

**A.A. 2018/2019**  
**Istituzioni di Analisi Matematica**  
**Stampato integrale delle lezioni**  
**(Volume 2)**

Massimo Gobbino



# Indice

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Lezione 25.</b> Derivate W-deboli e H-deboli: definizione, prime proprietà, H implica W. Esempio di funzione con le derivate seconde deboli miste ma senza derivate prime deboli. Spazi di Sobolev in piena generalità (ogni ordine e dimensione, aperto qualunque): definizione W e H. Osservazione che H è contenuto in W. . . . . | 6  |
| <b>Lezione 26.</b> Enunciato dei quattro teoremi di approssimazione. Richiami su mollificatori e regolarizzazione per convoluzione. Le convoluzioni commutano con le derivate W-deboli. Dimostrazione del teorema di approssimazione low-cost. Inizio della dimostrazione che le derivate W-deboli sono anche H-deboli. . . . .         | 11 |
| <b>Lezione 27.</b> Fine della dimostrazione che le derivate W-deboli sono anche H-deboli. Partizioni dell'unità associate al ricoprimento di un aperto. Dimostrazione del teorema $H=W$ (Meyers-Serrin 1964). . . . .                                                                                                                   | 16 |
| <b>Lezione 28.</b> Derivata debole del prodotto (caso Sobolev per smooth e caso Sobolev per Sobolev), della composizione e del valore assoluto. Discussione di varie strategie dimostrative a seconda del teorema di approssimazione che si vuole utilizzare. . .                                                                       | 22 |
| <b>Lezione 29.</b> Enunciato dei tre casi del teorema di immersione (su tutto lo spazio), sia per derivate prime, sia per derivate di ordine qualunque. Problema dell'estensione, e sue implicazioni in termini di approssimazione e di immersione. Semplici esempi patologici in dimensione uno. . . . .                               | 28 |
| <b>Lezione 30.</b> Disuguaglianza di Gagliardo (caso speciale di Brascamp-Lieb): enunciato e dimostrazione. Esempio di funzione di Sobolev che ricade nel caso critico del teorema di immersione. . . . .                                                                                                                               | 33 |
| <b>Lezione 31.</b> Dimostrazione delle immersioni di Sobolev nel caso di esponente minore o uguale della dimensione. Esempio di funzione che sta esattamente negli spazi coinvolti in tali immersioni. . . . .                                                                                                                          | 39 |
| <b>Lezione 32.</b> Dimostrazione delle immersioni di Sobolev negli spazi di funzioni Holde-<br>riane (Morrey). Annullamento all'infinito delle funzioni di Sobolev con esponente<br>maggiore della dimensione. Argomento di riscaldamento che conduce ad individuare<br>gli esponenti esatti nelle immersioni di Sobolev. . . . .       | 45 |
| <b>Lezione 33.</b> Introduzione ai teoremi di estensione. Estensione per riflessione nei cilindri.<br>Strategie per la costruzione di m-estensioni nei cilindri. . . . .                                                                                                                                                                | 50 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Lezione 34.</b> Aperti con bordo regolare. Isomorfismo tra gli spazi di Sobolev di aperti diffeomorfi. Partizioni dell'unità per aperti con bordo compatto. Dimostrazione dell'esistenza di una 1-estensione per aperti con bordo regolare. . . . .                                                                                                | 56  |
| <b>Lezione 35.</b> Enunciato del teorema di immersione compatta (Rellich-Kondrakov). Caratterizzazione dei sottoinsiemi relativamente compatti in spazi metrici. Criterio di relativa compattezza in spazi $L_p$ (versione $L_p$ di Ascoli-Arzelà). . . . .                                                                                           | 62  |
| <b>Lezione 36.</b> Dimostrazione del teorema di immersione compatta. Enunciato della disuguaglianza di interpolazione in spazi $L_p$ . Controesempio all'immersione compatta nel caso critico. . . . .                                                                                                                                                | 68  |
| <b>Lezione 37.</b> Tracce di funzioni di Sobolev nel caso modello: disuguaglianza fondamentale nel caso smooth, ulteriore regolarità $L_p$ , definizione per approssimazione, proprietà di base (linearità, integrazione per parti). Road map per estendere la definizione ad aperti regolari. . . . .                                                | 73  |
| <b>Lezione 38.</b> Holderianità della traccia, dipendenza continua della traccia sotto ipotesi di limitatezza dei gradienti, controesempio nel caso $p=1$ . . . . .                                                                                                                                                                                   | 78  |
| <b>Lezione 39.</b> Funzioni di Sobolev che si approssimano mediante funzioni $C$ -infinito a supporto compatto: caso di tutto lo spazio e di tutto lo spazio meno un punto. . .                                                                                                                                                                       | 83  |
| <b>Lezione 40.</b> Funzioni di Sobolev che si approssimano mediante funzioni $C$ -infinito a supporto compatto: teoremi di immersione e di compattezza. Caratterizzazione negli aperti regolari mediante traccia nulla o estensione a zero. Disuguaglianza di Poincaré. . . . .                                                                       | 88  |
| <b>Lezione 41.</b> Applicazioni dei teoremi di immersione e compattezza: disuguaglianze alla Poincaré (stima della $q$ -norma di una funzione nulla al bordo in termini della $p$ -norma del gradiente) e alla Wirtinger (stima della $q$ -norma della differenza tra una funzione e la sua media in termini della $p$ -norma del gradiente). . . . . | 93  |
| <b>Lezione 42.</b> Esempio di approccio variazionale ad una equazione ellittica: esistenza via metodo diretto. Road map verso la regolarità delle soluzioni via stime in spazi di Sobolev di ordine alto. . . . .                                                                                                                                     | 98  |
| <b>Lezione 43.</b> Introduzione alle equazioni ellittiche: condizione di ellitticità, equazioni lineari, semi-lineari, quasi-lineari, fully nonlinear. Quadro generale dei risultati di regolarità per equazioni lineari ed applicazioni al caso semi-lineare. Enunciato del teorema di regolarità interna $L_2$ . . . . .                            | 103 |
| <b>Lezione 44.</b> Enunciato del teorema di regolarità $L_2$ fino al bordo. Stime a priori per la regolarità interna, in tutto lo spazio ed in un aperto generico. Stime a priori per la regolarità fino al bordo in un semispazio. . . . .                                                                                                           | 108 |
| <b>Lezione 45.</b> Derivate discrete: definizione e principali proprietà. Caratterizzazione degli spazi di Sobolev in termini di derivate discrete. Giustificazione delle disuguaglianze alla base della regolarità (interna e al bordo) mediante le derivate discrete. . . . .                                                                       | 114 |



**Lezione 46.** Regolarità fino al bordo per soluzioni del problema di Dirichlet in aperti regolari. Accenno alle tracce di funzioni di Sobolev in codimensione maggiore di uno.120

## Ist. Analisi Matematica

—

## LEZIONE 25

Note Title

25/10/2018

SPAZI DI SOBOLEV

Dim. qualunque  
Ordine qualunque  
Aperto qualunque

## Definizioni

## Teo. approssimazione

- " immersione
- " estensione
- " compattezza
- " traccia (versione basic)

## Applicazioni

DEFINIZIONI

Def. (Derivate W-deboli)

 $d \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto,  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  multiindice (Analisi 2).Siano  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  e  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ .Si dice che  $v$  è la derivata W-debole di  $u$  di ordine  $\alpha$  se

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

"  $D^{\alpha} u$

Proprietà basic① UnicitàSiano  $v_1$  e  $v_2$  ... allora ... FLCV② Linearietà

$$D^{\alpha}(au + bv) = a D^{\alpha} u + b D^{\alpha} v$$

[Esercizio]

③ Compatibilità classica Se  $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ , allora...

④ Passaggio al limite

Siano  $\{u_m\}$  e  $\{v_m\}$  in  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Supponiamo che

$$(i) \quad v_m = D^\alpha u_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad u_m \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^1(\Omega') \text{ per ogni } \Omega' \subset\subset \Omega$$

$$(iii) \quad v_m \rightarrow v_\infty$$

] basta  
debole

$$\text{Allora } v_\infty = D^\alpha u_\infty$$

Dim

$$\int_{\Omega} u_m(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_m(x) \varphi(x) dx$$

$$\int_{\Omega} u_\infty(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\infty(x) \varphi(x) dx$$

Oss. 1 - Mi è bastato che  $u_m \rightarrow u_\infty$  e  $v_m \rightarrow v_\infty$  in  $L^1(\Omega')$  con  $\Omega'$  che contiene il supporto di  $\varphi$

2 - In realtà ho usato solo

$$\begin{array}{ccc} u_m \rightarrow u_\infty & \text{debole in } L^1(\Omega') \text{ per ogni } \Omega' \subset\subset \Omega. & \\ v_m \rightarrow v_\infty & \text{--- o --- o ---} & \end{array}$$

Def. (Derivate H-deboli)

$\alpha \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $\alpha$  multi-indice,  $u$  e  $v$  in  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

Diciamo che  $v$  è la derivata H-debole di  $u$  di ordine  $\alpha$  se esiste  $\{u_m\} \subseteq C^\infty(\Omega)$  (volendo anche a supporto cpt.) t.c.

$$(i) \quad u_m \rightarrow u \quad \text{in } L^1(\Omega') \text{ per ogni } \Omega' \subset\subset \Omega$$

$$(ii) \quad D^\alpha u_m \rightarrow v \quad \text{" "}$$

↑ derivate vere

Speranza :  $v$  è derivata  $W$ -debole  $\Leftrightarrow v$  è deriv.  $H$ -debole

Facile  $H$ -debole  $\Rightarrow W$ -debole

Dim. Punto 4+3 precedente

— 0 — 0 —

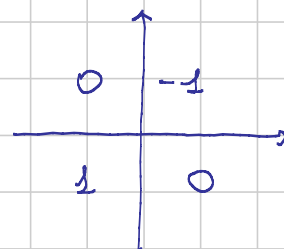
Esercizio Per le derivate deboli il teorema di inversione dell'ordine di derivazione è automatico.

[Si basa tutto su  $C^\infty$  dove è vero]

Esercizio (Prima stranezza)

Può succedere, già in  $\mathbb{R}^2$ , che  $u_{xy}$  esista senza che esistano  $u_x$  e  $u_y$ .

Esempio classico.



• Verifico che  $u_{xy} \equiv 0$

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \cdot \varphi_{xy}(x,y) dx dy \stackrel{?}{=} 0$$

Supponiamo  $\varphi \equiv 0$  fuori da  $[-R, R]^2$

$$\text{LHS} = \int_{-R}^R dx \int_{-R}^R dy u(x,y) \varphi_{xy}(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-R}^0 dx \int_{-R}^0 dy \varphi_{xy}(x,y) - \int_0^R dx \int_0^R dy \varphi_{xy}(x,y)$$

$$= \int_{-R}^0 dx \varphi_x(x,0) + \int_0^R dx \varphi_x(x,0)$$

$$= [\varphi(x,0)]_{-R}^0 + [\varphi(x,0)]_0^R = \varphi(0,0) - \varphi(0,0) = 0 \quad \text{😊}$$

- Verifichiamo che  $u_y$  non esiste (è come la Heaviside nel caso di una variabile)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \varphi_y(x,y) dx \\ &= \int_{-R}^0 dx \int_{-R}^0 dy \varphi_y(x,y) dx - \int_0^R dx \int_0^R dy \varphi_y(x,y) \\ &= \int_{-R}^0 dx \varphi(x,0) + \int_0^R dx \varphi(x,0) = \int_{-R}^R \varphi(x,0) dx = (1) \end{aligned}$$

Questo non si può scrivere come

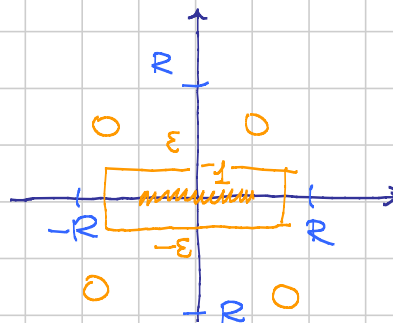
$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) v(x,y) dx dy = (2)$$

Come in una variabile basta usare delle  $\varphi$  come in figura

Usando queste si vede che

(1)  $\geq$  costante positiva

(2)  $\rightarrow 0$  per convergenza dominata.



— 0 — 0 —

Def. (Spazi di Sobolev, definizione W)

$d \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $m \geq 1$  (ordine di derivazione),  $p \in [1, +\infty]$

Si indica con  $W^{m,p}$  l'insieme delle  $u \in L^p(\Omega)$  t.c.

tutte le derivate  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$  con  $|\alpha| \leq m$ .  
 $\uparrow$   
 in senso W

Def. (Spazi di Sobolev, definizione H operativa)

$d, \Omega, m, p$  come sopra.

Diciamo che

$$u \in H^{m,p}(\Omega)$$

se esiste

$$\{u_m\} \subseteq C^\infty(\Omega) \quad (\text{importante che non c'è il supporto compatto})$$

tale che

$$\bullet \quad u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

più forte che la richiesta nella def. H

$$\bullet \quad D^\alpha u_n \text{ ha limite in } L^p(\Omega) \text{ per ogni } |\alpha| \leq m$$

Def. (Spazi di Sobolev, definizione H astratta)

Prendo  $C^\infty(\Omega)$  e considero la quantità

$$\|u\|_{m,p,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p$$

Sia  $C^{m,p}(\Omega)$  l'insieme delle funzioni  $C^\infty(\Omega)$  per cui  $\|u\|_{m,p,\Omega}$  è finito.

Si verifica facilmente che  $C^{m,p}(\Omega)$  è uno sp. vett. e quella è una norma.

Allora  $H^{m,p}(\Omega)$  è il completamento di  $C^{m,p}(\Omega)$  rispetto alla distanza indotta dalla norma.

Fatto facile : La def. operativa e quella astratta coincidono.

$$\underline{\text{Altro facile}} : \quad \underline{H^{m,p}(\Omega)} \subseteq \underline{W^{m,p}(\Omega)}$$

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 26

Note Title

25/10/2018

TEOREMI DI APPROSSIMAZIONE

Teorema 0  $d \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $\alpha$  multi-indice  
 Sia  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  con  $v = D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$   
 (stiamo supponendo che esista)  $\uparrow$  in senso W

Allora esiste  $\{u_n\} \subseteq C^\infty(\Omega)$  (volendo anche a supp. comp.)  
 tale che

- $u_n \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega')$  per ogni  $\Omega' \Subset \Omega$
- $D^\alpha u_n \rightarrow v$  " " "

(se  $u$  e  $v$  sono in  $L^p_{loc}(\Omega)$  con  $p \in [1, +\infty)$  (escluso  $+\infty$ )  
 allora la conv. è in  $L^p(\Omega')$  per ...)

Teorema 1 (Approssimazione low-cost)

$d \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $m \geq 1$ ,  $p \in [1, +\infty)$   $\uparrow$  Sia  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ .

Allora esiste

$$\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \quad (\text{definita ovunque})$$

tale che

- $u_n \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$
- $D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha u$  in  $L^p(\Omega')$  per ogni  $\Omega' \Subset \Omega$ ,  $\forall |\alpha| \leq m$

Teorema 2 ( $H=W$ , by MEYERS-SERRIN 1964)

$d, \Omega, m, p, u$  come sopra.

Allora esiste

$$\{u_n\} \subseteq C^\infty(\Omega)$$

t.c.

- $u_n \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$
- $D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha u$  in  $L^p(\Omega)$   $\forall |\alpha| \leq m$

**Teorema 3** (Approssimazione Deluxe)

Tutto come sopra, ma in più supponiamo  $\Omega$  SUFFICIENTEMENTE REGOLARE.

Allora esiste

$$\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

t.c.

- $u_m \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$
- $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$  in  $L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m$ .

Differ. fra i vari teoremi

- Teo 1:  $\{u_m\}$  molto bella, ma la conv. è brutta
- Teo 2:  $\{u_m\}$  minimalista (per quanto ne sappiamo non si estendono nemmeno a  $\partial\Omega$ ), ma conv. ok
- Teo 3: succ. e conv. ok, ma pago in ipotesi su  $\Omega$ .  
— o — o —

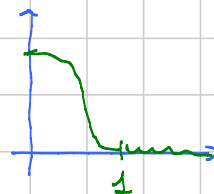
Moltiplicatori e convulsioni

- Def. (moltiplicatore) È una  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  t.c. va bene anche meno

$$(i) \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1$$

$$(ii) \quad \rho(x) = 0 \quad \text{per } |x| \geq 1$$

$$(iii) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = \int_{B(0,1)} \rho(x) dx = 1$$



Def. (Reg. per convulsione) Data  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  si pone

$$u_\varepsilon(x) = [u * \rho_\varepsilon](x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x + \varepsilon y) \rho(y) dy$$

$$\begin{aligned} & \text{con } x + \varepsilon y = z \\ & = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) dz \end{aligned}$$



Oss. Se  $u$  è definita solo su  $\Omega$ , allora  $u_\varepsilon$  è definita a partire da  $u$  estesa a 0 fuori di  $\Omega$ .

Proprietà Setting come sopra

•  $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  e  $D^\alpha u_\varepsilon(x) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{d+|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) D^\alpha \left( \frac{z-x}{\varepsilon} \right) dz$

$\uparrow$   
 $C^{k+1}$  se  $\rho \in C^k$

• Se  $u \in L^p(\Omega)$  con  $p \in [1, +\infty]$ , allora

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

• Se  $u \in L^p(\Omega)$  con  $p \in [1, +\infty)$ , allora

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\quad} u \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

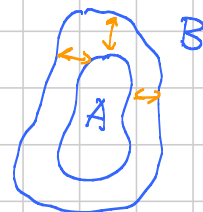
Lemma (La convoluzione commuta con le  $W$ -derivate)

$d \geq 1$ ,  $A \subset\subset B \subseteq \mathbb{R}^d$  aperti,  $u \in L^1(B)$  e  $v = D^\alpha u \in L^1(B)$ .

Poniamo

$$\delta := \min \{ d(a, \partial B) : a \in A \} > 0$$

Allora



$$D^\alpha u_\varepsilon = D^\alpha [u * \rho_\varepsilon](x) = [(D^\alpha u) * \rho_\varepsilon](x)$$

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta)$$

Dim  $u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) dz$

Derivando sotto il segno di integrale

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) D^\alpha \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{|\alpha|}} dz \\ &= \frac{1}{\varepsilon^d} \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} (-1)^{|\alpha|}}_{D^\alpha \varphi} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) \underbrace{D^\alpha \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right)}_{D^\alpha \varphi} dz \end{aligned}$$

$$\varphi(z) := \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^d} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) D^\alpha \varphi(z) dz$$

\* posso mettere B

$$\begin{aligned} (\text{def. } W) \quad &= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha u(z) \rho\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) dz \\ &\quad \text{* posso mettere B.} \\ &= [D^\alpha u * \rho_\varepsilon](x) \end{aligned}$$

Occhio: io posso usare la (def. W) se ho integrali su B  
 Però se  $x \in A$  e  $\varepsilon \in (0, \delta)$  gli integrali sono  
 in  $B(x, \varepsilon) \subseteq B$ .

— o — o —

Dru. Approx. Low-cost Prendo  $u \in L^p(\Omega)$ . La estendo  
 a  $\tilde{u}$  su tutto  $\mathbb{R}^d$   
 Prendo le convulsioni  $u_\varepsilon$ .

• Per le propr. delle convulsioni  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$

• Quando le derivate: fissato  $\Omega' \subset\subset \Omega$  avremo che

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\varepsilon &= D^\alpha u * \rho_\varepsilon \quad \text{in } \Omega' \text{ per } \varepsilon \text{ piccolo} \\ &\quad \downarrow \\ &D^\alpha u \end{aligned}$$

Ora sappiamo che  $D^\alpha u * \varrho_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$  in  $L^p(\Omega)$

e quindi in particolare  $D^\alpha u_\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$  in  $L^p(\Omega')$ .

Dim. teo. 1  $u \in L^1_{loc}(\Omega) \quad v = D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$

Step 1 Fissato  $\Omega' \subset\subset \Omega$ , dico che

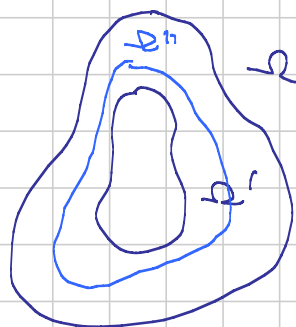
$u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega')$  e  $D^\alpha u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega')$  (\*)

Come ho definito  $u_\varepsilon$ ? Non posso estendere  $u$  da  $\Omega$  a  $\mathbb{R}^d$ .

