \quad ?$$

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 65

Note Title

14/12/2018

BAIRE POINT 10**Teorema** (Limite puntuale di funz. continue)

Siano X sp. di Baire, Y sp. metrico, $f_n: X \rightarrow Y$ continue, $f_\infty: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ per ogni $x \in X$.

Allora l'insieme dei p.ti di discontinuità di f_∞ è un F_σ con parte interna vuota.

Dim Che sia un F_σ è un fatto generale in quanto

$$\{\text{disc di } f_\infty(x)\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon = \bigcup_{k \geq 1} D_{1/k}$$

dove

$$D_\varepsilon := \left\{ x \in X : \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{chiuso} \end{array} \forall \text{ intorno } \mathcal{U} \text{ di } x \text{ esistono } (y, z) \in \mathcal{U}^2 \text{ b.c. } d_Y(f(y), f(z)) \geq \varepsilon \right\}$$

Claim: i D_ε hanno tutti parte interna $\emptyset$.

Supponiamo per assurdo che

$$A_0 \subseteq D_{\varepsilon_0}$$

$\uparrow$
aperto $\neq \emptyset$

Allora ogni sottoaperto di A_0 contiene 2 p.ti con immagini a distanza $\geq \varepsilon_0$. Dim. che non è vero. Poniamo

$$C_k := \left\{ x \in A_0 : d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall n \geq k \quad \forall m \geq k \right\}$$

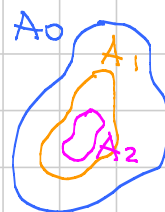
$\uparrow$
sp. di Baire

I C_k sono chiusi e la loro unione è A_0 . Quindi esiste

$$A_1 \subseteq C_{k_1}$$

$\uparrow$
aperto $\neq \emptyset$

$$A_1 \subseteq A_0$$



Poiché f_{k_1} è continua esiste $A_2 \subseteq A_1$ aperto t.c.

$$d_Y(f_{k_1}(y), f_{k_1}(z)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall (y, z) \in A_2$$

Dico che in A_2 non esiste una coppia di p.ti con immagini a distanza $\geq \varepsilon_0$. Infatti

$$d_Y(f_{k_1}(y), f_{k_1}(z)) \leq d_Y(f_{k_1}(y), f_{k_1}(y)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad y \in A_1$$

$$+ d_Y(f_{k_1}(y), f_{k_1}(z)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \text{se } y, z \in A_2$$

$$+ d_Y(f_{k_1}(z), f_{k_1}(z)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad z \in A_1$$

Nella prima e terza riga ho passato al limite la def. di C_{k_1} , cioè

$$d_Y(f_m(x), f_m(x)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall m \geq k_1 \quad \forall m \geq k_1$$

$\downarrow m \rightarrow +\infty$

$$d_Y(f_m(x), f_{\infty}(x)) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0 \quad \forall m \geq k_1$$

— 0 — 0 —

Corollario Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile ovunque.

Allora esiste almeno un p.to (anzi un G_δ denso di p.ti) in cui $f'(x)$ è continua.

[Dim.] Basta osservare che

$$f'(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{f(x + \frac{1}{m}) - f(x)}{\frac{1}{m}}$$

— 0 — 0 —

$\varphi_m(x)$ che conv. puntualmente.

BAIRE POINT 11Teorema della mappa aperta e dintorni

Prop 1 Siano X e Y insiemini, e sia $f: X \rightarrow Y$.

Allora sono equiv. i seguenti fatti'.

(i) f è surgettiva

(ii) per ogni $y \in Y$, esiste $x \in X$ t.c. $f(x) = y$

(iii) esiste un solver $S: Y \rightarrow X$ tale che

$$f(S(y)) = y \quad \forall y \in Y$$

↑ inversa destra

Dim. : 1ª settimana del primo anno, modulo CA.

Prop 2 Siano X e Y sp. normati, e sia $f: X \rightarrow Y$ lineare.

Allora sono equiv. i seguenti fatti'.

(i) f è aperta, cioè per ogni $A \subseteq X$ aperto si ha $f(A)$ è aperto in Y .

(ii) esiste $R > 0$ t.c. $f(B_X(0, R)) \supseteq B_Y(0, 1)$.

(iii) esiste un solver quantitativo, cioè esistono $M \in \mathbb{R}$ e $S: Y \rightarrow X$ tale che

$$f(S(y)) = y \quad \forall y \in Y \quad \|S(y)\|_X \leq M \|y\|_Y \quad \forall y \in Y$$

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) Consideriamo $f(B_X(0, 1))$: deve essere aperto in Y , quindi deve contenere intorno di $f(0) = 0$.
Quindi

$$f(B_X(0, 1)) \supseteq B_Y(0, \delta_0)$$

Prendo $R = \frac{1}{\delta_0}$ e per linearità

$$\begin{aligned} f(B_X(0, \tfrac{1}{\delta_0})) &= f(\tfrac{1}{\delta_0} B_X(0, 1)) = \tfrac{1}{\delta_0} f(B_X(0, 1)) \\ &\supseteq B_Y(0, 1) \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si tratta di passare da 0 ad un p.to generico

