

A.A. 2018/2019
Istituzioni di Analisi Matematica
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01. Presentazione degli obiettivi del corso. Metodo indiretto nel calcolo delle variazioni: variazione di un funzionale lungo una curva, derivata secondo Gateaux. Metodo diretto nel calcolo delle variazioni: compattezza, semi-continuità, coercività, teorema di Weierstrass rispetto ad una nozione di convergenza.	6
Lezione 02. Introduzione al metodo indiretto nel calcolo delle variazioni. Forme integrali e differenziali della variazione prima. Equazione di Eulero-Lagrange. Studio esplicito di tre casi modello di funzionali integrali dipendenti da potenze della derivata. Caso di una Lagrangiana (strettamente) convessa dipendente dalla sola derivata.	12
Lezione 03. Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni e lemma di Du Bois Reymond (setting classico e setting Lebesgue): enunciato, possibili dimostrazioni, discussione di possibili varianti.	17
Lezione 04. Nascita delle condizioni al bordo per le equazioni di Eulero-Lagrange. Esempi che portano a condizioni di Dirichlet, di Neumann, e periodiche. Esempio con derivate di ordine superiore al primo.	22
Lezione 05. Equazione di Eulero-Lagrange per una Lagrangiana generale: forme integrali, forma differenziale classica, alla Du Bois Reymond, alla Erdmann per il caso autonomo. Discussione delle ipotesi di regolarità necessarie per le varie forme. Minimalità via convessità.	28
Lezione 06. Variazione prima di funzionali con integrali multipli: integrale di Dirichlet e Laplaciano, equazione di Eulero-Lagrange in forma di divergenza, derivata normale al bordo e nascita di condizioni al bordo di Neumann.	34
Lezione 07. Come dimostrare che un punto stazionario è un punto di minimo globale: utilizzo della convessità o di un opportuno funzionale ausiliario. Esempi di esistenza e non esistenza del minimo per una Lagrangiana non convessa dipendente dalla sola derivata. Discussione sullo spazio in cui ambientare i problemi di minimo.	40
Lezione 08. Variazione interna (orizzontale) di un funzionale integrale. Argomento di troncamento. Esempi finali di metodo indiretto.	46
Lezione 09. Introduzione agli spazi di Hilbert. Definizione di base Hilbertiana (sistema ortonormale completo). Ogni spazio di Hilbert separabile ammette una base Hilbertiana. Componenti di una vettore rispetto ad una base Hilbertiana. Rappresentazione di norma e prodotto scalare in termini di componenti: enunciato e lemmi utili per la dimostrazione.	51

Lezione 10. Dimostrazione della rappresentazione di norma e prodotto scalare in termini di componenti. Convergenza debole in spazi di Hilbert: definizione, prime proprietà, passaggio al limite nei prodotti scalari con una convergenza forte e una debole. Convergenza debole come convergenza delle componenti rispetto ad una base Hilbertiana.	57
Lezione 11. Semi-continuità della norma rispetto alla convergenza debole in uno spazio di Hilbert. Compattezza debole delle palle negli spazi di Hilbert separabili. Osservazione che non è lecito scambiare limiti e serie. Assoluta convergenza di serie in spazi di Banach. Accenno alle basi Hilbertiane in spazi non separabili.	64
Lezione 12. L^2 come spazio di Hilbert. Dimostrazione elementare della completezza dello spazio L^2 . Esempio di spazio di Hilbert non separabile. Esempio di successione di funzioni che converge debolmente ma non fortemente in L^2	69
Lezione 13. Derivata debole: definizione W (mediante integrazione per parti) vs definizione H (mediante approssimazione). Principali proprietà ed esempi. Dimostrazione che le derivate H -deboli sono derivate W -deboli. Definizione W di spazi di Sobolev in dimensione uno (su un intervallo).	74
Lezione 14. Definizione H (mediante approssimazione e mediante completamento astratto) di spazi di Sobolev in dimensione uno. Le funzioni di Sobolev sono le primitive delle loro derivate deboli. Dimostrazione che W è contenuto in H . Le funzioni di Sobolev sono Holderiane. Nella definizione H la convergenza delle funzioni è anche uniforme.	80
Lezione 15. Road map del metodo diretto: formulazione debole negli spazi di Sobolev, compattezza dei sottolivelli rispetto ad un'opportuna nozione di convergenza, semicontinuità, recupero della regolarità (passo iniziale e bootstrap). Primo esempio di applicazione.	86
Lezione 16. Discussione generale dei teoremi di semicontinuità per funzionali integrali (caso di uniforme convergenza e Lagrangiana continua, caso di convergenza debole e Lagrangiana convessa). Discussione generale delle strategie per mostrare la compattezza dei sottolivelli (come ottenere stime integrali sulle derivate e uniformi sulle funzioni).	92
Lezione 17. Approccio variazionale ai problemi al bordo per equazioni differenziali di ordine due: esistenza, regolarità, unicità sotto ipotesi di monotonia/convessità (dimostrata sia via unicità del punto di minimo, sia guardando direttamente l'equazione).	98
Lezione 18. Adattamento dell'approccio variazionale ad equazioni con diverse condizioni al bordo di tipo Dirichlet/Neumann. Regolarità della soluzione e stretta positività della derivata seconda della Lagrangiana rispetto alla velocità.	104
Lezione 19. Esempio motivazionale di funzionale con crescita non quadratica nella derivata. Definizione di convergenza debole in L_p . In spazi di misura finita la convergenza debole L^1 è la più debole di tutte. Per le successioni limitate è sufficiente testare la convergenza debole su un insieme con Span denso.	110