Come la aggiustiamo?

Prendo

$$\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$$



[costruzione a voce nel video]

Estendo  $u$  da  $\Omega''$  a  $\mathbb{R}^d$  e da esso poi definisco  $u_\varepsilon$ .

Come nella dim. prec. ottengo (\*)

Non abbiamo finito, perché la  $u_\varepsilon$  costruita dipende da  $\Omega'$  e noi ne vorremmo una che va sempre bene.

— o — o —

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 27

Note Title

26/10/2018

Step 2 Voglio  $\{u_n\} \in C^\infty(\Omega)$  t.c.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow u \\ D^\alpha u_n \rightarrow v = D^\alpha u \end{array} \right\} \text{ in } L^1(\Omega') \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega$$

Lo so fare fissato  $\Omega'$ .

Considero

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : |x| < k \text{ e } \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$$

Si nota che  $\Omega_k \subset\subset \Omega_{k+1} \subset\subset \Omega$

Fissato  $k$ , trovo una succ.  $u_n^{(k)}$  che va bene su  $\Omega_k$ .

In particolare esiste  $n_k$  tale che

$$\left. \begin{array}{l} \|u_{n_k}^{(k)} - u\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k} \\ \|D^\alpha u_{n_k}^{(k)} - v\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k} \end{array} \right\} \text{ basta che } \rightarrow 0$$

Dico che la successione  $k \rightarrow u_{n_k}^{(k)}$  verifica la tesi per ogni  $\Omega' \subset\subset \Omega$ .

È facile vedere che  $\Omega' \subset\subset \Omega_k$  definitivamente in  $k$ .  
Ma allora definitivamente

$$\|u_{n_k}^{(k)} - u\|_{L^1(\Omega')} \leq \|u_{n_k}^{(k)} - u\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k}$$

e idem per le derivate.

— o — o —

Lemma ( $W\text{-Sobolev} \times C_c^\infty = W\text{-Sobolev}$ )

Siano  $d \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $p \in [1, +\infty]$ ,  $m \geq 1$ ,  $u \in W^{m,p}(\Omega)$   
 $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

Allora

$$u\psi \in W^{m,p}(\Omega)$$

e volendo c'è la formula "solita" per le sue derivate

Proposizione (Partizione dell'unità - Caso 1)

$d \geq 1$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto,  $\{A_k\}$  succ. di aperti t.c.

(i)  $A_k \subset\subset A$

(ii)  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A$

(iii) il ricopr. è loc. finito, cioè ogni compatto  $K \subseteq A$  interseca solo un # finito di  $A_k$ .

Allora esiste una part. dell'unità relativa ad  $A_k$ , cioè una famiglia  $\{\psi_k\}$  di funzioni t.c.

- $0 \leq \psi_k(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall k \in \mathbb{N}$

- $\psi_k \in C_c^\infty(A_k)$  e zero fuori

- $\sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k(x) = 1 \quad \forall x \in A.$

— o — o —

Dim. MEYERS-SERRIN Sia dato  $\Omega$ .

Per  $k \geq 1$  definisco

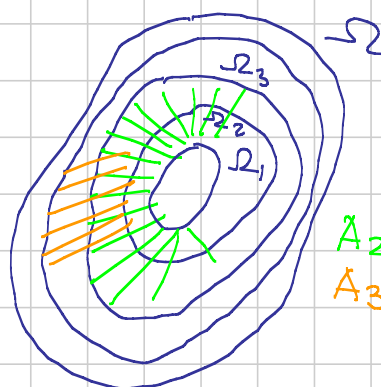
$$\Omega_k := \{x \in \Omega : |x| < k \text{ e } \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$$

Stesse oss. di prima. Per solidariet   pongo  $\Omega_0 = \emptyset = \Omega_{-1}$

Poniamo per  $k \geq 1$

$$A_k := \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega_k}$$

$$B_k := \Omega_{k+2} \setminus \overline{\Omega_{k-2}}$$



Si osserva che  $A_k \subset\subset B_k$  e  $\{A_k\}$  sono un ricopr. di  $\Omega$  loc. finito come nella prop.

Sia  $\{\varphi_k\}$  la relativa partizione dell'unit  . Pongo

$$u_k(x) := u(x) \cdot \varphi_k(x)$$

Per le definizioni vale che

- $u_k \in W^{m,p}(\Omega)$
- il supporto di  $u_k$     contenuto dentro  $A_k$
- $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k(x) = u(x) \quad (\forall x \text{ ci sono al max 2 addendi non nulli})$

Essendo le  $u_k$  a supporto compatto io le posso approssimare come voglio su tutto  $\Omega$  usando le convoluzioni.

Per dimostrare il teorema basta, per ogni  $\eta > 0$ , trovare  $v \in C^\infty(\Omega)$  b.c.

$$\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \eta \quad \text{per ogni } |\alpha| \leq m$$

Procediamo in questo modo. Per ogni  $k$  posso approx.  $u_k$  bene quanto voglio per convoluzione. Allora esiste  $v_k$  b.c.

$$\|v_k - u_k\|_{m,p,\Omega} \leq \frac{1}{2^k} \eta$$

Visto che sto usando le convoluzioni per approx  $u_k$ , posso supporre anche

$$\text{supporto}(v_k) \subseteq B_k$$

Pongo infine

$$v(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}} v_k$$

Conclusione

$$\begin{aligned} \|v - u\|_{m,p,\Omega} &= \left\| \sum (v_k - u_k) \right\|_{m,p,\Omega} \\ &\leq \sum \|v_k - u_k\|_{m,p,\Omega} \\ &\leq \sum \frac{\eta}{2^k} = \eta \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Osservo infine che  $v \in C^\infty(\Omega)$  perché in ogni palla cc  $\Omega$  sto sommando solo un numero finito di funzioni  $C^\infty$ .

— 0 — 0 —

Sublemma (Nei ricoprimenti posso risparmiare!)

Siano  $\{A_k\}$  e  $A$  come nella proposizione.

Allora esistono

$$\hat{A}_k \subset A_k$$

che sono ancora un ricoprimento!

Dim Step 1 Sostituisco  $A_1$  con un  $\hat{A}_1 \subset A_1$

↑ corretto dopo video

Considero

$$A_{1,i} := \{x \in A_1 : \text{dist}(x, \partial A_1) > \frac{1}{i}\}$$

Dico che per  $i$  grande va bene!

Se non andasse mai bene, vorrebbe dire che per ogni  $i$  esiste

$$x_i \notin A_{1,i} \cup \bigcup_{k \geq 2} A_k$$

Quindi  $x_i \notin A_k$  con  $k \geq 2$ , ma allora  $x_i \in A_1$ , ma allora a meno di s.succ. non ricominciate

$$x_i \rightarrow x_\infty \in \Omega \quad (\text{perché } A_1 \subset \Omega)$$

Dove sta  $x_\infty$ ?

- Può stare in  $A_{27}$ ? NO! Altrimenti  $x_i \in A_{27}$  per  $i$  grande
- Può stare in  $A_1$ ? NO! perché  $x_i \notin A_{1,i}$ , quindi

$$\text{dist}(x_i, \partial A_1) \leq \frac{1}{i} \quad \leadsto \quad x_\infty \in \partial A_1$$

Step 2 Conclusione per induzione. Prima  $A_1 \leadsto \hat{A}_1$ , poi  $A_2 \leadsto \hat{A}_2$  e così via.

— o — o —



Dim. (Partizione dell'unità)

Data  $\{A_k\}$  costruisco  $\{\hat{A}_k\}$  che rispannia.

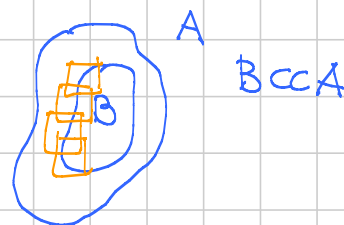
Per ogni  $k$  esiste  $\Theta_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$  t.c.

•  $0 \leq \Theta_k(x) \leq 1$  sempre

•  $\Theta_k(x) = 1$  su  $\hat{A}_k$

•  $\Theta_k(x) = 0$  fuori da  $A_k$  (anzi  $\Theta_k \in C_c^\infty(A_k)$ )

[Modo "colto": prendo  $\Theta_k = (\chi_{\hat{A}_k} * \varphi_\varepsilon)$



con  $\varepsilon$  abbastanza piccolo.

Alternativa: per ogni punto in  $B$  trovo un rettangolino dove ho una funzione che va bene, poi la sommo e infine trovo ]

Pongo  $S(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \Theta_k(x)$

e osservo che è  $C^\infty$  (la somma è loc. finita) e strett. positiva su tutto  $A$ .

Definisco

$$\psi_k(x) := \frac{\Theta_k(x)}{S(x)} \quad \forall x \quad \forall k$$

e ho finito.

— o — o —

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 28

Titolo nota

26/10/2018

## TEOREMI PRODOTTO E COMPOSIZIONE

$$\boxed{\text{Sobolev} \cdot C_c^\infty = \text{Sobolev}} \quad \begin{aligned} u &\in W^{m,p}(\Omega), \quad \psi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \Rightarrow u\psi &\in W^{m,p}(\Omega) \\ &\in W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

Dim perosa Inclusionione su m.

$$\boxed{m=1} \quad \text{Claim: } u\psi \in W^{1,p} \text{ e } D_{x_i}(u\psi) = D_{x_i}u \cdot \psi + u \cdot D_{x_i}\psi$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u\psi D_{x_i}\varphi \, dx &= \int_{\Omega} u \{ D_{x_i}(\psi\varphi) - D_{x_i}\psi \cdot \varphi \} \\ &= \int_{\Omega} u D_{x_i}(\underbrace{\psi\varphi}_{\in C_c^\infty}) - \int_{\Omega} u D_{x_i}\psi \varphi \\ &= - \int_{\Omega} D_{x_i}u \cdot \psi \varphi - \int_{\Omega} u D_{x_i}\psi \varphi \end{aligned}$$

Raccolgo  $\varphi$  e ho Ca test.

$$\boxed{m \Rightarrow m+1} \quad u \in W^{m+1,p}(\Omega) \quad |\alpha| \leq m+1$$

$$D^\alpha = D_{x_i} D^\beta \quad (\beta = \text{ciò che rimane tirata fuori } D_{x_i})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u\psi) D^\alpha \varphi &= \int_{\Omega} u\psi D_{x_i} D^\beta \varphi \\ &= \int_{\Omega} u \{ D_{x_i}(\psi D^\beta \varphi) - D_{x_i}\psi D^\beta \varphi \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} u D_{x_i} (\psi D^{\beta} \varphi) - \int_{\Omega} u D_{x_i} \psi \cdot D^{\beta} \varphi \\
&= - \int_{\Omega} \underbrace{D_{x_i} u}_{W^{1,p}} \cdot \underbrace{\psi D^{\beta} \varphi}_{C_c^{\infty}} - \int_{\Omega} \underbrace{u}_{W^{1,p}} \underbrace{D_{x_i} \psi \cdot D^{\beta} \varphi}_{C_c^{\infty}} \\
&\quad \parallel \\
&= \int_{\Omega} \text{Mostro} \cdot \varphi - \int_{\Omega} \text{Mostro} \cdot \varphi \\
&\quad \text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}
\end{aligned}$$

Teorema (Prodotto vero) d 21,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto,  $p \in [1, +\infty]$

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega) \quad v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$$

superfluo in dim 1 su un intervallo

Allora  $uv \in W^{1,p}(\Omega)$  e  $D_{x_i}(uv) = D_{x_i}u \cdot v + u \cdot D_{x_i}v$

Dim]

Uso la def.  $W$  :  $\int_{\Omega} uv D_{x_i} \varphi$  e mi PIANTO 😞

Uso Meyers-Serin

$$\begin{array}{lll}
u_n \rightarrow u & v_n \rightarrow v & \text{in } L^p(\Omega) \\
D_{x_i} u_n \rightarrow D_{x_i} u & D_{x_i} v_n \rightarrow D_{x_i} v &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Spero che } u_n v_n \rightarrow uv \\
&D_{x_i} u_n \cdot v_n + u_n D_{x_i} v_n \rightarrow D_{x_i} u \cdot v + u \cdot D_{x_i} v \\
&\quad \parallel \\
&D_{x_i} (u_n v_n)
\end{aligned}$$

Se fossi stato più attento nel dim. Meyers-Semlin, avrei che, se  $u \in L^\infty$ , allora  $du$  sono equi- $L^\infty$  (ho fatto solo convoluzioni)  $\rightarrow$  a voce nel video

$$\begin{aligned} \|u v_m - u v\|_{L^p} &\leq \|u v_m - u v\|_{L^p} + \|u v - u v\|_{L^p} \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &\leq \|u\|_{L^\infty} \|v_m - v\|_{L^p} \leq \|du - u\|_{L^p} \|v\|_{L^\infty} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Stesso discorso per le derivate.

**Achtung!** Se  $p = +\infty$ , allora non abbiamo  $H = W$

Anche per  $p = +\infty$  posso definire  $D_{x_i} u \cdot v + u \cdot D_{x_i} v$  e so che è  $L^\infty$

Prendo  $\Omega' \subset\subset \Omega$ . In questo insieme abbiamo che  $u$  e  $v$  sono in  $W^{1,p}(\Omega')$  con  $p = 2018$ . Quindi in  $\Omega'$  posso approssimare in  $L^{2018}(\Omega')$  e ottengo che

$$D_{x_i} u \cdot v + u \cdot D_{x_i} v$$

è la derivata debole in senso  $W$  del prodotto.

A questo punto ho finito! Se penso alla definizione  $W$ , allora

$$\int_{\Omega} u v D_{x_i} \varphi = - \int_{\Omega} (D_{x_i} u \cdot v + u \cdot D_{x_i} v) \varphi$$

per ogni  $\varphi$ . Per questa basta che  $\varphi$  sia deriv. debole in  $\Omega'$  che contiene il supporto di  $\varphi$ .

— o — o —

Cosa ci sta sotto Potevamo definire

$$H_{\text{low-cost}}^{u,p}$$

chiedendo la convergenza  $D^{\alpha} u_n \rightarrow D^{\alpha} u$  solo in  $L^p(\Omega')$  per ogni  $\Omega' \subset \subset \Omega$ .

$$H^{u,p}(\Omega) \subseteq H_{L^p}^{u,p}(\Omega) \subseteq W^{u,p}(\Omega)$$

$\uparrow$  ovvio                       $\uparrow$  solito pass. al limite  
 $\uparrow$   
 TEO. 1 (Low-cost)

Una volta ottenuta l'uguaglianza  $H_{L^p} = W$  possiamo fare i tes. algebrici

$$\begin{aligned}
 u_n &\rightarrow u & \text{solo in } L^p(\Omega') \text{ con } \Omega' \subset \subset \Omega \\
 D_{x_i} u_n &\rightarrow D_{x_i} u \\
 &\text{e stessa cosa per } v
 \end{aligned}$$

Questo basta per dedurre che

$$\begin{aligned}
 u_n v_n &\rightarrow u v & \text{nello stesso senso} \\
 D_{x_i} (u_n v_n) &\rightarrow D_{x_i} u \cdot v + u \cdot D_{x_i} v
 \end{aligned}$$

Con questo sistema posso fare il lemma W-Sobolev.  $C^{\infty} =$  W-Sobolev con più facilità (uso tes. approx low cost)

— o — o —

Teo. composizione (fuori)  $d \geq 1, m=1, p \in [1, \infty], \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.

$u \in W^{1,p}(\Omega)$

(1)  $g \in C^1$

(2)  $g(0)=0$  (inutile se  $\text{meas}(\Omega) < +\infty$ )

(3)  $|g'(s)| \leq M \quad \forall s \in \mathbb{R}$

Allora  $g(u) \in W^{1,p}(\Omega)$  e  $D_{x_i}[g(u)] = g'(u) D_{x_i} u$

Dim. Prendo  $u_n \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$   
 $D_{x_i} u_n \rightarrow D_{x_i} u$  (ma basta anche low-cost)

Spero che  $g(u_n) \rightarrow g(u)$

$D_{x_i}(g(u_n)) \rightarrow g'(u) D_{x_i} u$

"

$g'(u_n) D_{x_i} u_n$

in  $L^p(\Omega)$   
oppure  
low-cost

Perché  $g(u) \in L^p$ ? Da (2) e (3) segue  $|g(s)| \leq M|s|$   
e quindi

$$|g(u(x))| \leq M |u(x)|$$

elevo alla  $p$  e integro...

A meno di sottosucc. posso supporre che  $u_n(x) \rightarrow u(x)$   
per q.o.  $x \in \Omega$  ed in maniera dominata e quindi

$g(u_n(x)) \rightarrow g(u(x))$  per q.o.  $x \in \Omega$

ed in modo dominato, da cui la convergenza in  $L^p$ .  
Idem per le derivate.

Per  $p = \infty$  ci si aggiusta con  $p = 2018$ .

— o — o —

Teorema (valore assoluto)

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow |u| \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e}$$

$$D_{x_i} |u| = \operatorname{sign}(u) \cdot D_{x_i} u$$

Dim Prendo  $g_n(s) = \sqrt{s^2 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$

Allora  $g_n(u) \in W^{1,p}$  e  $D_{x_i} g_n(u) = g_n'(u) \cdot D_{x_i} u$

Spero che mandando  $n \rightarrow \infty$  ottengo la tesi.

(sto usando la composizione, non quelli di approx)  
 — o — o —

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 29

Note Title

29/10/2018

## TEOREMA DI IMMERSIONE

QUELLO CHE SEGUE VALE SOLO IN  $\mathbb{R}^d$ , cioè  $\Omega = \mathbb{R}^d$ Sia  $d \geq 1$ , sia  $p \in [1, +\infty]$  (esterni concessi) e sia  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$   $\uparrow \uparrow$ **Caso 1** Se  $p < d$ , allora  $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$  dove  $p^*$  risolve

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{d}$$

$$\text{cioè } p^* = \frac{dp}{d-p}$$

positivo

e vale

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

**Caso 2** Se  $p = d$ , allora  $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$  per ogni  $q \in [p, +\infty)$   
(ma non necessariamente  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ )  
e vale

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C(d, p, q) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

**Caso 3** Se  $p > d$ , allora  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  e vale

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(p, d) \left\{ \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right\}$$

Inoltre  $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$  (nel solito senso: esiste una funzione  $C^{0,\alpha}$  che coincide con  $u$  q.o.) con  $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$   
e vale

$$|u(y) - u(x)| \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |y - x|^\alpha \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$$



### Immersioni per ordine superiore

$d \geq 1$ ,  $p \in [1, +\infty]$ ,  $m \geq 1$ ,  $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

**Caso 1** Se  $mp < d$ , allora  $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$  con

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{m}{d} \quad \left( \text{cioè } q = \frac{dp}{d - mp} \right)$$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d, p, m) \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

**Caso 2** Se  $mp = d$ , allora  $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$  per ogni  $q \in [p, +\infty)$  e vale

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d, p, q, m) \sum_{|\alpha| = m} \dots$$

**Caso 3** Se  $mp > d$ , allora  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  e vale

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(d, p, m) \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Inoltre, detto  $R$  il più piccolo intero t.c.  $Rp > d$ , allora

$u \in C^{m-R, \alpha}(\mathbb{R}^d)$  con  $\alpha = 1 - \frac{d}{Rp}$

e vale

$$|D^\beta u(y) - D^\beta u(x)| \leq c(p, d, m) \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |y - x|^\alpha$$

per ogni  $(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$  e per ogni  $|\beta| \leq m - R$ .

Dim. teo. ordine superiore: inclusione a partire da quello di ordine

— o — o —

Quando vale qualcosa del genere in un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ?

Quando  $\Omega$  è abbastanza regolare !!

### PROBLEMA DELL'ESTENSIONE

Def.  $d \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto,  $m \geq 1$ ,  $p \in [1, \infty]$

- Si dice  $(m, p)$ -estensione una funzione lineare

$$E_{m,p} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$$

tale che

(i)  $E_{m,p} u(x) = u(x)$  per q.o.  $x \in \Omega$

(ii) esiste  $C(m, p)$  t.c.

$$\|u\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq C(m, p) \|u\|_{m,p,\Omega}$$

- Si dice  $m$ -estensione forte una funzione lineare

$$E_m : L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$$

tale che

la sua restrizione a  $W^{m,p}(\Omega)$  è una  $(m, p)$ -estensione

- Si dice estensione universale una funzione lineare

$$E : L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$$

che va bene per ogni  $(m, p)$ .