Sia $A \subseteq X$ aperto qualunque. Devo dim. che $f(A)$ è aperto
Prendo $x_0 \in A$ e prendo

$$B_X(x_0, r_0) \subseteq A$$

Dico che esiste $r_1 > 0$ b.c.

$$B_Y(f(x_0), r_1) \subseteq f(A)$$

$$f(B_X(x_0, r_0)) = f(x_0 + r_0 B_X(0, 1))$$

$$= f(x_0) + r_0 f(B_X(0, 1))$$

$$= f(x_0) + \frac{r_0}{R} f(B_X(0, R))$$

$$\supseteq f(x_0) + \frac{r_0}{R} B_Y(0, 1)$$

$$= B_Y(f(x_0), \frac{r_0}{R})$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Per ogni $y \in B_Y(0, 1)$ sappiamo che esiste
 $x \in B_X(0, R)$ b.c.

$$f(x) = y$$

Cioè $\forall y \in B_Y(0, 1)$ definisco $S(y) =: x$ e ho che

$$f(S(y)) = y$$

$$\|S(y)\| \leq R$$

In generale per ogni $y \in Y$ con $y \neq 0$ (altrimenti $S(0) = 0$)
osservo che

$$\frac{y}{2\|y\|_Y} \in B_Y(0, 1)$$

A questo posso associare $x \in B_X(0, R)$ t.c.

$$f(x) = \frac{y}{2\|y\|_Y}$$

e pone poi $S(y) = 2\|y\|_Y \cdot x$. Per linearità questo risolve e soddisfa

$$\|S(y)\|_X \leq 2R \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

Idea: se so risolvere nella palla, per linearità so risolvere ovunque.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Automatico con $R = M$.

Prop 3 Siano X Banach, Y normato, $f: X \rightarrow Y$ lineare e continua.

Allora i seguenti fatti sono equi.

(i) Esiste un solver quantitativo

(ii) Esiste un solver quantitativo su un denso, cioè esistono $D \subseteq Y$ denso, $\hat{M} \in \mathbb{R}$, $S: D \rightarrow X$ tale che

$$f(S(y)) = y \quad \forall y \in D \quad \|S(y)\|_X \leq \hat{M} \|y\|_Y \quad \forall y \in D$$

[So risolvere $f(x) = y$ quando $y \in D$ in maniera QUANTITATIVA]

Inoltre in (ii) $\Rightarrow$ (i) la costante che mi viene in (i) è $2\hat{M}$.

Dim Basta fare (ii) $\Rightarrow$ (i).

Prendo $y \in Y$ e scelgo $y_n \rightarrow y$ con $y_n \in D$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ so che esiste $x_n \in X$ tale

$$f(x_n) = y_n \quad \text{e} \quad \|x_n\|_X \leq \hat{M} \|y_n\|_Y$$

Se per primo caso $x_n \rightarrow x_\infty$ in X , allora

$$f(x_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_\infty$$

$\uparrow$
 continuità di f

Purtroppo so solo che gli $\{x_n\}$ sono limitati...

Altra idea: gli $\{y_n\}$ sono di Cauchy, quindi

$$\|y_n - y_m\|_Y \leq \varepsilon \quad \text{se } n, m \text{ grandi}$$

$$f(x_n) - f(x_m) = f(x_n - x_m) = y_n - y_m$$

e quindi $\|x_n - x_m\|_X \leq \hat{M} \|y_n - y_m\|_Y$

e da qui concluderei

La dim è sbagliata per 2 motivi

- non so che $y_n - y_m \in D$ e quindi non ho modo sul
solito di $y_n - y_m$
- se anche stesse in D , non sarebbe detto che

$$S(y_n - y_m) = S(y_n) - S(y_m).$$

VICOLO CIECO.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 66

Titolo nota

14/12/2018

Lemma Sia Y normato e sia $D \subseteq Y$ denso.Allora per ogni $y \in Y \setminus \{0\}$ esiste $\{y_n\} \subseteq D$ tale che

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y \leq 2 \|y\|_Y$$

Dim. Costruisco y_n per ricorrenza.

- Scelgo $y_1 \in D$ tale che $\|y - y_1\|_Y \leq \frac{1}{2} \|y\|_Y$
- Scelgo $y_2 \in D$ tale che $\|y - y_1 - y_2\|_Y \leq \frac{1}{4} \|y\|_Y$
(posso perché è equiv. ad approx $y - y_1$)
- ...
- Supponendo di aver scelto $y_1, \dots, y_k$, scelgo y_{k+1} in maniera tale che

$$\|y - y_1 - \dots - y_k - y_{k+1}\|_Y \leq \frac{1}{2^{k+1}} \|y\|_Y$$

↑ sto approx. questo

Per costruzione $\sum_{k=1}^n y_k \rightarrow y$ per $n \rightarrow +\infty$.