- Lezione 20.** Lemma di approssimazione monotona per funzioni convesse. Semicontinuità rispetto alla convergenza debole sotto ipotesi di convessità. Enunciato dei risultati di compattezza debole delle palle in L_p (con dimostrazione sotto ipotesi aggiuntive), ed in L_1 sotto ipotesi di crescita superlineare. Mancanza di coercività vs regolarità Holderiana della derivata dei minimi. 116
- Lezione 21.** Regolarità Holderiana ottimale per un problema senza stretta coercività. Esempio di non unicità per un problema di Dirichlet. Esempi di funzionali con competizione tra crescita rispetto alla derivata e rispetto alla funzione. 121
- Lezione 22.** Enunciato del metodo dei moltiplicatori di Lagrange in termini di variazione prima. Applicazione: disuguaglianza di Poincaré su un intervallo. Esempi basati su disuguaglianze di tipo Poincaré. 126
- Lezione 23.** Identità del parallelogrammo. Caratterizzazione delle norme derivanti da un prodotto scalare (Jordan-Fréchet-von Neumann). Proiezione su un convesso chiuso: esistenza, unicità, 1-Lipschitzianità, caratterizzazione. 130
- Lezione 24.** Separazione stretta (mediante iperpiani) di un punto da un convesso e di un convesso compatto da un convesso. Chiusura forte + convessità implica chiusura debole. Semicontinuità forte + convessità implica semicontinuità debole. Proiezione su sottospazi chiusi: linearità e caratterizzazione. Ortogonale di un sottospazio. Somme dirette ortogonali. 136

1st. An. Mat.

-

LEZIONE 01

Note Title

24/09/2018

Metodi introdotti nel XX secolo per i pbm. di analisi Matem.

Calcolo delle Variazioni $\nearrow$ Metodo indiretto
 $\searrow$ Metodo diretto

Eq. Deriv. Parziali (PDE) $\nearrow$ Eq. ellittiche
 $\searrow$ Eq. di Evoluzione

Teo. della Misura

Analisi Funzionale

Usiamo, ma vediamo
nulla $\rightarrow$ Sp. Vett. Top. $\rightarrow$ NULLA $\rightarrow$ Sp. di Banach $\rightarrow$ min. sindacale $\rightarrow$ sp. di Hilbert $\rightarrow$ ragionevole $\rightarrow$ sp. di SOBOLEV $\rightarrow$ BENE

— o — o —

Calc. delle Variazioni $\mathbb{X}$ insieme $F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Obiettivo: determinare

$$m = \min \{ F(x) : x \in \mathbb{X} \} \quad \leadsto \text{valore}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin} \{ F(x) : x \in \mathbb{X} \} &= \text{p.ti di min} \\ &= \{ x \in \mathbb{X} : F(x) = m \} \end{aligned}$$

(i pbm. di max. sono equivalenti)

Spesso $\mathbb{X}$ = spazio di funzioni = sp. di dim. infinita

Terminologia: $\rightarrow$ funzione

$\rightarrow$ funzionale (in partenza sp. di funz., in arrivo $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

$\rightarrow$ applicazione (di solito è lineare)

$\rightarrow$ operatore (di solito lineare)

$\rightarrow$ mappa

Sono tutti sinonimi, ma con retrogusto diverso
 — o — o —

METODO INDIRETTO Road map

$\rightarrow$ cerco di farmi un'idea di chi sono i candidati p.ti di min.