**Fatto 1** Se esiste una  $(u,p)$ -estensione, allora vale il teorema di approssimazione deluxe per  $W^{u,p}(\Omega)$ .

Dim. Prendo  $u \in W^{u,p}(\Omega)$ , la estendo ad una  $\hat{u} = E_{u,p} u \in W^{u,p}(\mathbb{R}^d)$

→ approx  $\hat{u}$  con funzioni  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

→ queste a maggior ragione approssimano su  $\Omega$ .

Oss. Si può dimostrare l'approx deluxe senza passare per la  $(u,p)$  estensione, e con ipotesi molto più deboli

**Fatto 2** Se esiste una  $(1,p)$  estensione per  $\Omega$ , allora l'immersione di Sobolev con i 3 casi a partire da  $W^{1,p}(\Omega)$  vale.  
L'unica variante è che a dx delle disuguaglianze servono norme complete

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(d,p,\Omega) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

**Dim.** Data  $u \in W^{1,p}(\Omega)$

→ considero  $\hat{u} := E_{1,p} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

→ per il teorema su  $\mathbb{R}^d$  ho che  $\hat{u} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$

→ restringo ad  $\Omega$

immersione in  $\mathbb{R}^d$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|\hat{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla \hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$$\text{teo. estensione} \rightarrow \leq \|u\|_{1,p,\Omega}$$

**Fatto 3** Le immersioni iterate valgono in  $\Omega$  se  $\Omega$  ammette una  $(1,p)$  estensione (NON serve  $(u,p)$ )

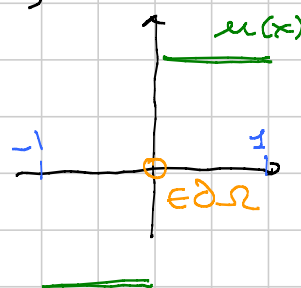
Facendosi per induzione, basta dimostrare il risultato quando si scende di uno sull'ordine.

Esempio 1  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$   $\Omega = (-1,0) \cup (0,1)$

Qui non funziona nulla

La  $u(x)$  in figura sta in tutti i  $W^{m,p}(\Omega)$ . Tuttavia

- non si approssima Deluxe
- non è Hölderiana (in questo  $\Omega$  non vale l'immersione)
- non si estende ad  $\mathbb{R}^d$ .



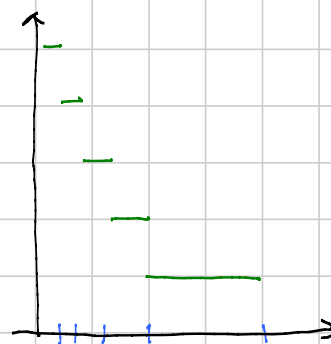
Esempio 2  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  limitato,  $u \in W^{1,p}(\Omega)$   
 $\Rightarrow u$  limitata?  
 (su un intervallo è vero !!)

Se  $u$  è come in figura e sta sotto  $|\log x|$ , allora

$u \in W^{m,p}(\Omega)$  per ogni  $(m,p)$

ma non è limitata!!!

— o — o —



## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 30

Note Title

29/10/2018

GAGLIARDO - BRASCAMP - LIEBLemma (Gagliardo 1959)

Sia  $d \geq 2$  un intero. Per ogni  $i \in \{1, \dots, d\}$  sia

$$\varphi_i : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow [0, +\infty) \text{ con } \varphi_i \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1}) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$$

$P_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$  la proiezione che dimentica la coord.  $i$ -esima

Consideriamo la funzione  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$  definita da

$$\varphi(x) := \prod_{i=1}^d \varphi_i(P_i x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Allora  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e vale

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|\varphi_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}$$

Dim. Induzione su  $d$ .

$d=2$  Quasi banale

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(y) \cdot \varphi_2(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(x) dx \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(y) dy$$

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|\varphi_2\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|\varphi_1\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Per capire come funziona, vediamo il passaggio da  $d=3$  a  $d=4$ .

$$\varphi(x, y, z, w) = a(y, z, w) b(x, z, w) c(x, y, w) d(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x, y, z, w) dx dy dz dw &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d(x, y, z) dx dy dz \underbrace{\int_{\mathbb{R}} a(y, z, w) b(x, z, w) c(x, y, w) dw}_{\Phi(x, y, z)} \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{d(x, y, z)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\Phi(x, y, z)}_{\frac{2}{3}} dx dy dz$$

$$\leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^3} d(x, y, z)^3 dx dy dz \right\}^{1/3}}_{\|d\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}} \cdot \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y, z)^{3/2} dx dy dz \right\}^{2/3}}_{\text{resto}}$$

Quindi ci basta dim. che  $\text{resto} \leq \|a\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \cdot \|b\| \dots \cdot \|c\| \dots$   
Ora

$$\Phi(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{a(y, z, w)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{b(x, z, w)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{c(x, y, w)}_{\frac{1}{3}} dw$$

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z, w)^3 dw \right\}^{1/3} \left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x, z, w)^3 dw \right\}^{1/3} \left\{ \int_{\mathbb{R}} c \dots \right\}^{1/3}$$

$$\Phi(x, y, z)^{3/2} \leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z, w)^3 dw \right\}^{1/2}}_{A(y, z)} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x, z, w)^3 dw \right\}^{1/2}}_{B(x, z)} \underbrace{\left\{ \dots \right\}^{1/2}}_{C(x, y)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y, z)^{3/2} dx dy dz \leq \int_{\mathbb{R}^3} A(y, z) B(x, z) C(x, y) dx dy dz$$

Hp  
involuttiva

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} A(y, z)^2 dy dz \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} B(x, z)^2 dx dz \right\}^{1/2} \dots \left\{ \dots \right\}^{1/2}$$

Ora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} A(y, z)^2 dy dz &= \int_{\mathbb{R}^2} dy dz \int_{\mathbb{R}} a(y, z, w)^3 dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} a(y, z, w)^3 dy dz dw \\ &= \|a\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^3 \end{aligned}$$

Questi integrali si elevano alla  $\frac{1}{2}$  !

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y, z)^{3/2} dx dy dz \leq \|a\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}^{3/2} \|b\|^{3/2} \dots \|c\|^{3/2}$$

Ora non resta che elevare alla  $\frac{2}{3}$ .

Consiglio: provare a fare il passaggio da  $d=2$  a  $d=3$

Passo vero da  $d$  a  $d+1$

Notazione:  $\hat{x}_i = x$  senza componente  $i$

$\hat{x}_{i,d+1} = x$  senza componenti  $i$  e  $d+1$

$$\varphi(x) = \varphi_1(\hat{x}_1) \cdots \varphi_d(\hat{x}_d) \cdot \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1})$$

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1}) d\hat{x}_{d+1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\hat{x}_1) \cdots \varphi_d(\hat{x}_d) dx_{d+1}}_{\Phi(\hat{x}_{d+1})}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1})}_{\frac{1}{d}} \cdot \underbrace{\Phi(\hat{x}_{d+1})}_{\frac{d-1}{d}} \cdot d\hat{x}_{d+1}$$

$$\leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1})^d d\hat{x}_{d+1} \right\}^{1/d}}_{\|\varphi_{d+1}\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\dots)^{\frac{d}{d-1}} \right\}^{\frac{d-1}{d}}}_{\text{resto}}$$

e spero che  $\text{resto} \leq \|\varphi_1\|_{L^d(\mathbb{R}^d)} \cdots \|\varphi_d\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}$

$$\Phi(\hat{x}_{d+1}) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\varphi_1(\hat{x}_1)}_{\frac{1}{d}} \cdots \underbrace{\varphi_d(\hat{x}_d)}_{\frac{1}{d}} d x_{d+1}$$

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\hat{x}_1)^d d x_{d+1} \right\}^{\frac{1}{d}} \cdots \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_d(\hat{x}_d)^d d x_{d+1} \right\}^{1/d}$$

$$\Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}} \leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\hat{x}_1)^d d x_{d+1} \right\}^{\frac{1}{d-1}}}_{\Phi_1(\hat{x}_{1,d+1})} \cdots \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_d(\hat{x}_d)^d d x_{d+1} \right\}^{\frac{1}{d-1}}}_{\Phi_d(\hat{x}_{d,d+1}) \cdots}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_1(\hat{x}_{1,d+1}) \cdots \Phi_d(\hat{x}_{d,d+1}) d\hat{x}_{d+1}$$

$$\text{ipotesi} \quad \text{induttiva} \quad \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Phi_1(\hat{x}_{1,d+1})^{\frac{d-1}{d-1}} d\hat{x}_{1,d+1} \right\}^{\frac{1}{d-1}} \cdots$$



Chi sono i termini del prodotto al RHS?

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Phi_1(\hat{x}_{1,d+1})^{d-1} d\hat{x}_{1,d+1} &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\hat{x}_{1,d+1} \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\hat{x}_1)^d dx_{d+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1(\hat{x}_1)^d d\hat{x}_1 \end{aligned}$$

Fortunatamente gli esponenti si sistemano quando alla fine elevo alla  $\frac{d-1}{d}$ .

— o — o —

Esempio  $H^1$  in dimensione 2  $W^{1,2}$

Notazione: dopo aver dimostrato  $H = W$ , per i Sobolev si usa sempre la notazione  $W^{m,p}$ .  
 $W^{m,2}$  si abbrevia di solito con  $H^m$

$H^1(\Omega)$  con  $\Omega = \text{cerchio oppure } \Omega = \mathbb{R}^2$

Esempio di funzione  $u \in H^1(\Omega)$  ma non  $L^\infty(\Omega)$

Funzioni radiali  $u(x) = \psi(|x|)$

Analisi 2:  $\nabla u(x) = \psi'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|}$

Primo tentativo  $\psi(r) = \frac{1}{r^a}$

In quali  $L^p$  sta? In quali  $W^{1,p}$  sta?

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{ap}} \cdot r dr \in L^p$$

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{(a+1)p}} r dr \in W^{1,p}$$

$$\in L^p \Leftrightarrow ap-1 < 1 \quad p < \frac{2}{a}$$

$$\in W^{1,p} \Leftrightarrow (a+1)p-1 < 1 \quad p < \frac{2}{a+1}$$

Se voglio stare in  $W^{1,2}$  devo prendere "a=0" e ancora non va bene

Si vede che  $|\log r| \notin W^{1,2}(\text{disco})$  per pochissimo

$$|\log |\log r|| \in W^{1,2}(\text{disco}) \quad \text{😊}$$

Stesso esempio funziona in dim. d con  $W^{1,d}$

— o — o —

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 31

Note Title

05/11/2018

Immersioni di Sobolev  $d \geq 1$ ,  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ,  $p < d$   
 per  $d=1$  è  $\emptyset$

Teri:  $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$  con  $p^* = \frac{dp}{d-p}$   $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{d}\right)$

Disug. Gagliardo  $\varphi(x) := \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i)$  tutto  $C_c^\infty$ , allora

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|\varphi_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}$$

Dim. imm. Sobolev

Step 1  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $p=1$ ,  $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$  ovviamente

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) dt$$

↑  
 finito, basta  
 estremo + piccolo del supporto

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{-\infty}^x \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\dots) \right| dt \\ &\leq \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\dots) \right| dt}_{\varphi_i(\hat{x}_i)} \quad \forall i=1, \dots, d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |u(x)|^d \leq \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i)$$

$$\Rightarrow |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i)^{\frac{1}{d-1}}$$

$\varphi_i(\hat{x}_i)$

[Aggiunto dopo video:  
 per via dei valori  
 assoluti questa sta solo  
 in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ , quindi serve  
 Gagliardo con regolarità  
 $C_c^\infty$ , che si ottiene facile]

Dalla disug. di Gagliardo deduciamo che

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi_i(\hat{x}_i)^{d-1} d\hat{x}_i \right\}^{\frac{1}{d-1}} \\
 &= \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_i(\hat{x}_i) d\hat{x}_i \right\}^{\frac{1}{d-1}} \\
 &= \prod_{i=1}^d \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\hat{x}_i \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\dots, x_i, \dots) \right| dx_i \right\}^{\frac{1}{d-1}} \\
 &\quad \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx}_{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)| dx} \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)| dx
 \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)| dx \right\}^{\frac{d}{d-1}}$$

Portando l'esponente a sx otteniamo

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

Step 2  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $p$  generico

$$\begin{aligned}
 \text{Per ogni } r \geq 0 \text{ pongo } v(x) &:= |u(x)|^r u(x) \\
 &= \varphi(u(x)) \quad \text{con } \varphi(\sigma) = |\sigma|^2 \sigma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Osservo che } \nabla v(x) &= \varphi'(u(x)) \nabla u(x) = (r+1) |u(x)|^r \nabla u(x) \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \varphi'(\sigma) = (r+1) |\sigma|^r
 \end{aligned}$$

Applico il caso 1 alla funzione  $v(x)$ :

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \right\}^{\frac{d-1}{d}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}(n+1)} dx \right\}^{\frac{d-1}{d}} \\ &= \|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}(n+1)}}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(x)| dx = (n+1) \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|u(x)|^{\frac{n}{p}}}_{\frac{1}{p}} \underbrace{|\nabla u(x)|}_{\frac{1}{p}} dx \\ &\leq (n+1) \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{p \cdot \frac{n}{p}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= (n+1) \|u\|_{L^{pn}}^n \cdot \|\nabla u\|_{L^p} \end{aligned}$$

Metto insieme LHS  $\leq$  RHS:

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}(n+1)}}^{n+1} \leq (n+1) \|u\|_{L^{pn}}^n \cdot \|\nabla u\|_{L^p}$$

Vorrei che le 2 norme di  $u$  fossero la stessa, quindi

$$\frac{d}{d-1}(n+1) = p \cdot \frac{n}{p} = \frac{p}{p-1} n \Leftrightarrow n \left( \frac{p}{p-1} - \frac{d}{d-1} \right) = \frac{d}{d-1}$$

$$\Leftrightarrow n \frac{\cancel{pd} - p - \cancel{d} + d}{(p-1)(\cancel{d-1})} = \frac{\cancel{d}}{\cancel{d-1}} \Leftrightarrow n = \frac{d(p-1)}{d-p}$$

Quindi  $n+1 = \frac{dp - \cancel{d} + \cancel{d} - p}{d-p} = \frac{p(d-1)}{d-p}$  e infine

$$\frac{d}{d-1}(n+1) = \frac{d}{\cancel{d-1}} \frac{p(\cancel{d-1})}{d-p} = \frac{dp}{d-p} = p^* = p \cdot \frac{1}{p}$$

Semplificando abbiamo

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq \underbrace{(n+1)}_{\substack{\uparrow \text{costante che dipende da } d \text{ e da } p}} \|\nabla u\|_{L^p}$$

Step 3  $p$  generico,  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ .

Per approx. esiste  $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  t.c.

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d) \quad \nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x) \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

Per il caso precedente

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \cdot C(d,p)$$

$\{|\nabla u_n(x)|\}$  è di Cauchy in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ , quindi per linearità e per la disug

$\{u_n(x)\}$  è di Cauchy in  $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ , quindi ha un limite in  $L^{p^*}$ , che verifica la disug.

Vorrei che il limite fosse proprio  $u$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^p \\ u_n \rightarrow v \quad \text{in } L^{p^*} \end{array} \right\} \xrightarrow{?} u = v$$

↑  
Sì, perché a meno di s.succ. la convergenza è pure puntuale q.o.

— 0 — 0 —

Caso  $p \geq d$  Tesi:  $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$  per ogni  $q \in [p, +\infty)$  escluso

Ipotesi:  $u \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$

Dim: allo step 2 precedente abbiamo ottenuto:

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(n+1)}^{n+1} \leq (n+1) \|u\|_{L^{p,n}}^n \cdot \|\nabla u\|_{L^p}$$

Nel caso speciale  $p = d$  diventa

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(n+1)} \leq (n+1) \|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}n} \cdot \|\nabla u\|_{L^d}$$

Idea brutale: esponente a sx è meglio di quello a dx, quindi se ho stima in uno spazio, ho stima in uno spazio migliore (di quanto migliore?  $\frac{d}{d-1}$ )

Formalmente dimostriamo che  $u \in L^{p + \frac{kd}{d-1}}(\mathbb{R}^d)$

Passo base è l'ipotesi:  $u \in L^p$

Per passare da  $k$  a  $k+1$  si tratta di scegliere il valore giusto di  $n$ .

Supponiamo per hp induttiva

$$u \in L^{p + \frac{kd}{d-1}} =: L^{q_k} \quad \text{con} \quad \|u\|_{L^{q_k}} \leq C(p, d, k) \|\nabla u\|_{L^p}$$

$$\text{Scego } n \text{ t.c. } \frac{d}{d-1}n = p + \frac{kd}{d-1} \quad \leadsto \quad n = \frac{p(d-1)}{d} + k$$

e dalla disug. di sopra ottengo che so stimare la norma di  $u$  nello spazio con esponente

$$\frac{d}{d-1}(n+1) = q_{k+1} \quad (\text{contò facile})$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{q_{k+1}}} &\leq \|u\|_{L^{q_k}}^{\frac{n}{n+1}} \|\nabla u\|_{L^p}^{\frac{1}{n+1}} (n+1) \\ &\leq (n+1) C(p, d, k)^{\frac{n}{n+1}} \underbrace{\|\nabla u\|_{L^p}^{\frac{n}{n+1}} \cdot \|\nabla u\|_{L^p}^{\frac{1}{n+1}}}_{\|\nabla u\|_{L^p}^1} \end{aligned}$$

### Esempio di ottimalità

Voglio, fissato  $p$ , una funzione  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ,  
 ma  $u \notin W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$  per ogni  $q > p$ .

Con un po' di perizia si vede che

$$u(x) = \frac{e^{-|x|} \text{ ~~~~~~ evitiamo seccature a } \pm\infty}{|x|^{\frac{d}{p}-1} |\log x|}$$

Con conti di analisi 1-2 si vede che per  $|x| \sim 0$

$$|\nabla u(x)| \sim \frac{e^{-|x|}}{|x|^{\frac{d}{p}} |\log x|}$$

$$\text{e quindi } |\nabla u(x)|^p \sim \frac{e^{-p|x|}}{|x|^d |\log x|^p}$$

e questo converge a mala pena con il p.b.m. in  $x=0$ .

Ci chiediamo: per quali  $q$  vale che  $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ ?

Facendo il conto si vede che è per  $q \leq p^*$ .



## Isb. Analisi Matematica

## LEZIONE 32

Titolo nota

05/11/2018

Immersione di Sobolev per  $p > d$ Ipotesi :  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  con  $d > p$ Teri :  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  e  $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$  con  $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ 

$$\uparrow$$

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C(p,d) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}^d}$$

$$\uparrow$$

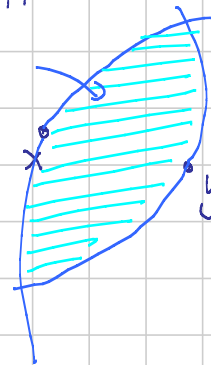
$$\text{cost. hold} \leq C(p,p) \|\nabla u\|_{L^p}$$

Dim Mostriamo la  $\alpha$ -Hölderianità supponendo  
 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Dati  $x$  e  $y$  in  $\mathbb{R}^d$ ,  
 lungo

$$\delta := |y - x|$$

$S =$   
 "zona di scambio"



$$\text{e } S := B(x, \delta) \cap B(y, \delta)$$

Per ogni  $z \in S$  vale

$$|u(y) - u(x)| \leq |u(y) - u(z)| + |u(z) - u(x)|$$

Integro in  $S$  ottengo

$$\underbrace{\text{meas}(S)}_{C(d) \cdot \delta^d} \cdot |u(y) - u(x)| \leq \int_S |u(y) - u(z)| dz + \int_S |u(z) - u(x)| dz$$

Siamo il 2° integrale al RHS (l'altro è uguale)

$$u(z) - u(x) = \psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt$$

$$\begin{aligned} \uparrow \\ \psi(t) := u(x + t(z-x)) &= \int_0^1 \langle \nabla u(x + t(z-x)), z-x \rangle dt \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} |u(z) - u(x)| &\leq \int_0^1 |\langle \nabla u(x + t(z-x)), z-x \rangle| dt \\ &\leq |z-x| \int_0^1 |\nabla u(x + t(z-x))| dt \\ &\leq \delta \int_0^1 |\nabla u(x + t(z-x))| dt \end{aligned}$$

Ora integro in  $dz$ :

$$\begin{aligned} \int_S |u(z) - u(x)| dz &\leq \delta \int_S dz \int_0^1 |\nabla u(x + t(z-x))| dt \\ &= \delta \int_0^1 dt \int_S |\nabla u(x + t(z-x))| dz \\ &\leq \delta \int_0^1 dt \int_{B(x, \delta)} \underbrace{1 \cdot |\nabla u(x + t(z-x))|}_{w} dz \end{aligned}$$

Pongo  $w := x + t(z-x)$ , da cui  $z = \frac{w-x}{t} + x$

Quando  $z \in B(x, \delta)$ , dove varia  $w$ ? Varia in  $B(x, t\delta)$

Quindi

$$\int_S |u(z) - u(x)| dz \leq \delta \int_0^1 dt \frac{1}{t^{\frac{1}{p'}}} \int_{B(x, t\delta)} \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} 1 \cdot |\nabla u(w)| dw$$

$\uparrow$   
 dal cambio di variabili

Usando Hölder troviamo

$$\int_S |u(z) - u(x)| dz \leq \delta \int_0^1 dt \frac{1}{t^{\frac{d}{p'}}} \left\{ \text{meas}(B(x, t\delta)) \right\}^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^p} \left\{ \int_{B(x, t\delta)} |\nabla u(w)|^p dw \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} C(p, d) \delta \cdot \underbrace{\delta^{\frac{d}{p'}} \int_0^1 dt \frac{1}{t^{\frac{d}{p'}}} t^{d(1-\frac{1}{p'})}}_{\int_0^1 dt \frac{1}{t^{\frac{d}{p'}}}}$$

converge! Nuova costante che dipende da  $p$  e da  $d$

Abbiamo ottenuto che

$$\int_S |u(z) - u(x)| dz \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \delta^{1+\frac{d}{p'}}$$

Tornando all'inizio abbiamo

$$C(d) \cdot \delta^d |u(y) - u(x)| \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \delta^{1+\frac{d}{p'}}$$

Resta da fare il conto dei  $\delta$

$$\text{LHS} \rightsquigarrow \delta^d \quad \text{RHS} \rightsquigarrow 1 + \frac{d}{p'} = 1 + d \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1 + d - \frac{d}{p}$$

Abbiamo ottenuto

$$|u(y) - u(x)| \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \cdot |y - x|^{1-\frac{d}{p}}$$

$\delta = |y - x|$

che è la tesi in questo caso.