Vediamo la norma

$$\|y_1\|_Y \leq \|y - y_1\|_Y + \|y\|_Y \leq \|y\|_Y + \frac{1}{2} \|y\|_Y$$

:

$$\|y_{k+1}\|_Y \leq \|y - y_1 - \dots - y_{k+1}\|_Y + \|y - y_1 - \dots - y_k\|_Y$$

$$\leq \frac{1}{2^{k+1}} \|y\|_Y + \frac{1}{2^k} \|y\|_Y \leq \frac{1}{2^{k+1}} \|y\|_Y$$

Sommando dovrebbe venire, a meno di migliorare l'approx
straola facendo. — o — o —

Dim Prop 3 dato il lemma

Ipotesi: so risolvere quantitativamente in D

Tesi: so risolvere quantitativamente in Y

Dato $y \in Y$, prendo y_n come nel lemma, e prendo $x_n \in X$ tali che

$$f(x_n) = y_n \quad \|x_n\|_X \leq \hat{M} \|y_n\|_Y$$

Osservo che $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge assolutamente perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X \leq \hat{M} \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y \leq 2\hat{M} \|y\|_Y$$

Sia x_{∞} la somma della serie. Allora $\|x_{\infty}\|_X \leq 2\hat{M} \|y\|_Y$ e questo risolve

$$\begin{array}{ccc} f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) & = & \sum_{k=1}^n f(x_k) = \sum_{k=1}^n y_k \\ \downarrow \swarrow \text{continuità} & \nearrow \text{linearità} & \downarrow \\ f(x_{\infty}) & & y_{\infty} \end{array}$$

Oss. Ho usato che X è Banach per dire che $\sum x_n$ converge.

TEOREMA (MAPPA APERTA)

Siano X e Y sp. di Banach, e sia $f: X \rightarrow Y$ lineare e continua.

Allora sono fatti equiv.

- (i) f è surgettiva (risolvibilità qualitativa di $f(x)=y$)
 (ii) f è aperta (" quantitativa " ")

Dim. (ii) $\Rightarrow$ (i) già fatto sotto ipotesi più deboli

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ci sono 3 passi

- Esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\text{Clos}(f(B_X(0, m_0)))$ contiene un aperto
- Esiste $R > 0$ tale $\text{Clos}(f(B_X(0, R))) \supseteq B_Y(0, 1)$
- Dato R del p.to prec., allora $f(B_X(0, 2R)) \supseteq B_Y(0, 1)$, il che è equiv. ad essere mappa aperta.

Step 1 Pongo $C_k := \text{Clos}(f(B_X(0, k)))$ sono chiusi e l'unione è tutto per surgettività. Baire $\Rightarrow$ test

Step 2 Supponiamo $C_{k_0} \supseteq B_Y(y_0, r_0)$.

La tesi dovrebbe essere vera con

$$R = \frac{2k_0}{r_0}$$

Proviamo $y \in B_Y(0, 1)$. Allora

$$y = \frac{1}{r_0} r_0 y = \frac{1}{r_0} (y_0 + r_0 y) - \frac{1}{r_0} y_0$$

$\in \text{Clos}(f(B_X(0, \frac{k_0}{r_0})))$

$\nwarrow$ pure (corrisponde a $y=0$)

$$\in \text{Clos}(f(B_X(0, \frac{2k_0}{r_0})))$$

Step 3 Dallo step 2 sappiamo che $f(B_X(0, R))$ è denso in $B_Y(0, 1)$. Quindi, detto D questo denso, sappiamo che

$$\forall y \in D \exists x \text{ b.c. } f(x) = y \text{ e } \|x\|_X \leq R \|y\|_Y$$

Questa è la risolubilità quantitativa su un denso, che implica quella su tutto.

Fatto generale usato: se $\forall y \in \text{Densso in } B_Y(0,1)$ so trovare $x \in B_X(0,R)$ che risolve $f(x)=y$, allora $\forall y \in \text{Densso in } Y$ so trovare $x \in X$ che risolve $f(x)=y$ e soddisfa $\|x\|_X \leq R \|y\|_Y$

— o — o —

Corollario 1 Siano X, Y Banach, e sia $f: X \rightarrow Y$ lineare e continua.

Allora sono equiv.

(i) f è bigettiva

(invertibilità qualit.)

(ii) f^{-1} è lineare e continua

(" quantitativa)

Dim Quasi ovvia, visto che essere una mappa ^{aperta} implica la continuità dell'inversa.

Corollario 2 (Equiv. di norme) Sia V uno sp. vettoriale, e siano $\| \cdot \|_1$ e $\| \cdot \|_2$ due norme in V .

Supponiamo che

(i) V è un Banach rispetto ad entrambe le norme

(ii) esiste $M \in \mathbb{R}$ b.c.

$$\|v\|_1 \leq M \|v\|_2 \quad \forall v \in V$$

Allora esiste $m > 0$ tale che

$$\|v\|_1 \geq m \|v\|_2 \quad \forall v \in V$$

Dim Considero V_1 e V_2 i due sp. di Banach. Allora

$$\text{Id}: V_2 \rightarrow V_1$$

è per ipotesi lineare + continua, quindi lo è pure l'inversa.