Stima  $L^\infty$  Dato  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , sappiamo che

$$\int_{B(x_0, 2018)} |u(x)|^p dx \leq \|u\|_{L^p}^p$$

Per la media integrale sappiamo stimare unif. su almeno un p.to della palla.

Grazie alla stima sulla costante di Hölder abbiamo stima su  $u(x)$  su tutta la palla, quindi anche in  $x_0$ .

Oss. Per come è stata ottenuta la stima su  $|u(x)|$  dipende da  $\|u\|_{L^p}$  e  $\|\nabla u\|_{L^p}$

Caso generale  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  e non solo  $C_c^\infty$

Le approx della def. H ora convergono pure unif. sui cpt., quindi tutto passa al limite.

Oss. Se  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ , in generale è falso che

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$$

(fare facili controesempi con conetti)



Questo NON è possibile per  $p > d$ .

[Fatto generale: se  $\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^p dx$  converge e

$u(x)$  è UNIF. CONTINUA allora  $u(x) \rightarrow 0$  per  $|x| \rightarrow \infty$ ]

— 0 — 0 —

Oss. Un argomento di riscalamento mostra che le immersioni di Sobolev sono possibili SOLO per gli esponenti "giusti"

Supponiamo di sapere che

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq M \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$$

Allora per forza  $q = p^*$

Dmn. Se la disug. vale per  $u(x)$ , allora vale anche per  $u(\lambda x)$ . Come riscalo LHS e RHS in funzione di  $\lambda$ ?

$$\text{LHS} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} u(\lambda x)^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} u(y)^q \frac{1}{\lambda^d} dy \right\}^{\frac{1}{q}} \quad \substack{\uparrow \\ y = \lambda x}$$

$$\sim \frac{1}{\lambda^{d/q}} \cdot \text{no} \text{a}$$

$$\text{RHS} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^p |\nabla u(\lambda x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^p |\nabla u(y)|^p \frac{1}{\lambda^d} dy \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\sim \lambda^{1 - \frac{d}{p}}$$

Quindi deve succedere che  $\frac{1}{\lambda^{\frac{d}{q}}} \leq \lambda^{1 - \frac{d}{p}}$

cioè  $\lambda^{1 - \frac{d}{p} + \frac{d}{q}} \geq 1$  per ogni  $\lambda > 0$

Questo è possibile solo se  $1 - \frac{d}{p} + \frac{d}{q} = 0$ , cioè

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{d}$$

Allo stesso modo si vede che l'Hölderianità si ha solo per

$$d = 1 - \frac{d}{p}$$

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 33

Note Title

08/11/2018

TEOREMI DI ESTENSIONE  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ 

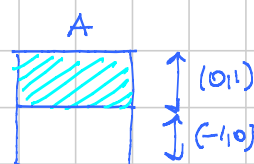
Perché? Perché è il modo più comodo per avere:

→ approssimazione deluxe  $\rightsquigarrow$  valori su  $\partial\Omega$  di funzioni di Sobolev

→ teo. di immersione  $\rightsquigarrow$  teo. di compattezza  
— o — o —

CASO MODELLO :  $\Omega$  è un cilindro

$$A \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \quad \Omega = A \times (0,1) =: C_A^+ \subseteq \mathbb{R}^d$$



Obiettivo: estendere una funzione definita su  $C_A^+$  a

$$C_A := A \times (-1,1)$$

Consideriamo due operatori, cioè l'estensione "per parità" e "per disparità"

$$[Eu](x,y) := \begin{cases} u(x,y) & \text{se } (x,y) \in C_A^+ \\ u(x,-y) & \text{se } x \in A, y \in (-1,0) \end{cases}$$

$\uparrow$  per parità  $\uparrow \in A$   $\uparrow \in \mathbb{R}$

$$[\hat{E}u](x,y) := \begin{cases} u(x,y) & \text{se } x \in A, y \in (0,1) \\ -u(x,-y) & \text{se } x \in A, y \in (-1,0) \end{cases}$$

$\uparrow$  per disparità

Il caso  $y=0$  è di misura nulla

**Teorema** (Estensione per parità)

$d \geq 1$ ,  $A \subset \mathbb{R}^{d-1}$  aperto,  $C_A$  e  $C_A^+$  come sopra,  $p \in [1, +\infty]$ .  
 Se  $u \in W^{1,p}(C_A^+)$ , allora  $Eu \in W^{1,p}(C_A)$ .

Inoltre

- $u \rightarrow Eu$  è lineare
- la derivata di  $Eu$  soddisfa

$$\frac{\partial Eu}{\partial x_i} = E\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \quad \forall i = 1, \dots, d-1$$

$$\frac{\partial Eu}{\partial y} = \hat{E}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

- c'è un controllo delle norme

$$\|Eu\|_{1,p,C_A} \leq \text{cost} \cdot \|u\|_{1,p,C_A^+}$$

↑  
forse 2

In altre parole: l'applicazione  $u \rightarrow Eu$  è un  $L^p$ -estensione forte da  $C_A^+$  a  $C_A$ .

**Dim** Distinguiamo  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial}{\partial y}$ .

**Caso  $\frac{\partial}{\partial x_i}$**  Devo dimostrare che

$$\int_{C_A} Eu(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,y) dx dy = - \int_{C_A} E \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y) \varphi(x,y) dx dy$$

per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(C_A)$ . Ora

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,y) \dots + \int_A dx \int_{-1}^0 dy u(x,-y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\dots) \\ &= \dots + \int_A dx \int_0^1 dy u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,-y) \end{aligned}$$

$$= \int_A dx \int_0^1 dy \, u(x,y) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,-y) \right\}$$

$$= \int_{C_A^+} u(x,y) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x,y) dx dy$$

$$\psi(x,y) := \varphi(x,y) + \varphi(x,-y)$$

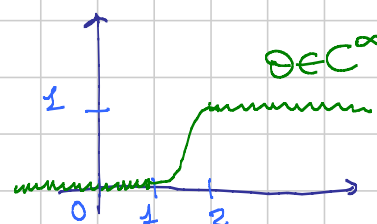
$$-RHS = \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y) \cdot \psi(x,y) dx dy \quad (\text{stessi conti})$$

Ci siamo ridotti a dim. che

$$\int_{C_A^+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dy = - \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi dx dy$$

Questo NON è ovvio perché  $\psi \notin C_c^\infty(C_A^+)$

Trucco di approssimazione:  
considero funzione  $\theta$  come  
in figura.



Invece di usare  $\psi$ , uso

$$\psi_k(x,y) = \psi(x,y) \cdot \theta(ky)$$

↑ scala velocissima tra 0 e 1

Per ogni  $k \geq 1$  vale che

$$\int_{C_A^+} u(x,y) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(x,y) dx dy = - \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y) \psi_k(x,y) dx dy$$

↑  
 $\psi_k \in C_c^\infty(C_A^+)$

$$\int_{C_A^+} u(x,y) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x,y) \theta(ky) dx dy = - \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y) \psi(x,y) \theta(ky) dx dy$$

↓ per  $k \rightarrow \infty$

LHS voluto (convergenza dominata)      RHS voluto





Dimostriamo la speranza.

$$\int_{\substack{C_A^+ \\ A \times (0, \frac{2}{k})}} |\mu(x, y)| \cdot \underbrace{|\psi(x, y)|}_{\leq L|y| \leq L \frac{2}{k}} \cdot k \cdot \underbrace{|\vartheta'(ky)|}_{\leq M} dx dy = \star$$

Osservo che  $\psi$  è lip. e si annulla per  $y=0$ , quindi

$$|\psi(x, y)| = |\psi(x, y) - \psi(x, 0)| \leq L|y|$$

$$(\star) \leq \cancel{k} M L \frac{2}{k} \underbrace{\int_A dx \int_0^{\frac{2}{k}} dy}_{\substack{\downarrow \\ 0}} |\mu(x, y)|$$

per convergenza puntuale dominata.

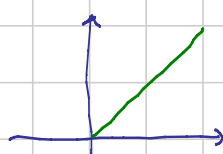
Oss. Allo stesso modo posso estendere

$$A \times (0, +\infty) \rightsquigarrow A \times \mathbb{R}$$

Oss. Nel caso in cui  $A = \mathbb{R}^{d-1}$  ho un'estensione da un semispazio a tutto lo spazio.

Domanda L'estensione per parità è un 2-estender?  
(cioè  $W^{2,p}(C_A^+) \rightsquigarrow W^{2,p}(C_A)$ ?)

No! Nemmeno nel caso  $(0,1) \rightsquigarrow (-1,1)$



$$x \in W^{2,p}((0,1))$$



$$|x| \notin W^{2,p}((-1,1))$$

[Corretto dopo video]

Oss.  $\hat{=}$  NON è nemmeno un 1-estender

Come costruisco un 2- extender ?

Il caso vero è estendere da  $(0, +\infty) \rightsquigarrow \mathbb{R}$   
 $(0,1) \rightsquigarrow (-1,1)$

$$E_2 u(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in (0, +\infty) \\ a u(-x) + b u(-2x) & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Enusticamente, supponendo  $u$  molto regolare, viene fuori  
 $a+b=1$

$$-a-2b=1 \quad \rightsquigarrow \quad a=3 \quad b=-2$$

... andando a fare la dimostrazione scopriremo che

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0$$

... il che permetterà di avere  $|\psi(x)| \leq L|x|^2$  e quindi  
 esce  $\frac{1}{k^2}$ .

— o — o —

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 34

Note Title

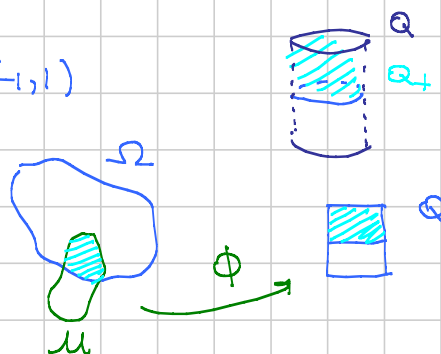
08/11/2018

Def. Diciamo che  $\Omega$  è di classe  $C^1$  se per ogni  $x \in \partial\Omega$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  ed una funzione

$$\Phi: U \rightarrow Q = B_{d-1}(0,1) \times (-1,1)$$

tale che

- $\Phi$  è invertibile
- $\Phi$  e  $\Phi^{-1}$  sono di classe  $C^1$
- $J\Phi$  e  $J\Phi^{-1}$  sono limitati
- $\Phi(U \cap \Omega) = Q^+ = B_{d-1}(0,1) \times (0,1)$
- $\Phi(U \cap \partial\Omega) = B_{d-1}(0,1) \times \{0\}$



Teorema (Esistenza di  $\pm$ -estender)

$d \geq 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  aperto.

Supponiamo che

- $\Omega$  è di classe  $C^1$
- $\partial\Omega$  è compatto

Allora esiste un  $\pm$ -estender  $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Prop. 1 (Composizione interna di funzioni di Sobolev)



$A, B$  aperti in  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Phi: A \rightarrow B$  t.c.

- $\Phi$  invertibile
- $\Phi$  e  $\Phi^{-1}$  di classe  $C^1$
- $J\Phi$  e  $J\Phi^{-1}$  limitati (in  $A$  e  $B$ , risp.)

Allora  $u \in W^{1,p}(B) \Leftrightarrow u \circ \Phi \in W^{1,p}(A)$

Inoltre

$$\frac{\partial (\mu \circ \phi)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mu}{\partial x_j}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x)$$

chain rule di Analisi 2

Lemma (Partizione dell'unità)

Supponiamo  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  con  $\partial\Omega$  compatto.

Siano  $A_1, \dots, A_n$  aperti con  $A_i \subset \mathbb{R}^d$  t.c.

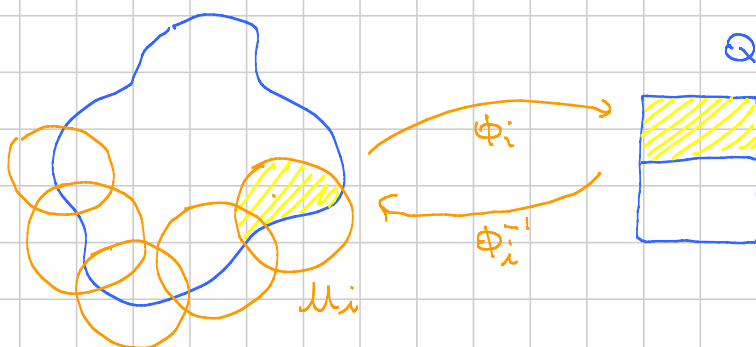
$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Allora esistono funzioni  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$  di classe  $C^\infty$  t.c.  
 ↑ c'è anche lei!

- $0 \leq \psi_i(x) \leq 1$  per ogni  $i = 0, 1, \dots, n$   $\forall x \in \mathbb{R}^d$
- $\text{supp } \psi_i \subseteq A_i$  per  $i = 1, \dots, n$
- $\text{supp. } \psi_0 \subseteq \Omega$  [Cometto dopo video] [N.B.  $\text{supp } \psi_0$  non è necess. cpt.]
- Vale

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \text{Clos}(\Omega)$$

Dim Teo.  $\partial\Omega$  è compatto e  $C^1$ , quindi ricopro con un numero finito di  $A_i$  come nella def. di aperto  $C^1$



Piano • Pongo  $\mu_i = \mu|_{\min \Omega}$

• Mediante  $\phi_i$  diventa  $v_i$  in  $\mathbb{Q}^+$

• Estendo  $v_i$  ad una  $v_i^+$  in  $\mathbb{Q}$

• Mediante  $\phi_i^-$  diventa  $\hat{\mu}_i$  in  $\mathcal{M}_i$

• Pseudo partizione dell'unità e pongo

$$\hat{\mu}(x) := \sum_{i=0}^n \hat{\mu}_i \cdot \psi_i$$

$\uparrow$   
 $v_{50} \quad \hat{\mu}_0 = \mu$

Dico che è l'estensione cercata

→ linearità è ovvia

→ verifico che estenda: per  $x \in \Omega$  vale  $\hat{\mu}_i(x) = \mu(x)$  e quindi

$$\hat{\mu}(x) = \sum_{i=0}^n \mu(x) \psi_i(x) = \mu(x)$$

$\uparrow$   
 raccoglie

→ posso stimare  $\|\hat{\mu}\|_{1,p,\mathbb{R}^d}$  in termini di  $\|\mu\|_{1,p,\Omega}$

Basta verificare che in ogni passaggio si paga solo una costante e che gli addendi sono un numero finito

$$\|\hat{\mu}_i \cdot \psi_i\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq C_1 \|\hat{\mu}_i\|_{1,p,\mathcal{M}_i}$$

$$\leq C_1 C_2 \|\hat{v}_i\|_{1,p,\mathbb{Q}}$$

$$\leq C_1 C_2 C_3 \|v_i\|_{1,p,\mathbb{Q}^+}$$

$$\leq C_1 C_2 C_3 C_4 \|\mu_i\|_{1,p,\min \Omega}$$

$$\leq \underbrace{C_1 C_2 C_3 C_4}_{=0} \underbrace{\|\mu\|_{1,p,\Omega}}_{=0}$$

Dim. Prop. composizione

Facciamo la freccia  $u \in W^{1,p}(B) \Rightarrow u \circ \phi \in W^{1,p}(A)$

Idea: usare la def.  $H$  ed i teoremi di approx.

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u & \text{in } L^p(B) & + \text{ puntuale e dominata} \\ \nabla u_n &\rightarrow \nabla u & \text{in } L^p(B) \end{aligned}$$

Spero che  $u_n \circ \phi \rightarrow u \circ \phi$  in  $L^p(A)$

$$\nabla(u_n \circ \phi) \rightarrow \nabla(u \circ \phi) \text{ in } L^p(A)$$

È vero che  $u_n \circ \phi \rightarrow u \circ \phi$  per q.o.  $x \in A$

(qui serve che, detto  $E \subseteq B$  l'insieme in cui non si ha conv. puntuale, valga che  $\phi^{-1}(E)$  ha misura nulla in  $A$ , questo è vero perché se  $H_p$  su  $\phi$  garantiscono che insiemi di misura nulla vanno in insiemi di misura nulla)

Per concludere che la convergenza in  $L^p(A)$  serve una dominazione.

Se  $|u_n(x)| \leq g(x) \in L^p(B)$ , allora

$$|u_n(\phi(x))| \leq g(\phi(x)) \stackrel{?}{\in} L^p(A)$$

$$\int_A |g(\phi(x))|^p dx = \int_B |g(y)|^p |\det J\phi^{-1}(y)| dy \quad \text{😊}$$

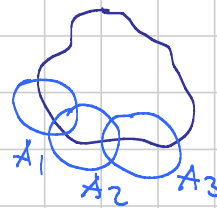
La conv. delle derivate è uguale (e qui serve la limitatezza di  $J\phi$ )

Tutto ciò vale per  $p < +\infty$ . Per  $p = +\infty$  occorre mettersi in aperti ben contenuti e usare  $p = 2018$ .

— o — o —

Una partizione dell'unità

Aggiungo d'ufficio  $A_0 := \Omega$   
in modo che



$$\text{Clos}(\Omega) \subseteq \bigcup_{i=0}^n A_i$$

Step 1 Per ogni  $k \geq 1$  inteso pongo

$$A_{i,k} := \left\{ x \in A_i : d(x, \partial A_i) \geq \frac{1}{k} \right\}$$

Claim: esiste un valore di  $k$  per cui

$$\text{Clos}(\Omega) \subseteq \bigcup_{i=0}^n A_{i,k}$$

"  $\hat{A}_i$

Osservo che  $\hat{A}_i \subset\subset A_i$  per  $i = 1, \dots, n$   
 $\text{Clos}(\hat{A}_0) \subseteq A_0 = \Omega$

Step 2 Per ogni  $i = 0, 1, \dots, n$  trovo  $\theta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$   
tale che

- $0 \leq \theta_i \leq 1$
- $\theta_i(x) = 1$  in  $\hat{A}_i$
- $\theta_i(x) = 0$  fuori di  $A_i$

Step 3 (Novità) Pongo

$$\psi_0(x) := \theta_0(x)$$

$$\psi_1(x) := \theta_1(x) (1 - \theta_0(x))$$

$$\psi_2(x) := \theta_2(x) (1 - \theta_0(x)) (1 - \theta_1(x))$$

$\vdots$

$$\psi_k(x) := \theta_k(x) \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \theta_i(x))$$



Banale: se  $\psi_i$  stanno in  $[0,1]$  e si annullano fuori di  $A_i$  e sono  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$

Perché sommiamo a 1 in  $\text{Clos}(\Omega)$ . Vale la formula

$$1 - \sum_{i=0}^k \psi_i(x) = \prod_{i=0}^k (1 - \psi_i(x)) \quad \forall x \text{ e } \forall k$$

Se  $x \in \Omega$ , allora  $x \in \hat{A}_i$  per qualche  $i$ , quindi  $\text{RHS} = 0$ , quindi  $\text{LHS} = 0$ , quindi  $\sum \psi = 1$ .

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 35

Note Title

09/11/2018

TEOREMI IMMERSIONE COMPATTA (RELLICH-KONDRAKOV) $d \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto,  $p \in [1, +\infty]$ 

Supponiamo che

- per  $\Omega$  vale il teorema di immersione ( $\partial\Omega$  cpt. +  $C^1$  basta)
- $\Omega$  limitato.

Allora valgono i seguenti fatti.

Caso  $p < d$   $L^p$  immersione

$$W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$$

è compatta per ogni  $q \in [1, p^*)$  (ESCLUSO  $p^*$ )Caso  $p = d$   $L^p$  immersione di sopra è compatta  $\forall q \in [1, +\infty)$ Caso  $p > d$   $L^p$  immersione

$$W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C^0(\text{Clos}(\Omega))$$

è compatta.

Def. Una immersione si dice compatta se ogni succ. limitata nello spazio di partenza ha una s.succ. convergente (forte) nello spazio di arrivo.

— o — o —

Ripasso cpt. in spazi metrici

**Teorema** Sia  $(X, d)$  metrico. Allora sono equiv.

- (i)  $X$  è compatto per ricoprimenti
- (ii)  $X$  è compatto per succ.
- (iii)  $X$  è completo + tot. limitato

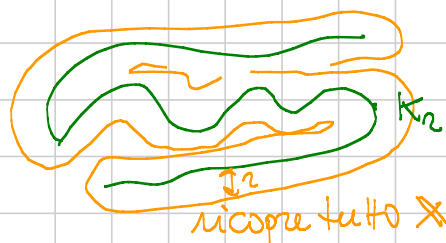
Prop. (Caratt. della totale limitatezza) [Analisi 2]

Sia  $(X, d)$  metrico. Allora sono equiv.

- (i)  $X$  è totalmente limitato
- (ii)  $\forall r > 0 \exists K_r \subseteq X$  tot. lim. (per la metrica ristretta) tale che

$$X \subseteq \bigcup_{x \in K_r} B(x, r)$$

(Ogni punto di  $X$  dista meno di  $r$  da un elemento di  $K_r$ )



Prop. (Caratterizzazione della relativa compattezza)

Sia  $(X, d)$  uno sp. metrico COMPLETO.

Sia  $S \subseteq X$  un sottoinsieme.

Allora sono equivalenti

- (i)  $\text{Clos}(S)$  è compatto
- (ii) ogni successione  $\{x_n\} \subseteq S$  ammette una s.succ. conv. (non nec. ad elemento di  $S$ )
- (iii)  $\forall r > 0$  esiste  $K_r \subseteq X$  compatto (con basta tot. lim.) t.c.

$$S \subseteq \bigcup_{x \in K_r} B(x, r) \quad (S \text{ è contenuto in un } r\text{-intorno di } K_r)$$

**Dim** Le duplicazioni sono semplici anche se non ovvie.  
Quella che serve ora è (iii)  $\Rightarrow$  (ii).

Si dimostra bene (iii)  $\Rightarrow$  (i)  $\Rightarrow$  (ii)

Dimostro che  $\text{clos}(S)$  è completo + tot. limitato

- Completo segue dall'essere chiuso in un completo
- Tot. Limitato segue da (iii) + caratterizzazione della totale limitatezza.

— o — o —

**TEOREMA** (Criterio di compattezza in  $L^p(\Omega)$ )  
(versione  $L^p$  di A.A.)

Siano  $d \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto,  $p \in [1, +\infty)$  ( $p = +\infty$  ESCLUSO)

Sia  $\mathcal{Y} \subseteq L^p(\Omega)$  un sottoinsieme.

Supponiamo

(i)  $\Omega$  è limitato (evita fughe orizz.)

(ii)  $\mathcal{Y}$  è limitato in  $L^p(\Omega)$ , cioè (evita fughe vertic.)

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{Y} \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq M$$

(iii) gli elementi di  $\mathcal{Y}$  sono equicontinui nel senso  $L^p$  del termine, cioè (evita le oscillazioni furiose)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u \in \mathcal{Y} \quad \forall R \in \mathbb{R}^d \quad |R| \leq \delta \Rightarrow \|\tau_R u - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$$

dove  $\tau_R$  è la traslazione di  $R$  definita da

$$\tau_R u(x) = \hat{u}(x+R)$$

$\uparrow$   $u$  è stata estesa a 0 fuori di  $\Omega$

$$\left\{ \int_{\Omega} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \varepsilon \quad \text{se } |R| \leq \delta$$

unif. su  $\mathcal{Y}$

Allora  $\mathcal{Y}$  è rel. cpt. in  $L^p(\Omega)$ .

**Dim.** Per il criterio precedente basta dimostrare che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un compatto  $\mathcal{Y}_\varepsilon \subseteq L^p(\Omega)$  tale che

$$\forall f \in \mathcal{Y} \quad \exists g \in \mathcal{Y}_\varepsilon \quad \|f - g\|_{L^p} \leq \varepsilon$$

Dato  $\varepsilon$ , scelgo  $\delta > 0$  che mi fa venire  $\varepsilon$  nell'ipotesi (iii).  
Prendo  $\rho$  nucleo di convoluzione. Pongo

$$\mathcal{Y}_\varepsilon := \{ \hat{f} * \rho_\delta : f \in \mathcal{Y} \}$$

$\uparrow$  estesa a 0

e dico che questo va bene.

**Step 1: verifica distanza**

$$(f * \rho_\delta)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x + \delta y) \rho(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) \rho(y) dy$$

$$|(f * \rho_\delta)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x + \delta y) - \hat{f}(x)| \rho(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|\hat{f}(x + \delta y) - \hat{f}(x)|}_{\frac{1}{p}} \underbrace{\rho(y)^{\frac{1}{p'}}}_{\frac{1}{p'}} dy$$

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x + \delta y) - \hat{f}(x)|^p \rho(y) dy \right\}^{\frac{1}{p}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) dy \right\}^{\frac{1}{p'}}}_{1}$$

Elevo alla  $p$  e integro su  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(f * \rho_\delta)(x) - f(x)|^p dx &\leq \int_{\Omega} dx \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x + \delta y) - \hat{f}(x)|^p \rho(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dy \int_{\Omega} dx |\hat{f}(x + \delta y) - \hat{f}(x)|^p \end{aligned}$$

$\uparrow$   $B(0,1)$  ha misura  $\leq \delta$

Per ipotesi (ii) l'integrale in  $dx$  è  $\leq 1^p$  e quindi

$$\text{LHS} \leq \underbrace{\int_{B(0,1)} \rho(y) dy}_{\leq 1} \leq 1^p$$

da cui la tesi.

Step 2 Gli elementi di  $\mathcal{Y}_\delta$  sono equilimitati.

$$\begin{aligned} |(f * \rho_\delta)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x + \delta y)|^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\rho(y)^{\frac{1}{p'}}}_{\leq 1} dy \\ &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x + \delta y)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)^{p'} dy \right\}^{\frac{1}{p'}}}_{\text{costante}} \\ &\quad \quad \quad \omega = \delta y \\ &= \left\{ \underbrace{\frac{1}{\delta^d}}_{\text{FISSO}} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^p d\omega \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \text{costante} \\ &\leq C_1(\delta, p) \cdot \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

Step 3 Gli elementi di  $\mathcal{Y}_\delta$  sono equicontinui, anzi equi-lip.

Basta una stima unif. sulle derivate

$$\begin{aligned} \nabla(f * \rho_\delta)(x) &= \nabla \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x + \delta y) \rho(y) dy \\ &= \nabla \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \rho\left(\frac{\omega - x}{\delta}\right) \frac{1}{\delta^d} d\omega \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\hat{f}(w)}_{\frac{1}{p}} \underbrace{\nabla \rho\left(\frac{w-x}{\delta}\right) \left(-\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{p'}}}_{\frac{1}{p'}} dw$$

Mettendo i valori assoluti e facendo Hölder troviamo

$$\|\nabla(f * \rho_\delta)(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2(p, \delta) \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

Step 4 Grazie agli step 2 e 3 gli elementi di  $\mathcal{M}$  verificano le hp. di Ascoli - Arzelà in  $\text{Clos}(\Omega)$  che è limitato, quindi CPT.

Per A.A. la famiglia  $\mathcal{M}$  è rel. cpt. rispetto alla conv. unif., dunque a maggior ragione in  $L^p(\Omega)$ .

Oss. L'enunciato si può dire in termini di succ., ma la dim. passa meglio attraverso la caratterizzazione [Provare a fare dim. con le succ.]

## Ist. Analisi Matematica

-

## LEZIONE 36

Note Title

09/11/2018

Dimostrazione Immersioni compatte

Caso  $p > d$  BANALE! L'immersione di Sobolev fornisce stima  $L^\infty$  e stima della costante di Hölder.  
Concludo con A.A.

Caso  $p = d$  Segue dal caso  $p < d$ .  
Mi serve compattezza in un certo  $L^q$ . So che sto in  $L^q$  perché  $p = d$ , ma in realtà esiste  $p_1 < d$  tale che  $q < p_1^*$ .  
Se una succ. è limitata in  $W^{1,p_1}(\Omega)$ , allora è limitata pure in  $W^{1,p_1}(\Omega)$ .  
Uso il teorema con  $p_1$ .

Conclusione: basta dim. il caso  $p < d$ .  
Basta dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{B} := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{1,p,\Omega} \leq M\}$$

è compatta in  $L^q(\Omega)$  per ogni  $q < p^*$ .

Step 1 Come sempre poniamo

$$\Omega_k := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{k}\}$$

Claim:  $\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k) \rightarrow 0$

Beppo-Levi o passaggio al limite della misura o conv. puntuale dominata delle caratteristiche



**Step 2** Voglio dimostrare la equi-continuità in senso  $L^p$  degli elementi di  $\mathcal{H}$ .

Iniziamo dimostrando che

$$\|T_R u - u\|_{L^1(\Omega \setminus \Omega_k)} \leq 2 \|u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{1/p}$$

Osservo che  $|\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| \leq |\hat{u}(x+R)| + |\hat{u}(x)|$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_k} |u(x)| dx = \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |u(x)| \cdot 1 dx$$

$$\leq \|u\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega_k)} \cdot \|1\|_{L^{p'}(\Omega \setminus \Omega_k)}$$

$$\leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{1/p'}$$

Idea per il 2° termine.

**Step 3** Per ogni  $|R| \leq \frac{1}{k}$  dico che

$$\|T_R u - u\|_{L^1(\Omega_k)} \leq |R| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \{\text{meas}(\Omega)\}^{1/p'}$$

$$u(x+R) - u(x) = \psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt$$

$\uparrow$   
vale  $u$ , qui non  
serve estendere

$$\psi(t) := u(x+tR)$$

$$= \int_0^1 \langle \nabla u(x+tR), R \rangle dt$$

$$|u(x+R) - u(x)| \leq |R| \int_0^1 |\nabla u(x+tR)| dt$$

Integro in  $dx$

$$\int_{\Omega_k} |u(x+R) - u(x)| dx \leq |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega_k} dx |\nabla u(x+tR)| \cdot 1$$

$$\leq |R| \int_0^1 dt \left\{ \underbrace{\int_{\Omega_k} |\nabla u(x+tR)|^p dx}_{= \int_{\frac{\Omega_k+tR}{\varepsilon - R}} |\nabla u(y)|^p dy} \right\}^{1/p} \text{meas}(\Omega_k)^{1/p}$$

$$\leq \int_{\frac{\Omega_k+tR}{\varepsilon - R}} |\nabla u(y)|^p dy \leq \int_{\Omega} |\nabla u(y)|^p dy$$

**Step 4** Conclude nel caso  $q=1$ .

Dagli step 2 e 3 abbiamo ottenuto che

$$\begin{aligned} \|\tau_R u - u\|_{L^1(\Omega)} &= \|\tau_R u - u\|_{L^1(\Omega \setminus \Omega_k)} + \|\dots\|_{L^1(\Omega_k)} \\ &\leq 2 \|u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{1/p'} + |R| \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas} \Omega\}^{1/p'} \end{aligned}$$

Formalmente

- ci viene dato  $\varepsilon > 0$
- scegliamo  $\Omega_k$  in modo che il 1° addendo sia  $\leq \frac{1}{2} \varepsilon$
- visto il  $k$  scegliamo  $\delta > 0$  che sia  $\leq \frac{1}{k}$  e che per ogni  $|R| \leq \delta$  il secondo addendo viene  $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

A questo punto nel caso  $q \geq 1$  possiamo usare il criterio di compattezza in  $L^1(\Omega)$ .

**Step 5** Concludiamo per ogni  $q \in [1, p^*)$  <sup>escluso</sup>

Mi serve la piccolezza delle traslate in  $L^q$

IDEA GENERALE: piccolo in  $L^1$  + limitato in  $L^{p^*}$

implica piccolo in  $L^q$  per ogni  $q < p^*$

Fatto generale di spazi  $L^p(\Omega)$  con  $\Omega$  limitato (ma nemmeno serve)

Siano  $p < q < \infty$ . Se  $f \in L^p$  e  $f \in L^1$ , allora  $f \in L^q$  e

$$\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}^\theta \cdot \|f\|_{L^1}^{1-\theta}$$

per un opportuno  $\theta(p, q, 1)$ .

Ora  $\|T_h u - u\|_{L^{p^*}} \leq \|T_h u\|_{L^{p^*}} + \|u\|_{L^{p^*}}$   
 Limitato perché per  $p^*$  vale l'immersione

$$\|T_h u - u\|_{L^1} \text{ piccolo se } |h| \text{ è piccolo}$$

e di conseguenza

$$\|T_h u - u\|_{L^q} \leq \|T_h u - u\|_{L^1}^\theta \cdot \|T_h u - u\|_{L^{p^*}}^{1-\theta}$$

↑  
trovo piccolezza su questo che mi dà  
piccolezza voluta su  $L^{p^*}$ .

Fatto importante

$L^1$  immersione NON è compatta per  $q = p^*$   
 cioè se ho una succ. limitata in  $W^{1,p}(\Omega)$  non è detto che questa abbia  
 s. succ. convergente in  $L^{p^*}(\Omega)$ .

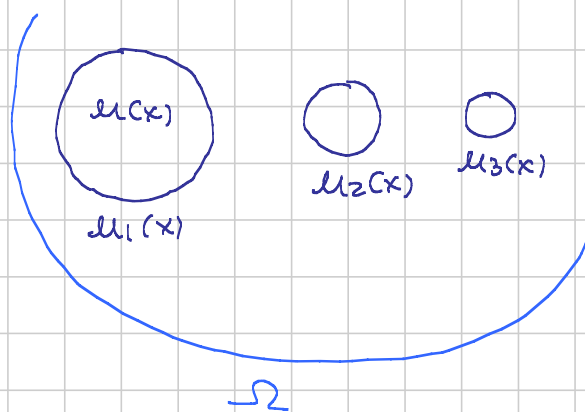
Idea: sfruttare l'invarianza quando si passa da  $u(x)$  a  $u(xh)$ .

Detto meglio: quando passo da  $u(x)$  a  $u(xh)$

le norme del gradiente in  $L^p$  e della funzione in  $L^{p^*}$  riscalano allo stesso modo

Prendo una  $u_1$  con supporto in una palla e la chiamo  $u_1$

Prendo  $u_2$  in una seconda pallina che è una riscalata di  $u_1$  fatta in modo da avere la stessa norma di  $u_1$  in  $W^{1,p}$ .



Prendo  $u_3$  in una terza pallina disgiunta, e procedo allo stesso modo scegliendo i raggi in modo da non uscire da una palla gigante

In questo modo ho una succ. di funzioni lineari in  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Le norme  $L^{p^*}(\Omega)$  di queste sono lineari (volendo per l'immersione, o perché riscalano allo stesso modo).

Ma non può avere s.succ. convergenti perché i supporti sono disgiunti e quindi

$$\|u_m - u_n\|_{L^{p^*}} = \|u_m\|_{L^{p^*}} + \|u_n\|_{L^{p^*}} \quad \text{se } m \neq n$$

$$\geq \text{costante positiva}$$

Per i  $q < p^*$  accade che  $u_m \rightarrow 0$  in  $L^q$

— 0 — 0 —

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 37

Note Title

12/11/2018

TRACCE DI FUNZIONI DI SOBOLEV

Problema generale : data  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , come posso definire  $u|_{\partial\Omega}$ ?

In una variabile : le funs. di Sob. sono Hölder, quindi si  
 $u(a,b)$  estendono alla chiusura

Notazione  $d \geq 1$   $(x,y) \in \mathbb{R}^d$   
 $\mathbb{R}^{d-1} \uparrow \uparrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}_+^d := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^d : y > 0 \}$$

CASO MODELLO  $\Omega := \mathbb{R}_+^d$  e voglio definire la traccia su  $\partial\Omega$ .

① Caso modello regolare  $d \geq 1$ ,  $p \in [1, +\infty)$ ,  $u \in C_c^d(\mathbb{R}^d)$   
 $\uparrow$   
 tutto

Allora

$$\|u(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p) \|u\|_{d,p,\mathbb{R}_+^d}$$

Oss. •  $u$  è definita ovunque (tutto  $\mathbb{R}^d$ )  
 • LHS è solo su  $\partial\mathbb{R}_+^d$   
 • RHS è solo sopra, cioè in  $\mathbb{R}_+^d$

Dim Step 1 Ottengo stima migliore per  $p=1$

$$u(x,0) = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d-1}$$

$$|u(x,0)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right| dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^{d-1}$$

Integro

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x,0)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right| dy$$

$$= \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+^d)}$$

Step 3 Applico lo step 1 a

$$v(x,y) = |u(x,y)|^n u(x,y) \stackrel{\uparrow}{=} \varphi(u(x,y))$$

$\varphi(\sigma) = |\sigma|^n \sigma$

$$\text{LHS} = \|v(x,0)\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x,0)|^{n+1} dx = \|u(x,0)\|_{L^{n+1}(\mathbb{R}^{d-1})}^{n+1}$$

Osservo che

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = (n+1) |u(x,y)|^n \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^1(\mathbb{R}_+^d)} = (n+1) \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x,y)|^n \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right| dx dy \\ &\leq (n+1) \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x,y)|^{np'} dx dy \right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(\cdot, \cdot) \right|^p dx dy \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Mettendo insieme LHS  $\leq$  RHS:

$$\|u(x,0)\|_{L^{n+1}(\mathbb{R}^{d-1})}^{n+1} \leq (n+1) \|u\|_{L^{np'}(\mathbb{R}_+^d)}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}$$

Vorrei che fosse  $\lambda p' = p \Leftrightarrow \lambda \frac{p}{p-1} = p \Leftrightarrow \lambda = p-1$

In questo modo  $\lambda+1 = p$  e ottengo

$$\|u(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p \leq p \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^{p-1} \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p}$

da cui la tesi

②  $d \geq 2$ ,  $p \in [1, d)$ ,  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ . Allora

$$\|u(x,0)\|_{L^q(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p) \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}$$

con  $q := \frac{(d-1)p}{d-p}$  ← un po' meglio di  $p$ , ma un po' peggio di  $p^*$

↑ meglio di  $p$  tranne nel caso  $p=1$

Dim. Come prima arriviamo a

$$\|u(x,0)\|_{L^{\lambda+1}(\mathbb{R}^{d-1})}^{\lambda+1} \leq (\lambda+1) \|u\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+^d)}^{\lambda} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}$$

e ora imponiamo  $\lambda p' = p^* = \frac{dp}{d-p}$

$$\Leftrightarrow \lambda \frac{p}{p-1} = \frac{dp}{d-p} \quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{d(p-1)}{d-p}$$

$$\Leftrightarrow \lambda+1 = \frac{d(p-1)}{d-p} + 1 = \frac{dp - d + d - p}{d-p} = \frac{p(d-1)}{d-p} = p^* \text{ su codim. } 1$$

③ Definizione della traccia per  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$

$$\text{Tr}: W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^{d-1})$$

(al posto di  $p$  posso mettere  $\frac{p(d-1)}{d-p}$ )

e vogliamo che sia

→ lineare

→ coincide con la restrizione sulle funzioni "decenti"

→ vale una stima

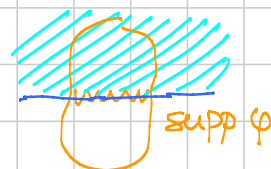
$$\|\text{Tr} u\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p) \|u\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}$$

→ vale una formula di integrazione con estremi

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) dx dy = - \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial y}(\dots) \cdot \varphi(\dots) dx dy$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tr} u}}{u(x,0)} \varphi(x,0) dx$$

per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$   
 $\uparrow$  tutto



[Dim.] Prendo  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$

TUTTO

↓

• Per approx. deluxe trovo  $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  t.c.