— o — o —

Corollario 3 Siano X e Y due sp. di Banach, e sia $f: X \rightarrow Y$ lineare.

Allora sono equiv

(i) f è continua

(ii) il grafico di f è chiuso, cioè se $x_n \rightarrow x_\infty$ in X e $f(x_n) \rightarrow y_\infty \in Y$, allora $y_\infty = f(x_\infty)$

Dim Quella non ovvia è (ii) $\Rightarrow$ (i).

Consideriamo 2 norme in X , e cioè

$$\|x\|_1 := \|x\|_X$$

$$\|x\|_2 := \|x\|_X + \|f(x)\|_Y$$

È facile che sono norme e $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ per ogni $x \in X$

Se avessi la disug. opposta, avrei $\|x\|_1 \geq m \|x\|_2$ quindi

$$\|x\|_X \geq m \|x\|_X + m \|f(x)\|_Y$$

cioè

$$\|f(x)\|_Y \leq \frac{1-m}{m} \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

da cui la continuità.

Mi serve che X sia un Banach per la norma 2.

Presumo $\{x_n\}$ di Cauchy per la norma 2. Allora

$\{x_n\}$ è di Cauchy in X e $\{f(x_n)\}$ è di C. in Y

Quindi $x_n \rightarrow x_\infty$ per la norma di X

$f(x_n) \rightarrow y_\infty$ per la norma di Y

Per l'ipotesi di grafico chiuso sappiamo che $y_\infty = f(x_\infty)$.

Ora devo osservare che $x_n \rightarrow x_\infty$ per la norma 2.

Questo segue da

$$\|y_\infty - f(x_n)\|_Y$$

$$\|x_\infty - x_n\|_2 = \|x_\infty - x_n\|_X + \|f(x_\infty - x_n)\|_Y \rightarrow 0$$

Punto della situazione

Data $f: X \rightarrow Y$ voglio
risolvere $f(x) = y$

- ① Se f è lineare + surgettiva, allora esiste un solver lineare

[Dim: come a geometria e, con tanto CA]

- ② Se f è aperta, allora esiste un solver quantitativo

Domanda: se f è lineare + continua + surgettiva
(dunque aperta), esiste un solver
lineare + quantitativo?

Risposta:

→ in generale NO

→ vedi Hilbert 51.

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 67

Titolo nota

17/12/2018

Problema Dati V e W spazi vettoriali normati, data $f: V \rightarrow W$ lineare e continua e surgettiva, trovare
 $S: W \rightarrow V$
 lineare e continua t.c. $f(S(w)) = w$ per ogni $w \in W$.

Geometria 1 (V e W di dim. finita) Prendiamo

$$K := \ker f$$

Prendiamo $M \subseteq V$ s.sp. t.c. $M \oplus K = V$, consideriamo $f: M \rightarrow W$ e osserviamo che è lineare, iniettiva e surgettiva.

Quindi basta prendere $S: W \rightarrow M$ inversa della restrizione

Ist. An. Mat. Se V e W sono Hilbert, funziona allo stesso modo.

Prendiamo

$$K := \ker f \quad (\text{s.sp. vett. chiuso di } V)$$

Allora posso scrivere

$$V = K \oplus K^\perp$$

e osservare che

$\uparrow$ s.sp. vett. chiuso, quindi
a sua volta un Hilbert

$$f: K^\perp \rightarrow W$$

È lineare, continua, invertibile. Per il teo. della mappa aperta questa ammette un'inversa S lineare e continua.

— o — o —

Oss. Se V e W sono Banach, posso fare lo stesso se K ammette un supplementare topologico, cioè esiste $M \subseteq V$ s.sp. vett. chiuso tale che

$$V = M \oplus K$$

Nei Banach l'esistenza di M non è scontata.

— o — o —

OPERATORI NON LIMITATI

Def. Sia V e W sp. vettoriali. Un operatore non limitato è un'applicazione lineare

$$A: D(A) \rightarrow W$$

dove $D(A) \subseteq V$ è un s.sp. vett., detto "dominio di A "

Oss. L'operatore nullo def. solo su un sottospazio, ma anche su tutto V , è un operatore non limitato

Def. Un operatore non limitato si dice

- chiuso se il suo grafico è chiuso in $V \times W$ (sto assumendo che V e W siano normati)
- massimale se non esiste un operatore chiuso che lo estende.

L'ESEMPIO (Operatori diagonali in Hilbert con base ortonormale)

Sia H spazio di Hilbert, sia $\{e_n\}$ base ortonormale, sia $\{\lambda_n\}$ una successione di numeri.

Consideriamo l'operatore lineare definito da

$$A e_n = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

definito sul dominio

$$D(A) := \left\{ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n}_{u} \in H : \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n^2}_{< +\infty} < +\infty \right\}$$

garantisce che $Au := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n e_n$ sta in H

Oss. Si può identificare ogni $u \in H$ con la succ. $\{u_n\} \in \ell^2$ delle sue componenti risp. alla base.
In questo modo Au risulta identificato con $\{\lambda_n u_n\} \in \ell^2$

Caso speciale: quello in cui $\lambda_n > 0$. In questo posso definire le potenze di A

$$A^s e_n = \lambda_n^s e_n$$

e per linearità, se $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n$, allora

$$A^s u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s u_n e_n$$

In tutto questo s è un NUMERO REALE.