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^p(\mathbb{R}_+^d)$$

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ in } L^p(\mathbb{R}_+^d)$$

• Osservo che  $\{u_n\}$  è di Cauchy rispetto a  $\|\cdot\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}$

• Ma allora le tracce  $v_n(x) := u_n(x,0)$  sono di C. in  $L^p(\mathbb{R}^{d-1})$



e quindi posso pone

Tr  $u := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leftarrow$  limite in  $L^p(\mathbb{R}^{d-1})$   
(con  $p$  sostituito dall'esp. migliore).

Le proprietà di linearità, derivata e integrazione per parti seguono immediatamente pensando al limite.

Sulle funzioni  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$  che si estendono con continuità fino al bordo, la restrizione coincide con la traccia.

Se  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \cap C^0(\text{clos}(\mathbb{R}_+^d))$ , allora basta estenderla per ribaltamento (rimane continua), poi approssimarla per convoluzione e osservare che le convolute convergono bene.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|

- ④ Per  $p > d$  la traccia è la banale restrizione di una funzione Hölderiana

Basta osservare che  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$  con  $p > d$  sono  $\alpha$ -Hölderiane con  $\alpha := 1 - \frac{d}{p}$  fino al bordo.

— 0 — 0 —

- ⑤ se  $\Omega$  è  $C^1 + \partial\Omega$  cpt. allora si può definire la traccia usando partizioni dell'unità + approx. oblique.

Punto fondamentale: ottenere una stima del tipo

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(p, d, \Omega) \|u\|_{L^{p, \infty}(\Omega)}$$

per ogni  $\mu \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$

## Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 38

Note Title

12/11/2018

Domanda : se  $u_n \rightarrow u_\infty$  in  $\Omega$  in qualche senso, posso dire che  $\text{Tr } u_n \rightarrow \text{Tr } u_\infty$  in qualche senso?

Caso modello di  $\mathbb{R}_+^d$

↗ (ma poi tutto passa al limite quando  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ )

Se prendo  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$  e faccio la traccia su  $y = \frac{1}{k}$  che succede per  $k \rightarrow +\infty$ ?

C'è una dipendenza  $p'$  Hölderiana, cioè  $(p > 1)$

$$\|u(x, y_2) - u(x, y_1)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq |y_2 - y_1|^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}$$

Dim Supponiamo wlog  $y_2 > y_1$

$$u(x, y_2) - u(x, y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy$$

$$\begin{aligned} |u(x, y_2) - u(x, y_1)| &\leq \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{\left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|}_{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{1}_{\frac{1}{p'}} dy \\ &\leq (y_2 - y_1)^{\frac{1}{p'}} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Elevo alla  $p$  e integro in  $dx$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, y_2) - u(x, y_1)|^p dx &\leq \\ &\leq (y_2 - y_1)^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dy \\ &\leq \int_0^\infty \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p \end{aligned}$$

Teorema (Dipendenza continua del tracce)

$$d \geq 2 \quad \{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d), \quad \boxed{p > 1} \quad \text{per } p=1 \text{ le tracce esistono ma non funzionano}$$

Supponiamo che

$$(i) \quad u_n \rightarrow u_\infty \text{ in } L^p(\mathbb{R}_+^d)$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right\|_{L^p} \leq M.$$

$$\text{Allora } \text{Tr } u_n \rightarrow \text{Tr } u_\infty \text{ in } L^p(\mathbb{R}^{d-1})$$

(Lo stesso vale per i  $q \leq \frac{(d-1)p}{d-p}$ )  
↑ stretto

Dim. Trucco alla Poincaré con zona di scambio

$$\|u_n(x,0) - u_\infty(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq$$

$$\leq \|u_n(x,0) - u_n(x,y)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \quad (1)$$

$$+ \|u_n(x,y) - u_\infty(x,y)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \quad (2)$$

$$+ \|u_\infty(x,y) - u_\infty(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \quad (3)$$

zona di  
scambio  
↓

vera per ogni  $y > 0$ . Integro in  $dy$  in un intervallo  $(0, y_0)$   
 dopo aver elevato tutto alla  $p$  e usato che

$$(a+b+c)^p \leq k(p) (a^p + b^p + c^p)$$

Ottengo

$$\text{LHS} = y_0 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_n(x,0) - u_\infty(x,0)|^p dx$$

Per i 3 termini al RHS ottengo

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} &= \int_0^{y_0} dy \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_m(x,0) - u_m(x,y)|^p dx \\
 &\leq y^{\frac{p}{p-1}} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad y^{p(1-\frac{1}{p})} = y^{p-1} \leq y_0^{p-1} \\
 &\leq y_0^p \left\| \frac{\partial u_m}{\partial y} \right\|^p \leq y_0^p M
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} = \text{uguale a sopra} \leq y_0^p \left\| \frac{\partial u_\infty}{\partial y} \right\|^p \leq y_0^p M$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} &\leq \int_0^{y_0} dy \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u_m(x,y) - u_\infty(x,y)|^p dx \\
 &= \|u_m - u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1} \times (0, y_0))}^p \\
 &\quad \leq \mathbb{R}_+^d
 \end{aligned}$$

Mettendo insieme abbiamo

$$y_0 \|u_m(x,0) - u_\infty(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p \leq 2y_0^p M + \|u_m - u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}^p$$

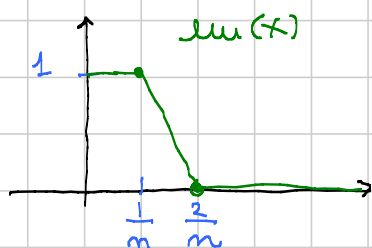
Facendo il limsup per  $m \rightarrow \infty$  ottengo

$$y_0 \limsup_{m \rightarrow \infty} \|u_m(x,0) - u_\infty(x,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}^p \leq 2y_0^p M$$

Se  $p > 1$  basta far tendere  $y_0 \rightarrow 0$  per finire.

— 0 — 0 —

Esempio Per  $p=1$  non funziona nemmeno in dimensione 1



$$u_n \rightarrow 0 \text{ in } L^p((0, \infty)) \quad \forall p \geq 1$$

$$\|u_n\|_{L^1((0, \infty))} = 1$$

$$u_n(0) = 1 \not\rightarrow u_\infty(0) = 0$$

Nota bene: Le  $u_n$  non sono equilimitate in  $W^{1,p}((0, \infty))$  se  $p > 1$ .

Oss. La convergenza delle tracce vale in ogni  $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$  con  $q < \frac{p(d-1)}{d-p} = p_d^*$

Ragione:  $\text{Tr} u_n - \text{Tr} u_\infty$  è limitata in  $L^{p_d^*}$  e tende a 0 in  $L^p$ , quindi  $\rightarrow 0$  in tutti gli  $L^q$  intermedi  
 $\text{---} 0 \text{---} 0 \text{---}$

Nella dim. precedente, perché possiamo dire che

$$\left\| \frac{\partial u_\infty}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)} \leq M$$

Ipotesi:  $u_n \rightarrow u_\infty$  in  $L^p(\Omega)$

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq M$$

Terzi:  $u_\infty$  ammette derivata  $\frac{\partial u_\infty}{\partial y}$  e questa soddisfa la stessa stima

Occorre usare che, a meno di s.succ.  $\frac{\partial u_n}{\partial y} \rightarrow v_\infty$  debde  $L^p$  (cioè permette di passare al limite quando si scontra negli integrali con funz.  $L^{p'}$ )

Servono due cose

$$\textcircled{1} \quad v_\infty = \frac{\partial u_\infty}{\partial y}$$

$$\int u_m \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \int \frac{\partial u_m}{\partial y} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\int u_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \int v_\infty \varphi$$

$$\textcircled{2} \quad \|v_\infty\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf \left\| \frac{\partial u_m}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

Conseguenza del fatto generale: se  $v_m \rightarrow v_\infty$  debole  $L^1$ , allora per ogni  $\varphi$  convessa

$$\liminf \int \varphi(v_m) \geq \int \varphi(v_\infty).$$

— o — o —

Quando siamo con  $\Omega$  aperto regolare generale, cosa si intende con  $L^p(\partial\Omega)$ ?

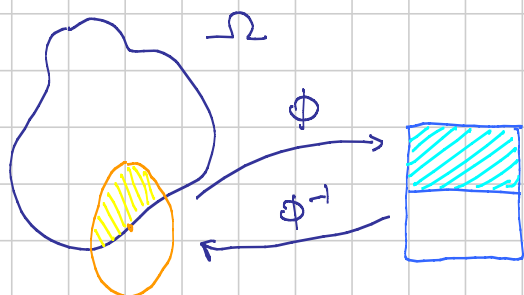
→ Integrale curvilineo nel caso  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

→ Integrale superficiale "  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

→ analogo nel caso generale  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

si definisce in modo analogo via parametrizzazione

L'ipotesi di  $\partial\Omega$  regolare fornisce la parametrizzazione



Esempio Se  $\Omega = (-1,0) \cup (0,1)$  non c'è verso di definire la traccia.

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 39

Note Title

15/11/2018

Spazi  $W_0^{m,p}(\Omega)$  (Di solito si usa  $m=1$ )

Def. (Astratta) Si tratta del completamento di  $C_c^\infty(\Omega)$  rispetto alla norma  $\|u\|_{m,p,\Omega}$

Oss. Lo spazio  $H^{m,p}(\Omega)$  è la stessa cosa senza il supporto compatto

Oss. Ottengo lo stesso spazio partendo da  $C_c^m(\Omega)$ .

Def. (Operativa) Si ha che  $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$  se e solo se esiste  $\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$  tale che

- $u_m \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$
- $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$  in  $L^p(\Omega)$  per ogni  $|\alpha| \leq m$ .

*↑ (derivate W-deboli, oppure possiamo semplificare.  
suppone che  $\{D^\alpha u_m\}$  è di Cauchy in  $L^p(\Omega)$ )*

Oss. Tutto ciò equivale a dire che  $W_0^{m,p}(\Omega)$  è la chiusura di  $C_c^\infty(\Omega)$  in  $W^{m,p}(\Omega)$ .

Achtung! Non bisogna mai confondere gli spazi

$$W_0^{2,p}(\Omega)$$

e

$$W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

Esempio  $\Omega = (0,1)$ .  $p \in (1, +\infty)$

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : \underbrace{u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0}_{\text{segue da A.A.}}\}$$

*ben definite perché  $u \in C^1$*

$$W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : u(0) = u(1) = 0\}$$

In generale  $W^{1,p}(\Omega)$  e  $W_0^{1,p}(\Omega)$  sono molto diversi

**Fatto 1** Se  $\Omega = \mathbb{R}^d$  i due spazi coincidono.

Sostanzialmente si riduce a dim. che ogni funzione in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ , con  $p \in [1, +\infty)$ , si può approx in  $\|\cdot\|_{1,p, \mathbb{R}^d}$  con funzioni  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Dim. Approx in due fasi.

**Step 1** Approx  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  con funzioni in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  ma con supporto cpt.

Data  $\varphi$  come in figura, pongo

$$u_n(x) := u(x) \cdot \varphi\left(\frac{\|x\|}{n}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$



Si osserva che  $u_n$  ha supporto contenuto in  $B(0, 2n)$  e  $u_n \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

(basta applicare la conv. dominata

$u_n \rightarrow u$  puntualmente

$\nabla u_n \rightarrow \nabla u$  puntualmente

ed è tutto dominato).

**Step 2** Le  $u_n$  si possono approx. per convoluzione con funzioni in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

• Dato  $\varepsilon > 0$

• Scelgo  $n$  tale che  $\|u - u_n\|_{1,p, \mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$

• Scelgo  $\delta > 0$  t.c.  $\|u_n - u_n * \rho_\delta\|_{1,p, \mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$

e concluso che  $\|u - u_n * \rho_\delta\|_{1,p, \mathbb{R}^d} \leq \varepsilon$ .



Oss. Questo funziona anche per  $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

**Fatto 2**  $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Allora

$$W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \quad \text{se } d \geq 2 \text{ e } p < d$$

$$(\quad = W^{1,p}(\mathbb{R}^d)) \quad \text{(basta } p \leq d \text{ ma è più difficile)}$$

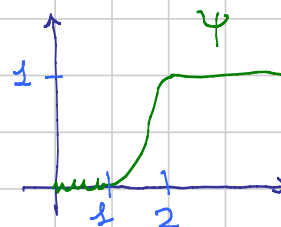
(Questo è come dire che i "punti non si vedono" in questo range  $d \geq p$ )

La cosa che devo dimostrare è che ogni  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  si può approx con funzioni  $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ , cioè  $\uparrow \uparrow$  nulle in tutta una pallina centrata nell'origine!!

**Step 1** Come prima tronco fuori da una palla grande pagando poco o nulla

$$u_m(x) := u(x) \cdot \varphi\left(\frac{\|x\|}{m}\right)$$

**Step 2** Mando a 0 in una pallina centrata nell'origine pagando poco.



$$\hat{u}_m(x) = u_m(x) \cdot \psi(m\|x\|)$$

Così  $\hat{u}_m(x)$  è nulla in  $B(0, \frac{1}{m})$

È ovvio che  $\hat{u}_m$  è vicina ad  $u$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .  
 Meno ovvio è per le derivate

$$\nabla \hat{u}_m(x) = \underbrace{\nabla u_m(x) \cdot \psi(m\|x\|)}_{\text{buono}} + \underbrace{u_m(x) \psi'(m\|x\|)}_{\text{limitato}} m \frac{x}{\|x\|}$$

Devo dimostrare che il secondo addendo è piccolo in norma  $L^p$ .  
Questo segue dal fatto che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_n(x)|^p \underbrace{[\psi'(m\|x\|)]^p}_{\leq C} m^p dx$$

$\uparrow$   
 $B(0, \frac{2}{m})$

Se fosse che  $u_n(x)$  è limitata, avrei qualcosa del tipo  $\frac{m^p}{m^2}$  che per  $d > p$  tende a 0.

Step 3 Conclusione vera.

- Mi viene dato  $\varepsilon > 0$
- Salgo  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\|u - u_n\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{4}\varepsilon$   
 $\uparrow$   
nulla fuori da una palla
- Approssimo  $u_n$  per convoluzione e trovo  $v_n$  nulla fuori da una palla tale che

$$\|u_n - v_n\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{4}\varepsilon$$

- Moltiplicando  $v_n$  per una opportuna  $\psi(m\|x\|)$  ottengo una  $w_n$  che è nulla anche vicino all'origine e soddisfa

$$\|v_n - w_n\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{4}\varepsilon$$

- A questo punto  $\|u - w_n\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq \varepsilon$ .

Oss. La stessa dim. funziona per  $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$   
perché  $mp < d$  (ma si può forzare a  $mp \leq d$ )

Esercizio Dimostrare che per  $p \leq d$  si ha

$$\inf \left\{ \int_{B(0,1)} |\nabla u(x)|^p dx : u \in C_c^\infty(B(0,1)) \text{ e } u(0) = 1 \right\} = 0$$

Facile se  $\boxed{p < d}$  Prendo una qualunque  $u$  che ha le proprietà richieste e poi pongo

$$u_m(x) = u(mx)$$

Questa ha ancora le proprietà richieste e

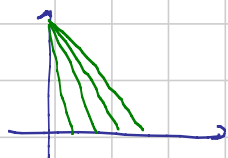
$$\int_{B(0,1)} |\nabla u_m(x)|^p dx = \int_{B(0, \frac{1}{m})} m^p |\nabla u(mx)|^p dx$$

$$\stackrel{ux=y}{=} m^p \int_{B(0,1)} |\nabla u(y)|^p \frac{1}{m^d} dy$$

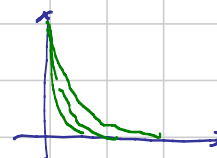
Quindi ok se  $p < d$ .

Non facile se  $\boxed{p = d}$  Non posso, ma vorrei usare funzioni del tipo  $1 - \|x\|^\alpha$  con  $\alpha < 1$

Per  $p < d$



per  $p = d$



$$u_m(x) = 1 - \|mx\|^\alpha \quad \text{se } \|x\| \leq \frac{1}{m}$$

Facendo il conto  $\|\nabla u_m(x)\| = \alpha m^\alpha \|x\|^{\alpha-1} \cdot m$   
e integrando dovrebbe venire  $\alpha \cdot \text{costante}$ .

A quel punto basta mandare  $\alpha \rightarrow 0^+$ .

— o — o —

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 40

Titolo nota

15/11/2018

Morale:  $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$  solo se  $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus$  roba piccolissima e  $p \leq d$ .

Altra morale:  $W_0^{1,p}(\Omega)$  vorrebbero essere le funzioni  $W^{1,p}(\Omega)$  nulle al bordo.

**Teorema** Siano  $d \geq 1$  e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  un aperto QUALUNQUE (anche terribile). Allora a partire da  $W_0^{1,p}(\Omega)$  valgono le immersioni di Sobolev nella versione più ortodossa.

**$p < d$**  Ogni  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  sta in  $L^{p^*}(\Omega)$  e

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

**$p = d$**  Ogni  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  sta in  $L^q(\Omega)$  per ogni  $q \in [p, +\infty)$  e

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, d, q) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

**$p > d$**  Ogni  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  è  $(1 - \frac{d}{p})$ -Hölderiana in  $\overline{\Omega}$  e quindi si annulla veramente su  $\partial\Omega$ .

(e controllo la costante di Hölder con  $C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ )

Oss. Per  $p > d$  vale l'idea intuitiva che le  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  si annullano su  $\partial\Omega$ , anche se  $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ .

**Dim.** le stesse disuguaglianze valgono in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  perché dimostrato a suo tempo, quindi valgono in  $C_c^\infty(\Omega)$  che è un sottoinsieme.  
 Per approssimazione valgono nella chiusura di  $C_c^\infty(\Omega)$  che è proprio  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

**Prop.** Se  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , allora la funzione  $\hat{u}$ , estesa a 0 su tutto  $\mathbb{R}^d$ , sta in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

**Oss.** È un enunciato vero, ma dice poco della struttura di  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Occhio che non è un se e solo se.

**Dim.** Sappiamo per def. che esiste  $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$  t.c.  
 $u_n \rightarrow u$  e  $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$  in  $L^p(\Omega)$

Ora basta osservare che

$$\hat{u}_n \rightarrow \hat{u} \quad \text{e} \quad \nabla \hat{u}_n = \nabla u_n \rightarrow \nabla \hat{u} \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

— o — o —

**Teorema** Sia  $d \geq 1$  e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto regolare ( $\partial\Omega$  di classe  $C^1$  e compatta).

Allora

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \text{Tr} u = 0$$

↑
↑

estesa a 0
traccia su  $\partial\Omega$

①
②
③

**Dim.** ①  $\Rightarrow$  ② è vero anche se  $\Omega$  è arbitrario

③  $\Rightarrow$  ③ Continuità della traccia (basta usare che le approx. della definizione sono nulle su  $\partial\Omega$ )

②  $\Rightarrow$  ① Per le solite storie, basta fare il conto nel caso modello  $\Omega = \mathbb{R}_+^d$ .

Sotto-enunciato: se  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$  e la sua estesa sta in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ , allora in realtà  $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ .

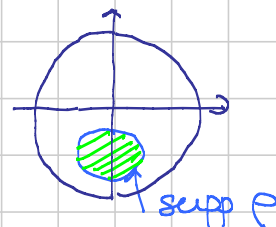
Quello che devo fare è approx  $u$  con funzioni  $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$

Le classiche convoluzioni sembrano andare male, ma è solo perché considero nuclei simmetrici centrati nell'origine



Se considero  $\rho$  nucleo di convoluzione

In questo modo  $\hat{u} * \rho_\delta$  si annulla in un intorno della zona di confine  $x_d = 0$ .  
Quindi  $\hat{u} * \rho_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$



e converge addirittura su tutto  $\mathbb{R}^d$  a  $\hat{u}$ .