A questo punto possiamo anche definire

$$f(A) u := \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) u_n e_n$$

per ogni funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Domandone: chi è il dominio di A^s ?

$$D(A^s) = \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} u_n^2 < +\infty \right\}$$

Oss. Se $\lambda_n \rightarrow +\infty$ e $s < 0$, allora $D(A^s)$ è più grande di H !!!

Oss. Se $u \in D(A^s)$ e $v \in D(A^{-s})$, allora posso considerarne una specie di prodotto scalare tra u e v

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} u_n^2 < +\infty$$

Analogamente

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2s} v_n^2 < +\infty$$

Allora

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n v_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \lambda_n^s \lambda_n^{-s} v_n \right| \\ &\leq \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} \mu_n^2 \right)^{1/2}}_{\text{--- o ---}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2s} v_n^2 \right)^{1/2}}_{\text{--- o ---}} \end{aligned}$$

Caso ancora più speciale. Sia H sp. di Hilbert separabile

Sia $L : H \rightarrow H$ operatore lineare, continuo, simmetrico, definito positivo, compatto.

Per il te. spettrale esiste una base $\{e_n\}$ ortonormale, ed esistono numeri μ_n tali che

$$L e_n = \mu_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Inoltre $\mu_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\mu_n \rightarrow 0$.

L'inverso di L è un operatore NON LIMITATO con autovalori $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ definito da

$$A e_n = \frac{1}{\mu_n} e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con dominio $\mathcal{D}(A) := \left\{ u \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \mu_n^2 < +\infty \right\}$
 --- o ---

Ist. Analisi Matematica —

LEZIONE 68

Titolo nota

17/12/2018

INVERTER DELLA DERIVATA SECONDA
= DOPPIA PRIMITIVA CON BC

1° caso Intervallo $(0, \pi)$. Data $f \in L^2$, considero la doppia primitiva

$$\hat{F}$$

che soddisfa $\hat{F}(0) = \hat{F}(\pi) = 0$ (DBC)

Dim di esistenza e unicità

1° modo: ne prendo una $\int_0^x dt \int_0^t ds f(s)$. Osservo che tutte

le altre si ottengono aggiungendo $ax+b$ e le DBC determinano a e b univocamente

2° modo: minimizzo $\int_0^\pi \frac{1}{2} \dot{u}^2 + u f$

Il minimo esiste per metodo diretto ed è unico per argomento di convessità (forse perché non è ovvio)

3° modo: Lax - Milgram!

Si verifica facilmente che la doppia primitiva è un operatore lineare, continuo, simmetrico, compatto

Oss. Avere la doppia primitiva garantisce l'operatore simmetrico

$$\int_0^\pi \hat{G}(x) f(x) dx = - \int_0^\pi G(x) F(x) dx = \int_0^\pi g(x) \hat{F}(x) dx$$

Chi sono autovalori / autovettori ?

$$\hat{F}f(x) = \lambda f(x) \quad \text{c'è regolarità per bootstrap}$$

Derivo due volte $f''(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$

Moltiplico per f : $f(x) f''(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)^2$

$$-\int_0^\pi f'(x)^2 = \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi f(x)^2$$

Quindi $\frac{1}{\lambda} < 0$, lo chiamo $-v$

$$f''(x) = -v f(x) \quad \text{con } f(0) = f(\pi) = 0$$

$\leadsto$ Analisi 1 $\leadsto v = n^2$ e $f(x) = \sin(nx)$

Se considero la doppia primitiva con HDBC
gli autovalori sono $-\frac{1}{n^2}$ autogene

L'operatore inverso $-u''$ è un operatore non limitato
con autovalori n^2 e corrispondenti autovettori $\sin(nx)$

$$A : D(A) \longrightarrow H \quad A e_n = n^2 e_n$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$L^2((0, \pi))$$

$$H^2((0, \pi)) \cap H_0^1((0, \pi))$$

$$\text{NON } H_0^2((0, \pi))$$

— o — o —

Achtung! Ogni $u \in L^2((0, \pi))$ si scrive come serie di
 $\sin(nx)$, anche se u NON NULLE al bordo
(la convergenza è solo L^2 , quindi niente di male)

Caso 2 Doppia primitiva in $(0, 2\pi)$ con PBC

$$\hat{F}(0) = \hat{F}(2\pi)$$

$$F(0) = F(2\pi)$$

Per studiare la non unicità, ci restringiamo alle $f \in L^2$ a media nulla in partenza e arrivo

Dim ... andrebbe fatta ...

$$\min \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} u'^2 + f u : u(0) = u(2\pi), \int_0^{2\pi} u(x) dx = 0 \right\}$$

[Provare con il metodo diretto]

Dando per buona esist, unicità, compattezza, ora gli autovalori sono $-\frac{1}{n^2}$ con autovettori $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$

Prendendo l'inverso, ed estendendolo a tutto $L^2((0, 2\pi))$ otteniamo che $-\Delta$ con PBC è un operatore non limitato

$$\begin{array}{ccc} A : D(A) & \longrightarrow & H \\ \uparrow & & \uparrow L^2((0, 2\pi)) \\ H_{\text{per}}^2((0, 2\pi)) & & \\ \text{periodiche} & & \end{array}$$

Gli autovalori sono n^2 con autovettori $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ (anche 0 è autovalore con autovettore la costante 1).

3° caso Doppia primitiva con HNBC.

Anche qui occorre restringersi alla media nulla...

Torniamo al 1° caso:

$$A: H^2((0, \pi)) \cap H_0^1((0, \pi)) \rightarrow L^2((0, \pi))$$

$$Au = -u'' \quad \text{con DBC}$$

Chi è il dominio di $A^{1/2}$? Risposta: $H_0^1((0, \pi))$

(Più in generale: $D(A^k) = H^{2k}((0, \pi)) + \text{qualche BC}$)

Sia $u \in L^2((0, \pi))$. La scrivo come

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{u_n}_{\text{numeri}} \underbrace{e_n(x)}_{\sin(nx) \cdot \text{costante}}$$

$$\text{e } u_n = \int_0^{\pi} u(x) e_n(x) dx$$

Dico che

$$u \in H_0^1((0, \pi)) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n^2}_{\substack{\uparrow 2s \\ \uparrow \lambda_n}} u_n^2 < +\infty$$

$s = \frac{1}{2} \quad \lambda_n = n^2$

$\Rightarrow$ Supponiamo $u \in H_0^1$. Allora

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\pi} u(x) e_n(x) dx = c \int_0^{\pi} u(x) \sin(nx) dx \\ &= +c \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^{\pi} u'(x) \cos(nx) dx}_{b_n} \end{aligned}$$

$$\text{Ora } \sum n^2 u_n^2 = c^2 \sum b_n^2 \leftarrow \text{vorrei che convergesse}$$

Ora $\{\cos(mx)\}$ è, a meno di una costante, un sistema ortonormale in $L^2((0,\pi))$

[1° modo: verifica buona da Analisi 1

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ modo: } 0 &= \int_0^\pi e_i(x) e_j(x) dx \\ &= \int_0^\pi e_i(x) \frac{1}{j^2} \ddot{e}_j(x) dx \\ &= \frac{1}{j^2} \int_0^\pi \ddot{e}_i(x) e_j(x) dx \end{aligned}$$

Ora $\sum b_m^2$ è la serie delle componenti di $\hat{u}$ rispetto ad un sistema ortonormale (non serve nemmeno che sia completo!)

[$\Leftarrow$] Supponiamo ora $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$

Poniamo

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k e_k(x) \rightarrow u(x) \quad \text{in } L^2$$

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k \dot{e}_k(x) \quad \text{se converge in } L^2, \text{ converge a } \dot{u}(x)$$

Per dimostrare la convergenza basta osservare che $\dot{e}_i(x)$ sono ortogonali, quindi basta controllare che converga

$$\sum_{k=1}^n u_k^2 \underbrace{\|\dot{e}_k(x)\|_{L^2}^2}_{n^2} < +\infty$$

Manca che sono nulli a bordo (la u) e questo segue dal fatto che

$\sum u_n \sin(nx)$ converge unif.

in quanto converge totalmente perché

$$\sum |u_n| = \sum \underbrace{u_n}_{=0} \underbrace{|u_n|}_{=0} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{=} \leq \left(\sum u_n^2 u_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}$$

Ist. Analisi Matematica

-

LEZIONE 69

Note Title

19/12/2018

Setting : intervallo $(0, \pi)$, $H = L^2((0, \pi))$, $A: D(A) \rightarrow H$

$$Au = -u_{xx} \quad \text{con DBC}$$

$$D(A) := H^2((0, \pi)) \cap H_0^1((0, \pi))$$

Esiste una base ortonormale di H che diagonalizza A , cioè

$$Ae_n = n^2 e_n \quad \forall n \geq 1$$

$\uparrow$ autovaleori (= cost. $\cdot \sin(nx)$)

$$D(A^s) := \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{u_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{numeri}}} \underbrace{e_n(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{funz.}}} : \sum_{n=1}^{\infty} n^{4s} u_n^2 < +\infty \right\}$$

($s > 0$ reale)

$\uparrow$ dà senso a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2)^s e_n(x) = A^s u$$

Oss. Per $s < 0$ posso definire $A^s: H \rightarrow H$ limitato, ma posso anche definirlo su un ambiente + grande, cioè $D(A^s)$ che in questo caso è $\supseteq H$.

Definizione $H^1((0, \pi)) \subseteq L^2((0, \pi))$

Chi ha il duale + grande?