③  $\Rightarrow$  ② (basta per concludere). Devo dim. che  $\text{Tr } u = 0 \Rightarrow \hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ , cioè

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \quad \leadsto \text{Questa sarebbe vera se } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$$

In generale non è vera, ma è vero che

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \text{Tr } u \cdot \varphi$$

— 0 — 0 —  $\overset{u}{0}$  perché  $\text{Tr } u = 0$

Riassumendo:

- se  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  valgono le immersioni di Sobolev senza ulteriori ipotesi su  $\Omega$
- se in aggiunta  $\Omega$  è limitato, allora le immersioni sono pure compatte.
- Se in aggiunta  $\text{meas}(\Omega)$  è finita, allora quando si sta in  $L^{p^*}$  si sta in  $L^q$  con  $q < p^*$ .

**Disuguaglianza di POINCARÉ** (Enunciato diseolucativo)

$d \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto QUALUNQUE con  $\text{meas}(\Omega) < +\infty$ ,  $p \in [1, +\infty]$ .

Allora per ogni  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  vale

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, d, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

**Dim** (diseolucativa) Nel caso  $p < d$

Dalle immersioni deduco che

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Essendo su un limitato

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega, d) \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

Solito Hölder:

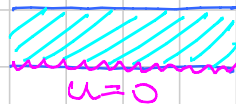
$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \cdot 1 \, dx \leq \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^{p \cdot \frac{p^*}{p}} \, dx \right\}^{\frac{p}{p^*}} \cdot \{\text{meas}(\Omega)\}$$

conjugato di  $\frac{p^*}{p}$  ↑ ...

Faccio la radice  $p$ -esima e concludo.

Oss. Non serve a nulla che  $\text{meas}(\Omega) < +\infty$ .  
 Serve abbastanza zona di annullamento abbastanza vicina !!

Esempio classico  $\mathbb{R} \times (0,1)$



$$u(x,y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) dt$$

$$|u(x,y)| \leq \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right| dt \leq \left\{ \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right|^p dt \right\}^{1/p} \cdot y^{1/p}$$

$$\leq \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right|^p dt \right\}^{1/p} \leq 1$$

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x,y)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,t) \right|^p dt \leq \|\nabla u\|_{L^p}^p$$

Integrando a sx in  $(0,1)$  ottengo

$$\|u\|_{L^p(\text{striscia})} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\text{striscia})}$$



## Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 41

Note Title

19/11/2018

Disuguaglianza POINCARÉ

$d \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto con  
 $\text{meas}(\Omega) < +\infty$  (ma non serve davvero)

Allora

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Disug. POINCARÉ - SOBOLEV

Ipotesi come sopra

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$\forall q \leq p^*$$

Nella presentazione assumiamo  $p < d$ , quindi  $p^*$  ha senso. Ma  
 $\rightarrow$  per  $p = d$  funziona quasi uguale  
 $\rightarrow$  per  $p > d$  è tutto più semplice

Dim. Possiamo assumere  $u \in C_c^\infty(\Omega)$  e quindi pure di  $\mathbb{R}^d$ .

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(q, p^*, \Omega) \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq$$

$$\uparrow$$

$$q \leq p^*$$

$$+ \text{meas}(\Omega) < +\infty$$

$$\leq C(q, p^*, \Omega) \cdot C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\uparrow$$

immersione di Sobolev

in versione pura che vale se  $u$  ha spt. cpt.

— o — o —

Oss. L'esempio in cui  $\Omega = \mathbb{R} \times (0,1)$  mostra che  
 si può fare a meno in certi casi  
 di  $\text{meas}(\Omega) < +\infty$

— o — o —

**POINCARÉ - WIRTINGER**  $d \geq 1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  aperto.

Supponiamo che

(i)  $\Omega$  è limitato

(ii)  $\Omega$  è regolare ( $\partial\Omega$  cpt. +  $C^1$ )

(iii)  $\Omega$  è connesso.

} o quanto serve per  
avere teo. di immersione  
cpt.

Allora

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

senza 0

dove

$$u_\Omega := \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_{\Omega} u(x) dx = \text{media di } u \text{ in } \Omega$$

Oss. Se  $\Omega$  non è connesso, allora è banalmente falso

Dim. Step 1 Posso supporre  $u_\Omega = 0$ . Altrimenti basta considerare  $v := u - u_\Omega$

Posso supporre anche che  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$  (se è  $= 0$  è banale, altrimenti divido e uso che LHS e RHS sono 1-homog.)

Step 2 Considero

$$\min \left\{ \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} : \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1, \int_{\Omega} u(x) dx = 0 \right\}$$

Se dimostro che il minimo esiste ed è  $> 0$ , allora ho finito, perché la disug. vale con

$$C(p, \Omega) := \frac{1}{\min}$$

Step 3 Con il metodo diretto mostriamo che min. esiste.

- Compattzza dei sottolivelli Sia  $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$  una successione tale che

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1, \quad \int_{\Omega} u_n(x) dx = 0, \quad \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M$$

Dalla prima e terza deduciamo che  $\{u_n\}$  è limitata in  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Grazie a limitatezza e regolarità di  $\Omega$  vale il teo. di immersione compatta, cioè esiste

$$u_{n_k} \rightarrow u_{\infty} \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

A meno di estrarne ulteriormente, avremo che

$$\nabla u_{n_k} \rightharpoonup \nabla u_{\infty} \quad \text{in } L^p(\Omega) \text{ debole}$$

- Semicontinuità

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}(x)|^p dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u_{\infty}(x)|^p dx$$

e questo segue dalla convessità della norma  $p$ -esima di un vettore

- Passaggio al limite delle cond. aggiuntive : quasi gratis

$$1 = \|u_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow \|u_{\infty}\|_{L^p(\Omega)} = 1$$

$$\int_{\Omega} u_{n_k}(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} u_{\infty}(x) dx$$

conv. puntuale per s.succ.  
dominata quanto basta

Quindi il min. esiste.

Step 4 Resta da dim. che  $u_{ii} \neq 0$ .

Se fosse 0, esisterebbe  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  t.c.

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = 0 \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} u = 0$$

Dalla prima vonni dedurre che  $u = \text{costante}$ , e a quel punto è incompatibile con 2ª e 3ª.

Questo è vero come fatto generale: se  $\nabla u \equiv 0$  quasi ovunque e  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , allora  $u$  è loc. costante.

La maniera più rapida di dimostrarlo è per approx, considerando  $u * \rho_{1/m}$  dopo aver esteso  $u$  a 0 fuori di  $\Omega$  e osservato che su  $\Omega' \subset \subset \Omega$  il gradiente della convoluzione è la convoluzione dei gradienti.  
(Anche la approx della def. 4 vanno bene).

### POINCARÉ - SOBOLEV - WIRTINGER

Stesse ipotesi della precedente (quindi 3ª su  $\Omega$ ).

Allora

$$\|u - u_{\Omega}\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

senza 0

$$\forall q \leq p^*$$

Dim. Riciclando la dim. precedente ai suoi problemi per  $q = p^*$  (non valgono le immersioni compatte).

Come prima supponiamo media nulla.

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \{ \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \}$$

↑  
immersione  
Sobolev con  
RHS con full norm

Il primo addendo nel RHS lo so stimare  
per la Poincaré - Wirtinger  
e quindi

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Il caso  $q < p^*$  si può fare a scelta

→ ripetendo la dim. e usando Rellich

→ per interpolazione, sfruttando che vale per  $q=p$  e per  
 $q=p^*$ . (Vale anche per  $q < p$ ).

— o — o —

## Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 42

Note Title

19/11/2018

"Esercizio" Sia  $d \geq 1$ , sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ragionevole.  
 Risolvere

$$\begin{cases} \Delta u = \sin u & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \text{funzione assegnata} \end{cases}$$

Formulazione variazionale

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 - \cos u(x) \, dx : u \in H^1(\Omega) \right\} \\ + \text{B.C.}$$

Visto precedentemente: se  $u$  è abbastanza regolare e minimizza il funzionale rispetto a perturb.  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ , allora

$$\rightarrow \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx + \int_{\Omega} \sin(u(x)) v(x) \, dx = 0$$

$F(u+tv)$  e derivo in  $t=0$

$\rightarrow$  con un po' più di regolarità si ottiene  $\Delta u(x) = \sin u(x)$  in  $\Omega$

Per il 1° passaggio basta  $u \in H^1$

$$F(u+tv) = F(u) + t \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 \\ - \int_{\Omega} \cos(u+tv(x))$$

Il 1° passo è un pol., il secondo si deriva sotto il segno di  $\int$

Come si trattano le B.C.?

$u|_{\partial\Omega}$  è la traccia di  $u$  su  $\partial\Omega$ , che per  $\Omega$  decente sappiamo definire.

Grosso problema: la traccia è sing. solo su posti strani

[ per la cultura:  $\text{Tr}: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$   
 è surgettiva per  $\Omega$  decente ]

Uscita classica: scelgo  $u_0$  data (che assumo faccia quello che voglio sul bordo) e impongo

$$u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

È come dire che  $\text{Tr } u = \text{Tr } u_0$ .

Esistenza del minimo Metodo diretto classico.

Compattezza Sia  $\{u_n\} \subseteq H^1(\Omega)$  tale che

$$F(u_n) \leq M \quad + \quad \text{B.C.}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx \leq M' \quad (\text{cos è limitato e } \text{meas}(\Omega) < +\infty)$$

quindi esiste  $n_k$  t.c.  $\nabla u_{n_k} \rightharpoonup$  q.c. debole  $L^2(\Omega)$ .

Serve qualcosa che limiti le funzioni.

$$\|u - u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \underbrace{c \|\nabla(u - u_0)\|_{L^2(\Omega)}}_{\substack{\text{Poincaré} \\ (\text{serve } \text{meas}(\Omega) \text{ finita})}} \leq \underbrace{c \|\nabla u\|_{L^2}}_{\substack{\text{pass.} \\ \text{prec.}}} + \underbrace{c \|\nabla u_0\|_{L^2}}_{\text{data}}$$

Se  $\Omega$  è pure limitato valgono le immersioni rpt. e quindi, a meno di s.succ.

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{forte } L^2(\Omega) \quad (\text{e volendo in } L^q \text{ con } q \leq 2^*)$$

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u_\infty \quad \text{debile } L^2(\Omega)$$

Fortunatamente, per la continuità delle tracce,  $Tr u_n \rightarrow Tr u_\infty$  che è quindi sempre la stessa.

$$(\text{sublemma: } u_n - u_0 \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow u_n - u_0 \in H_0^1(\Omega))$$

### Semicontinuità

- Parte di gradiente: convessità (o fatto che è usua)
- Parte di funzione: convergenza dominata.

Conclusione: esiste il minimo in  $H^1 + \text{B.C.}$  e questo verifica ELE nella forma integrale

$$-\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = \int_{\Omega} \text{siu}(u(x)) \varphi(x) dx$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Resta "solo" il problema della regolarità



Def. Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  aperto e sia  $f \in L^2(\Omega)$ .

Si dice  $u \in H^1(\Omega)$  è sol. debole  $\uparrow\uparrow$

dell'eq.  $\Delta u = f$  in  $\Omega$   
se vale

$$-\int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

PRIMO ENORME PASSO  $H^1 \rightsquigarrow H^2$

Teorema Se  $\Omega$  è decente e  $u$  è sol. debole, allora  
 $u \in H^2(\Omega)$  e vale

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Oss. Il guadagno è esagerato. Sto assumendo come ipotesi

$$u_{xx} + u_{yy} \in L^2 \quad (\text{con 2 variabili})$$

e come tesi voglio  $u_{xx} \in L^2$ ,  $u_{yy} \in L^2$  e anche  $u_{xy} \in L^2$

Morale ultrabrutale: se controllo  $x^2 + y^2$ , allora  
controllo  $x^2, y^2$  ma pure  $xy$ .

Corollario Stesse ipotesi e in più  $f \in H^k(\Omega)$   
Allora  $u \in H^{k+2}(\Omega)$  e vale

$$\|u\|_{H^{k+2}} \leq c \|f\|_{H^k}$$

Dando per buoni i 2 enunciati, la soluzione di

$$\Delta u = \sin u$$

trovata sopra in  $H^1$  diventa  $C^\infty$ .

•  $\sin u(x) \in L^2$  lo chiamo  $f$  e con il teo. ottengo

$$u \in H^2$$

• se  $u \in H^2$ , allora  $\sin u \in H^2$ : lo chiamo  $f$  e ottengo  $u \in H^4$

• per bootstrap ottengo  $u \in H^k$  per ogni  $k$ , e per  $k$  abbastanza grande abbiamo le immersioni in tutti gli spazi  $C^m$  che vogliamo.

Variante

$$\Delta u = u^{33}$$

$$\leadsto \min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{34} u^{34} + \text{B.c.} \right\}$$

Esistenza ed unicità del min.  $\leadsto$  gratis (metodo diretto)

Per la regolarità, purtroppo il RHS sta solo in  $L^{\frac{34}{33}}$

Due vie d'uscita

$\rightarrow$  fare teo. regolarità con  $L^p \leadsto W^{2,p}$  (DURISSIMA)

$\rightarrow$  sperare in argomento troncamento che dia  $u \in L^\infty$ .

## Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 43

Note Title

22/11/2018

**REGOLARITÀ ELLITTICA**

Varie tipologie di eq. di crescente complessità

**1 Equazioni lineari****1.1 Eq. lineare basic**

• Equazione

$$\Delta u = f(x)$$

$$Du = \nabla u$$

• Lagrangiana

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} |p|^2 + s f(x)$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 + u f(x)$$

• Formulazione debole

$$-\int_{\Omega} \langle Du(x), D\varphi(x) \rangle dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

la forma integrale di ELE del funzionale associato

**1.2 Equazione lineare più generale**

• Equazione

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f(x)$$

↑ piccolo abuso di notazione: si pensa  $Du$  come una riga

dove  $A: \Omega \rightarrow M_{d \times d}$  simmetriche.

L'equazione si dice ellittica se esiste  $\nu > 0$  tale che

$$A(x) \geq \nu Id \quad \forall x \in \Omega$$

• Lagrangiana:  $L(x, s, p) = \frac{1}{2} \langle A(x)p, p \rangle + s f(x)$



## 2 Equazioni SEMI-LINEARI

Modello  $\Delta u = g(x, u)$   $\Delta u = g(x, u, Du)$

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = g(x, u, Du)$$

Morale: il LHS è come nelle lineari, il RHS è non lineare  
 $\uparrow$  parte principale (quella con le derivate di ordine superiore)

Caso classico: ELE del funzionale con

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} |p|^2 + G(x, s)$$

$\uparrow$  primitiva di  $g(x, s)$  rispetto ad  $s$

Morale: il funzionale è quadratico nella parte di derivata (gradiente) e orbitario nella parte di funzione.

## 3 Equazioni QUASI-LINEARI

$$\operatorname{div}(A(x, u, Du) Du) = g(x, u, Du)$$

$\uparrow$  c'è della non-linearità nella parte principale

(ELE) di roba del tipo

$$L(x, s, p) = \varphi(p) + G(x, s)$$

$\uparrow$  stretta convessa o con Hessiano  $\geq \nu \operatorname{Id}$

## 4 Equazioni FULLY-NONLINEAR

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0$$

$\uparrow$  matrice Hessiana

(ad esempio la somma dei 2018 più grandi autovalori di  $D^2u$ )

Generalità sui teoremi di regolarità

$\Delta u = f$

Due tipi :  $\rightarrow$  regolarità interna :  $f \in \text{Spazio}_{\text{loc}} \Rightarrow D^2 u \in \text{Spazio}_{\text{loc}}$   
 $\rightarrow$  regolarità fino al bordo : stessa cosa senza loc.

Tipi di teorema nel caso modello

$\Delta u = f$

$$\begin{array}{ll} f \in L^2_{\text{loc}} & \Rightarrow D^2 u \in L^2_{\text{loc}} \\ f \in L^2 & \Rightarrow D^2 u \in L^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{TEORIA} \\ L^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f \in L^p_{\text{loc}} & \Rightarrow D^2 u \in L^p_{\text{loc}} \\ f \in L^p & \Rightarrow D^2 u \in L^p \end{array} \quad \begin{array}{l} p \in (1, +\infty) \\ \text{TEORIA} \\ L^p \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f \in C^{0,\alpha} & \Rightarrow u \in C^{2,\alpha} \\ f \in C^{k,\alpha} & \Rightarrow u \in C^{k+2,\alpha} \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha \in (0,1) \\ \text{STIME DI} \\ \text{SCHAUDER} \end{array}$$

(con o senza loc)

$$\begin{array}{ll} f \in C^k & \Rightarrow u \in C^{k+2} \\ f \in L^\infty & \Rightarrow D^2 u \in L^\infty \\ f \in L^1 & \Rightarrow D^2 u \in L^1 \\ f \in \text{Lip} & \Rightarrow D^2 u \in \text{Lip} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{QUESTE SONO} \\ \text{TUTTE} \\ \text{FALSE} \end{array}$$

— o — o —

Fatto decisivo : la regolarità per l'eq. di Poisson si applica al caso SETTI-LINEARE

Esempio  $\Delta u = \arctan u$  in  $\Omega$  (limitato)

Se  $u \in H^1(\Omega)$  è soluzione debole, allora  $u \in C^\infty(\Omega)$   
 $\uparrow$   
 qui posso mettere loc

Pongo  $f(x) = \arctan u(x)$  e osservo che  $f \in L^2(\Omega)$   
 quindi  $u \in H^2(\Omega)$  (ho guadagnato derivate seconde)

Ora  $f(x) \in H^2(\Omega)$ , quindi  $u \in H^4(\Omega)$

(Se vale la teoria  $L^2$  re-iterata:  $f \in H_{loc}^k \Rightarrow D^2 u \in H_{loc}^{k+2}$ )

Di questo passo  $u \in H^k(\Omega)$  per ogni  $k$  e questo per le immersioni di Sobolev garantisce  $C^\infty$ .

— o — o —

Teorema (Regolarità  $L^2$  interna)

Consideriamo l'eq. div. più generale

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f$$

in un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ .

Supponiamo che

(i)  $A(x)$  sia unif. ellittica ( $A(x) \geq \nu \operatorname{Id}$ )

(ii)  $A \in C^1(\Omega)$

(iii)  $f \in L_{loc}^2(\Omega)$

(iv)  $u \in H_{loc}^1(\Omega)$  sia soluzione debole

Allora  $u \in H_{loc}^2(\Omega)$  e per ogni  $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$  vale

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega')} \leq c(\nu, \Omega', \Omega'') \{ \|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|u\|_{H^1(\Omega'')} + \|A\|_{C^1(\Omega'')} \}$$

Versione iterata Stessa cosa con  $A \in C^{k+1}(\Omega)$ ,  $f \in H_{loc}^k(\Omega)$  e da tesi è  $u \in H_{loc}^{k+2}(\Omega)$

## Ist. Analisi Matematica —

## LEZIONE 44

Note Title

22/11/2018

Teorema (Regolarità  $L^2$  fino al bordo per DBC)  
 Consideriamo l'equazione lineare

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f$$

in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

Supponiamo che

(i)  $A(x)$  unif. ellittica

(ii)  $A \in C^1(\operatorname{Clos}(\Omega))$

(iii)  $f \in L^2(\Omega)$   $\uparrow \uparrow$

(iv)  $u \in H_0^1(\Omega)$  soluzione debole  
 $\uparrow \uparrow$  DBC

(v)  $\partial\Omega$  compatta e di classe  $C^2$ .

Allora  $u \in H^2(\Omega)$  e vale la stima che uno si aspetta

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\nu, \Omega) \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|A\|_{C^1(\bar{\Omega})} \}.$$

Oss. Anche di questo vale una versione re-iterata.

REGOLARITÀ INTERNA: CASO BASIC

Proposizione Siano  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  e  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  t.c.

$$\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^d$$

Allora vale

$$\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq d \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$



Dim. Per prepararci al futuro passo della formulazione debole

$$-\int \langle Du, D\varphi \rangle dx = \int f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Dato  $k \in \{1, \dots, d\}$  uso  $\varphi = u_{x_k} x_k$

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du, Du_{x_k} x_k \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} f u_{x_k} x_k dx$$

Il RHS lo stimo con C.S.

$$\text{RHS} \leq \|f\|_2 \cdot \|u_{x_k} x_k\|_2 \leq \|f\|_2 \cdot \|Du_{x_k}\|_2$$

↑  
Qui ci sono tutte le  
derivate seconde del  
tipo  $u_{x_k x_i}$

Nel LHS integro per parti e ottengo

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du_{x_k}, Du_{x_k} \rangle dx = \|Du_{x_k}\|_2^2$$

Mettendo insieme trovo

$$\|Du_{x_k}\|_2^2 \leq \|f\|_2 \cdot \|Du_{x_k}\|_2$$

Semplificando ottengo

$$\|Du_{x_k}\|_2 \leq \|f\|_2$$

tutte le derivate seconde di  $u$   
a cui ho derivato rispetto ad  $x_k$

Dal momento che vale per ogni  $k$  ho la tesi.

— 0 — 0 —

Esempio Tocchiamo con mano nel caso  $d=2$ .

$$u_{xx} + u_{yy} = f$$

Formulazione debole:

$$-\int (u_x \varphi_x + u_y \varphi_y) dx dy = \int f \varphi dx dy$$

Prendo  $\varphi = u_{xx}$  e ottengo

$$-\int (u_x u_{xxx} + u_y u_{xxy}) = \int f u_{xx}$$

$\parallel \leftarrow$  scarico una  $x$

$$= \int u_{xx}^2 + u_{xy}^2 = \int f u_{xx} \leq \|f\|_2 \left( \int u_{xx}^2 \right)^{1/2} \\ \leq \|f\|_2 \left( \int u_{xx}^2 + u_{xy}^2 \right)^{1/2}$$

Scegliendo  $\varphi = u_{yy}$  guadagno stima su  $u_{yy}$

Proposizione 2 Come sopra (fatto  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ) ma l'eq. è

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f$$

Dim Partiamo dalla formulazione debole

$$-\int_{\mathbb{R}^2} \langle A(x) Du, D\varphi \rangle = \int f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

e scegliamo  $\varphi = u_{xx}$ . Come prima

$$\text{RHS} \leq \|f\|_2 \cdot \|Du_{xx}\|_2$$

Al LHS troviamo

$$- \int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x) Du, Du_{x_k x_k} \rangle dx$$

$\uparrow$  scaricare

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \langle (A(x) Du)_{x_k}, Du_{x_k} \rangle dx$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \langle A_{x_k}(x) Du, Du_{x_k} \rangle dx}_{\geq -\|A\|_{C^1(\mathbb{R}^d)} \|Du\|_2 \|Du_{x_k}\|_2} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x) Du_{x_k}, Du_{x_k} \rangle dx}_{\geq \nu \int_{\mathbb{R}^d} \langle Du_{x_k}, Du_{x_k} \rangle dx}$$

$$= \nu \|Du_{x_k}\|_2^2$$

Mettendo insieme viene

$$\nu \|Du_{x_k}\|_2^2 \leq \|f\|_2 \cdot \|Du_{x_k}\|_2 + \|A\|_{C^1(\mathbb{R}^d)} \cdot \|Du_{x_k}\|_2 \|Du\|_2$$

Questo ci stima  $\|Du_{x_k}\|_2$  in termini di  $\|f\|_2$ ,  $\|Du\|_2$  (ok perché  $u \in H^1$ ) e norma  $C^1$  di  $A$ .

Prop. 3  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  qualunque,  $f$  e  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  soluz. di

$$\Delta u = f \quad (\text{ma vale anche per quella + gen.})$$

Allora per ogni  $\Omega' \subset \Omega'' \subset \bar{\Omega}$  vale

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega')} \leq c(\Omega', \Omega'') \{ \|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|u\|_{H^1(\Omega'')} \}$$

Dim. Sia  $\theta$  un cutoff tale che  $\theta \equiv 1$  in  $\Omega'$  e  $\theta \equiv 0$  fuori da  $\Omega''$

Pongo  $v(x) = u(x) \cdot \theta(x)$  e vedo cosa risolve

$$\Delta v = \Delta u \cdot \theta + u \Delta \theta + 2 \langle \nabla u, \nabla \theta \rangle$$

$$= f \cdot \theta + u \Delta \theta + 2 \langle \nabla u, \nabla \theta \rangle = \hat{f}$$

Ora so che  $\Delta v = \hat{f}$  su tutto  $\mathbb{R}^d$  quindi

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega')} = \|D^2 v\|_{L^2(\Omega')}$$

$$\leq \|D^2 v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leq d \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

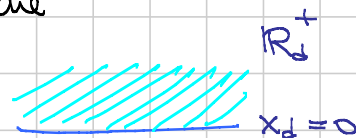
$$= d \|\hat{f}\|_{L^2(\Omega'')}$$

$$\leq C(\Omega', \Omega'') \{ \|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|u\|_{L^2(\Omega'')} + \|Du\|_{L^2(\Omega')} \}$$

Prop 4 (Caso basic di regolarità al bordo con DBC)

Siano  $u$  ed  $f$  in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Supponiamo che

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}_+^d \\ u(x_1, \dots, x_{d-1}, 0) &\equiv 0 \end{aligned}$$



$$\text{Allora } \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}$$

Dim. Funzionava quasi del tutto la dimostrazione prec.

Per  $k \in \{1, \dots, d-1\}$  uso nella def. di sol. debole  $\varphi = u x_k x_k$  e ottengo

$$\|Du x_k\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \quad k = 1, \dots, d-1$$

Questo stima tutte le derivate seconde tramite  $u_{x_d x_d}$   
 Ma

$$u_{x_d x_d} = \underbrace{\Delta u}_{f \in L^2} - \underbrace{\sum_{k=1}^{d-1} u_{x_k x_k}}_{\text{so già che stanno in } L^2 !!!}$$

Nella def. di sol. debole

$$-\int_{\Omega} \langle Du, D\varphi \rangle = \int f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$$

per approssimazione si estende a tutte le  $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$   
 A me basta che  $u_{x_k x_k} \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$

Ora  $H^1$  NO più, perché  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Questa si annulla su  $x_d = 0$  perché è la derivata della traccia che è identicamente nulla.

Per questo NON vale se  $k=d$ .

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 45

Note Title

23/11/2018

METODO DELLE TRASLAZIONI DI NIRENBERG (Rapp. increment.)Def. (Rapporto incrementale - Derivata discreta)Data  $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , dato  $R \in \mathbb{R}^d$  con  $R \neq 0$ , definiamo

$$D^R u(x) = \frac{u(x+R) - u(x)}{|R|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

(Oss.: si estende a  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega$  aperto per definire  $D^R u(x)$  solo per  $x \in \Omega' \subset \Omega$  e  $|R|$  abbastanza piccolo)

Caso interessante:  $R = \varepsilon e_i$  con  $\varepsilon \neq 0$  e  $e_i$  della base canonicaProp. (Proprietà di  $D^R$ ) L'operatore  $D^R$  ha la seguenti proprietà

(1) È lineare

(2) Vale una formula di integrazione per parti

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^R u(x) dx = + \int_{\mathbb{R}^d} D^{-R} \varphi(x) u(x) dx$$

tutte le volte che hanno senso gli integrali, ad esempio  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$  e  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ .

(3) Vale la formula quasi classica per il prodotto

$$D^R(uv)(x) = u(x) D^R v(x) + v(x+R) D^R u(x)$$

(4) se  $u$  è di Sobolev, allora  $D(D^R u) = D^R(Du)$ 

↑  
gradiente di  
Sobolev

Dim (1) Quasi ovvio

$$(2) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^{\alpha} u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \frac{u(x+\alpha) - u(x)}{|\alpha|} dx$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \underbrace{u(x+\alpha)}_y dx - \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) u(x) dx$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y-\alpha) u(y) dy$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-\alpha) u(x) dx$$

Mettendo insieme diventa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^{\alpha} u(x) dx &= \frac{1}{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(x-\alpha) - \varphi(x)) u(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} D^{-\alpha} \varphi(x) u(x) dx \end{aligned}$$

Oss. Se definisco le derivate discrete direzionali

$$D^{\varepsilon e_i} u(x) = \frac{u(x + \varepsilon e_i) - u(x)}{\varepsilon}$$

allora l'int. per parti ha il segno -

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^{\varepsilon e_i} u(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} D^{-\varepsilon e_i} \varphi(x) u(x) dx$$

(3) Solito trucco

$$\begin{aligned} \frac{u(x+\alpha) v(x+\alpha) - u(x) v(x)}{|\alpha|} &= \frac{u(x+\alpha) v(x+\alpha) - u(x) v(x+\alpha)}{|\alpha|} \\ &+ \frac{u(x) v(x+\alpha) - u(x) v(x)}{|\alpha|} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{u(x+a) - u(x)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} Du(x+a) - \frac{1}{\varepsilon} Du(x) \\ = D^a(Du)(x)$$

— o — o —

**Prop. importante** (Caratterizzazione dei Sobolev con i rapporti incrementali)

Sia  $d \geq 1$  e sia  $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$  e sia  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

Allora

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^d) \iff \text{esiste } M \in \mathbb{R} \text{ t.c.} \\ \|D^{\varepsilon e_i} u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq M \quad \forall \varepsilon \neq 0$$

Inoltre vale la disug.

$$\|D^{\varepsilon e_i} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

**Dim.**  $\Rightarrow$  Dimostriamo la stima da sotto.

Supponiamo  $u$  abbastanza regolare, ad esempio  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Allora ponendo  $a = \varepsilon e_i$

$$u(x+a) - u(x) = \psi(1) - \psi(0) \quad \psi(t) := u(x+ta) \\ = \int_0^1 \psi'(t) dt \\ = \int_0^1 \langle \nabla u(x+ta), a \rangle dt \\ = \varepsilon \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+ta) dt$$

Metto il valore assoluto

$$|u(x+a) - u(x)| \leq |\varepsilon| \cdot \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+ta) \right| dt \\ \leq |\varepsilon| \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+ta) \right|^2 dt \right\}^{1/2}$$



Faccio il  $\square$  e integro in  $dx$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x+\varepsilon) - u(x)|^2 dx &\leq |\varepsilon|^2 \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_0^1 dt \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+t\varepsilon) \right|^2 \\ &= |\varepsilon|^2 \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^d} dx \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\underbrace{x+t\varepsilon}_y) \right|^2 \\ &= |\varepsilon|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right|^2 dy \end{aligned}$$

Divido per  $\varepsilon^2$  e ho la tesi.

$\square$  Considero la succ.  $D^{\frac{1}{n}ei} u(x)$ . È limitata in  $L^2$ , quindi ha s.succ. conv., che non risolviamo

$$D^{\frac{1}{n}ei} u \rightarrow v \quad \text{debole in } L^2(\mathbb{R}^d)$$

Per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  vale

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^{\frac{1}{n}ei} u(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} u(x) D^{-\frac{1}{n}ei} \varphi(x) dx$$

$\downarrow$  conv. deb.  $\downarrow$  unif. a  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

Questo dice che  $v$  è  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  in senso w.

— o — o —

Esercizio Dimostrare che in realtà

$$D^{\frac{1}{n}ei} u \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^d) \text{ forte}$$

— o — o —

Teorema (Regolarità  $L^2$  su tutto lo spazio)

$d \geq 1$ ,  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$  sol. debole di

$$\Delta u = f.$$

Allora  $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$  e valgono le stime

$$\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq d \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Dim. Partiamo dalla def. di sol. debole

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du(x), D\varphi(x) \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Se vale  $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ , allora per approx. vale

$$\forall \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$$

Invece di moltiplicare per  $u_{x_k x_k}$  con  $k \in \{1, \dots, d\}$   
moltiplico per

$$\underbrace{D^{-R} D^R u(x)}_{\text{versione discreta di } u_{x_k x_k}} \quad \text{con } R = \varepsilon e_k$$

Il rhs si tratta al solito modo

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) D^{-R} D^R u(x) dx$$

$$\leq \|f\|_2 \cdot \|D^{-R} D^R u\|_2 \leq \|f\|_2 \|D(D^R u)\|_2$$

$\uparrow$  Prop. caratt.       $\uparrow$  tutto il gradiente

Vediamo il LHS:

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du(x), D(D^{-R} D^R u) \rangle dx$$

↖  
commuto derivate discrete e vere

$$= -\int_{\mathbb{R}^d} \langle Du(x), D^{-R} (D D^R u) \rangle dx$$

↑  
integrazione per parti

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \langle D^R Du(x), D D^R u(x) \rangle dx$$

↖

$$= \|D(D^R u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

Mettendolo insieme

$$\|D(D^R u)\|_2^2 \leq \|f\|_2 \cdot \|\cancel{D(D^R u)}\|_2$$

Questo dimostra (cavalcando nuovamente) che

$$\|D^R(Du)\|_2 \leq \|f\|_2$$

il che mostra che stanno in  $L^2$  tutte le derivate seconde di  $u$  che contengono una derivazione rispetto ad  $x_k$

Oss. Serve una integrazione per parti tra funzioni  $L^2$ , che fortunatamente funziona.

Per stimare tutte le derivate seconde servono i passaggi:

Oss. La stessa dimostrazione si usa la derivata al bordo nel caso del semispazio. Basta osservare che  $D^{-R} D^R u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$  se  $R = \sum \epsilon_i e_i$  e  $i \in \{1, \dots, d-1\}$

— 0 — 0 —

## Ist. Analisi Matematica

## LEZIONE 46

Note Title

23/11/2018

Teorema di regolarità fino al bordo nel caso di DBC

Noi sappiamo che vale su  $\mathbb{R}_+^d$ : se  $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$  e  $f \in L^2(\mathbb{R}_+^d)$ , allora

$$\|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \leq C(d) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}$$

Dim. Basta usare i rapp. curv. invece delle derivate seconde nelle stime a priori del caso regolare

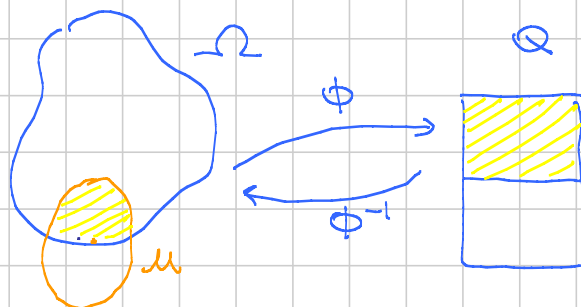
Oss. Questo vale per l'eq.  $\Delta u = f$ , ma anche per l'eq. + generale

$$\operatorname{div}(A(x) Du) = f$$

con  $A(x)$  matrice unif. ellittica e  $C^1(\overline{\mathbb{R}_+^d})$ .

Consideriamo ora aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  con  $\partial\Omega$  compatto e  $C^2$ . Voglio ottenere lo stesso risultato: se  $\Delta u = f$  e  $u \in H_0^1(\Omega)$  e  $f \in L^2(\Omega)$ , allora  $u \in H^2(\Omega)$  e

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \{ \|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1} \}$$

Dim.

**Step 1** Ricopro  $\partial\Omega$  con numero finito di aperti, consideriamo la part. dell'unità come un insieme di estensione.

Conclusione:  $u$  è somma di un numero finito di funzioni su ciascuna delle quali ha supporto in uno degli intorno del ricoprimento

Ognuno di questi pezzi risolve un'eq. del tipo

$$\Delta u_i = f_i$$

dove  $f_i$  è quella che viene fuori tenendo conto che

$$u_i = u \cdot \phi_i$$

↑  $i$ -esima funzione della partizione dell'unità

In ogni caso  $\|f_i\|_{L^2(\Omega)}$  si controlla con  $C(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}$

**Step 2** D'ora in poi supponiamo che  $\text{supp } u \subseteq \Omega$  e  $u=0$  su  $\partial\Omega \cap \Omega$ .

Idea: spostare  $u$  in  $\mathbb{Q}^+$  e vedere cosa risolve Poniamo

$$v(y) = u(\phi^{-1}(y))$$

Questa funzione è definita su  $\mathbb{Q}^+$  ed è nulla sul bordo di  $\mathbb{Q}^+$ .

Che cosa risolve  $v(y)$ ? Un'eq. simpatica del tipo

$$\text{div}(\hat{A}(y) Dv) = g$$

dove 
$$g(y) = \underbrace{f(\phi^{-1}(y))}_{f \text{ trasportata}} |\text{Det } J\phi^{-1}(y)|$$

$$\hat{A}(y) = A(\phi^{-1}(y)) \quad A(x) = [J\phi(x)] [J\phi(x)]^t \frac{1}{|\text{Det}(J\phi(x))|}$$

Se fosse così abbiamo finito.

Infatti la matrice  $\hat{A}(y)$  è ellittica

[ fatto generale :  $M$  matrice invertibile  $\Rightarrow MM^t \geq \nu Id$  ]

La regolarità  $C^2$  di  $\phi$  e  $\phi^{-1}$  garantiscono  $A \in C^1$ .

Inoltre

$$\|g\|_{L^2(Q^+)} \leq c(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

↑  
dipende  
da  $\phi$

Usando la regolarità in  $\mathbb{R}_+^d$  ottengo la regolarità  $H^2$  di  $v$  e tornando indietro quella di  $u$ .

Step 3 Verifichiamo che  $v$  risolve l'equazione data, cioè

$$-\int_{Q^+} \langle \hat{A}(y) Dv(y), D\psi(y) \rangle dy = \int_{Q^+} g(y) \psi(y) dy$$

Per ogni  $\psi \in C_c^\infty(Q^+)$  e anche  $\forall \psi \in C_c^2(Q^+)$ .

Poniamo  $\varphi(x) = \psi(\phi(x))$  e facciamo il conto

$$\int_{Q^+} g(y) \psi(y) dy = \int_{Q^+} \underbrace{f(\phi^{-1}(y)) |\det J\phi^{-1}(y)|}_{g(y)} \underbrace{\varphi(\phi^{-1}(y))}_{\psi(y)} dy$$

$$= \int_{\Omega \cap \Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

$u$  sd. deb. su  $\Omega \cap \Omega$

$$\downarrow$$

$$= - \int_{\Omega \cap \Omega} \langle Du(x), D\varphi(x) \rangle dx = (\star)$$

Voglio scrivere  $Du(x)$  in funzione di  $Dv$   
 $D\varphi(x)$  " " "  $D\psi$

$$u(x) = v(\phi(x)), \text{ quindi } Du(x) = Dv(\phi(x)) J\phi(x)$$

$$\varphi(x) = \psi(\phi(x)), \text{ quindi } D\varphi(x) = D\psi(\phi(x)) J\phi(x)$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \langle Du(x), D\varphi(x) \rangle &= Du(x) [D\varphi(x)]^t \\ &= Dv(\phi(x)) J\phi(x) [J\phi(x)]^t [D\psi(\phi(x))]^t \end{aligned}$$

Tornando all'integrale

$$\begin{aligned} (\star) &= - \int_{u \in \Omega} Dv(\phi(x)) A(x) [D\psi(\phi(x))]^t |\text{Det } J\phi(x)| dx \\ &= - \int_{Q^+} Dv(y) \underbrace{A(\phi^{-1}(y))}_{\hat{A}(y)} [D\psi(y)]^t dy \\ &= - \int_{Q^+} \langle A(y) Dv(y), D\psi(y) \rangle dy \end{aligned}$$

Questo mostra che  $v$  risolve quanto richiesto.

Oss. Se all'inizio partivo con  $\text{div}(B(x) Du) = f$ , andando a rileggere l'eq. in  $Q^+$  trovavo  $\text{div}(\hat{A}(y) Dv) = g$

dove

$$\hat{A}(y) = A(\phi^{-1}(y))$$

e

$$A(x) = \frac{J\phi(x) B(x) [J\phi(x)]^t}{|\text{Det}(J\phi(x))|}$$

e questa è ellittica se  $B$  è ellittica (esercizio di geom. l.)

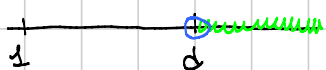
Morale: L'ellitticità si conserva per cambi di variabile.

Domanda (con risposta certa): basta considerare aperti  $\Omega$  che ammettono un 2-estender?

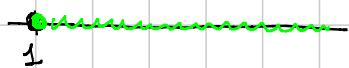
Si traduce in: se  $E_2 u$  è l'estesa, e  $u$  risolve  $\Delta u = f$  in  $\Omega$ , che cosa risolve  $E_2 u$ ?

— o — o —

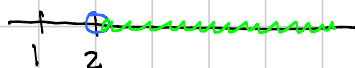
Ultima osservazione sui Sobolev  $W^{1,p}$



Posso definire valori puntuali  
(traccia in codim. 1)



Posso definire la traccia in codim. 1.



Posso definire la traccia in codim. 2

In generale per funzioni  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ : se  $p > k$ , allora posso definire una traccia in codim. di  $k$ .

Dom: esercizio !!! [hint nel video]

— o — o —