• Dal p.to di vista di Riesz, è ovvio che $[H^1((0, \pi))]' \subseteq (L^2)'$

• D'altra parte, dato un funzionale $f: L^2 \rightarrow \mathbb{R}$, questo per restrizione induce $\hat{f}: H^1 \rightarrow \mathbb{R}$.

La mappa

$$f \rightarrow \hat{f} \quad (L^2)' \rightarrow (H^1)'$$

è lineare, continua e iniettiva.

In questo senso $(H^1)'$ è più grande di $(L^2)'$.

In pratica, il duale di H^1 è H^{-1} . Pensando in termini di componenti

$$L^2 = \{ \{u_n\} \in \ell^2 : \sum u_n^2 < +\infty \}$$

$$H^1 = \{ \{u_n\} \in \ell^2 : \sum n^2 u_n^2 < +\infty \}$$

$$H^{-1} = \{ \{u_n\} \text{ succ.} : \sum \frac{1}{n^2} u_n^2 < +\infty \}$$

Così descritto vale

$$H^1 \subseteq L^2 \subseteq H^{-1}$$

Terme
Hilbertiane

Esercizio: vedere che ogni el. del duale di H^1 (pensato come sottospazio di ℓ^2) si rappresenta come elemento di H^{-1} .

Esercizio Supponiamo che $u \in H^s = D(A^{\frac{s}{2}})$ nel setting cubico.

Allora se $s > \frac{1}{2}$ si ha che u è continua e quindi in particolare si annulla in 0 e π

Abbiamo $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sin(nx)$ con $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} u_n^2 < +\infty$

Se ho la conv. totale, allora ok

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n^s |u_n| \frac{1}{n^s} \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} u_n^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \right\}^{1/2}$$

Se $2s > 1$, abbiamo conv. totale.

Oss. Se $s < \frac{1}{2}$, esistono u illimitate che stanno in H^s

[Per esercizio provare con $|\log x|$]

Oss. Si tratta della condizione che nelle immersioni di Sobolev era $mp > d$

Achtung! Sia $u \in D(A^{1/2})$ che abbiamo visto essere $H_0^1((0, \pi))$

① Chi è $\|A^{1/2}u\|_{L^2}$? $\|i\|_{L^2}$

② Chi è $A^{1/2}u$? NON è i !

Dim.

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$$

$$A^{1/2}u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n \sin(nx) \neq i(x)$$

$$i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot n \cos(nx)$$

Ora essendo $\{\sin(nx)\}$ e $\{\cos(nx)\}$ ortogonali e quasi ortonormali, vale

$$\|A^{1/2}u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 = \|i\|^2$$

Esercizio Chi è $D(A^\pi)$?

Sono le $u \in H^{2\pi}$ che verificano la condizione

$$u(0) = \ddot{u}(0) = u^{(4)}(0) = u^{(6)}(0) = 0$$

$$u(\pi) = \ddot{u}(\pi) = u^{(4)}(\pi) = u^{(6)}(\pi) = 0$$

su questa non ci soffermiamo

Sono $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$ con $\sum_{n=1}^{\infty} n^{4\pi} u_n^2 < +\infty$

$$u^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \sin(nx) \cdot u_n \quad \text{Conv. tot. ?}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\pi} u_n n^{4-2\pi} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{4\pi} u_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4\pi-8}} \right)^{1/2}$$

Se metto le derivate seste esce $\frac{1}{n^{4\pi-12}}$, che non converge.

Esercizio Una delta di Dirac sta in H^{-1}

$$\text{Delta}_{\frac{\pi}{2}} \quad Lu := u\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Questa è una applicazione lineare e continua in H^1 .
La sua serie di Fourier è

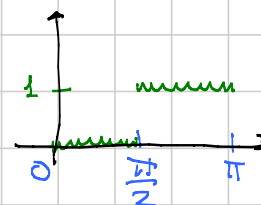
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad (\text{a meno di costanti})$$

dove $a_n = \langle \delta_{\frac{\pi}{2}}, \sin(nx) \rangle = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = +1, 0, -1, 0, \dots$

e si vede che $\sum \frac{a_n^2}{n^2}$ converge

Esercizio Verificare che $\delta_{\frac{\pi}{2}}$ è la derivata della Heaviside

Basta scrivere la serie della HS
e derivare formalmente e vedere
che ottengo quella scritta sopra



— o — o —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 70

Note Title

19/12/2018

Generalizzazione ad $\mathbb{R}^d$.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ limitato e abbastanza regolare da avere Poincaré e la regolarità H^2 per le soluzioni di $\Delta u = f$.

$$H = L^2(\Omega)$$

$$Au = -\Delta u$$

$$\text{con } D(A) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

Allora A è l'inverso di un operatore simmetrico compatto, quindi A ammette una diagonalizzazione, cioè esiste $\{e_n(x)\}$ ortonormale in H b.c.

$$-\Delta e_n(x) = \lambda_n^2 e_n(x) \quad \forall n \geq 1$$

↑
autovalori di $-\Delta$ con DBC

[Delirio: CAN ONE HEAR THE SHAPE OF A DRUM?]

Determinare Ω conoscendo gli autovalori di $-\Delta$ con DBC]

In analogia alla dim 1 vale che

$$u \in D(A^{1/2}) \iff u \in H_0^1(\Omega) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n^2 < +\infty$$

Proviamo a dim. una freccia. Oss. fondamentale è che

$\{De_n(x)\}$ sono ortogonali in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$

$$\int_{\Omega} \langle De_i(x), De_j(x) \rangle = - \int_{\Omega} e_i(x) \Delta e_j(x) = \lambda_j^2 \int_{\Omega} e_i(x) e_j(x) = 0$$

$$\int_{\Omega} |De_i(x)|^2 = \lambda_i^2 \int_{\Omega} |e_i(x)|^2 dx = \lambda_i^2$$

Supponiamo $u \in H_0^1$. Allora

$$u u = \int_{\Omega} u(x) u(x) dx = - \frac{1}{\lambda_m} \int_{\Omega} u(x) \Delta u(x)$$

$$= \frac{1}{\lambda_m} \int_{\Omega} \underbrace{\langle Du(x), Du(x) \rangle}_{du} dx$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{1}{\lambda_n^2} du^2} < +\infty$$

Quadrato della componente
di Du rispetto a $\{Du_n(x)\}$

La freccia opposta è analoga. Per guadagnare che la traccia al bordo è nulla occorre usare la continuità delle tracce.

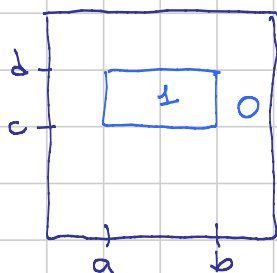
— o — o —

Esercizio 1 $\Omega = (0, \pi)^2$. Chi è base ortonormale di autovettori del Laplaciano DBC?

$$e_{m,n} = \sin(mx) \cdot \sin(ny) \quad (\text{a meno di costante})$$

L'autovalue con. è $m^2 + n^2$

[È chiaro che sono autovettori. Sarebbe che lo span sia denso. O si va con Stone-Weierstrass o più facilmente si mostra che le caratt. dei rettangolini stanno nella chiusura]

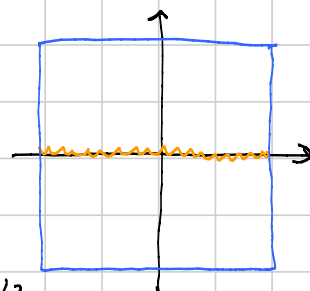


Basta prendere approx per caratt. di (a,b) e di (c,d) e moltiplicarle]

Esercizio 1 Se sono in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^2$ la base è

$$\cos(mx) \cos(my)$$

Esercizio 2 Prendo $u \in H_0^1((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^2)$
e considero la sua traccia sull'asse x .
Dove sta? Sta in $H^{1/2}$ sing.



L'immagine della traccia def. su H_0^1 è $H^{1/2}$

Dim. $\Rightarrow$ Prendo $u \in H_0^1$ e mostro che la traccia $\in H^{1/2}$

$$u(x, y) = \sum_{m, n} u_{m, n} \cos(mx) \cos(my) \quad \text{con}$$

$$\sum_{m, n} (m^2 + n^2) u_{m, n}^2 < +\infty$$

La traccia è

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{m, n} u_{m, n} \cos(mx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{m, n} \right)}_{c_n} \cos(nx) \end{aligned}$$

Dico che $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n < +\infty$

Ora

$$|c_n| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |u_{m, n}| \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} (m^2 + n^2) |u_{m, n}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} \right)^{1/2}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (m^2 + n^2) |u_{m,n}|^2 \right) n \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} \right)$$

Funzione limitata di n (si fa con serie integrali)

$\leq \text{cost} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \dots$
che sappiamo convergere

⌊ Data $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx)$ con $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2 < +\infty$

La vogliamo estendere a tutto il $\square$ numerico H^1 .

Con un conto analogo, si dimostra che è a meno di costante la traccia di

$$\sum_{m,n} u_{m,n} \cos(mx) \cos(ny)$$

dove

$$u_{m,n} := \frac{c_n n}{m^2 + n^2}$$

← qualcosa del genere

Idea, quando sommo su m resta c_n costante

Devo verificare che

$$\sum_{m,n} u_{m,n}^2 (m^2 + n^2) = \sum_{m,n} \frac{c_n^2 n}{m^2 + n^2} n$$

↑ Quando sommo su m questo è $\leq \text{cost}$

— o — o —

Enunciato teo. spettrale + generale

Sia H sp. Hilbert separabile

Sia $A: D(A) \rightarrow H$ autoaggiunto (simmetrico e massimale)

Allora esistono • uno spazio di misura (M, m, μ)
con qualche proprietà

- una isometria

$$i: H \rightarrow L^2(M, \mu)$$

- una funzione misurabile $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i} & L^2(M) \\ \downarrow A & & \downarrow \text{Moltiplicazione per } \lambda(m) \\ H & \xrightarrow{i} & L^2(M) \end{array}$$

— • — • —