$\rightarrow$ dim. effett. che lo sono

Esempio (Analisi 2) Trovare

$$\min \{ x^2 - 2x + y^2 + 6y : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$\nabla f(x, y) = 0$$

$$2x - 2 = 0 \quad \leadsto x = 1$$

$$2y + 6 = 0 \quad \leadsto y = -3$$

Spero che $(1, -3)$ p.to di min.

$$\begin{aligned} \text{Rigoroso: } x^2 - 2x + y^2 + 6y &= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 10 \\ &= (x-1)^2 + (y+3)^2 - 10 \\ &\geq -10 \leftarrow \text{min.} \end{aligned}$$

con uguag. $\Leftrightarrow x=1$ e $y=-3 \leftarrow$ unico argmin.

METODO DIRETTO

→ Dim. che min esiste senza avere idea di dove si trova

→ Una volta che so che esiste, procedo con cond. nec.

Esempio (di prima)

Osservo che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$

e quindi per W. generalizzato (vedi Analisi 2) min. esiste.

Osservo che $f \in C^1$ e sono autorizzato a procedere come prima.

— o — o —

METODO INDIRETTO IN GENERALE

→ Derivata nel senso di GATEAUX

→ Equazione di Eulero - Lagrange (ELE)

$$F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$\uparrow$ insieme

$$x_0 \in X \text{ t.c. } F(x_0) \in \mathbb{R}$$



Prendo una qualunque curva $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow X$ t.c. $\gamma(0) = x_0$

Definisco $\varphi : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ come

$$\varphi(t) := F(\gamma(t))$$

Se esiste $\varphi'(0)$ (Analisi 1), dico che $\varphi'(0)$ è la variazione prima di F in x_0 lungo la curva γ .

$$\delta F(x_0, \gamma) := \varphi'(0)$$

Caso speciale X sp. affine con V sp. vett. di riferimento

Dato $x_0 \in X$ e $v \in V$ posso considerare $\gamma(t) := x_0 + t v$
e allora

$$\delta F(x_0, v) = \phi'(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \alpha v) - F(x_0)}{\alpha}$$

$\uparrow$ se esiste

var. 1^a di F in x_0 nella dir v

(der. direzionale = der. secondo Gateaux)

Teorema (ovvio) X insieme, $F: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funzionale
 $x_0 \in X$ p.to di minimo, $F(x_0) \in \mathbb{R}$.

Allora $\delta F(x_0, v) = 0$ per ogni v per cui esiste.

Nel caso speciale

$$\delta F(x_0, v) = 0 \text{ per ogni } v \in V \text{ per cui esiste}$$

(ELE)

$\uparrow$

vecchio " $\nabla f = 0$ "

— 0 — 0 —

METODO DIRETTO = teo. di WEIERSTRASS

$\leadsto \mathbb{R}^n$

$\leadsto$ sp. metrici

$\leadsto$ sp. topologici

$\leadsto$ sp. con NOZIONE DI CONVERGENZA (brutalmente: fare la Dista delle succ. conv. e relativi limiti).

Def. (Noz. di conv.) Sia X un insieme

$$\text{Succ}(X) = \{\text{successioni a valori in } X\} \\ = \{f: \mathbb{N} \rightarrow X\}$$

Una nozione di conv. è un sottoinsieme qualunque di

$$\text{Succ}(X) \times X.$$

Oss. Non faccio nessuna richiesta pensata sulla nozione, nemmeno le più ovvie (vedi video)

Def. Sia X insieme con nozione di conv.

- Un sottoinsieme $K \subseteq X$ si dice **COMPATTO** se per ogni $\{x_n\} \subseteq K$ esistono n_k succ. di interi strett. cresc. e $x_\infty \in K$ t.c.

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty$$

↑ rispetto alla nozione

- Una funzione $F: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si dice **semicont. inf.** (SCI o LSC) se per ogni $x_n \rightarrow x_\infty$ vale

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) \geq F(x_\infty)$$

Teorema (W.) Sia X insieme $\neq \emptyset$ e $F: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Supponiamo che esista una nozione di conv. in X t.c.

(i) X risulta compatto

(ii) F risulta SCI

Allora esiste per forza $\min \{F(x) : x \in X\}$.

Dim. Sia $I := \sup \{F(x) : x \in X\}$ (esiste sempre)
 Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una succ. sufficiente, cioè t.c.
 $F(x_n) \rightarrow I$

Per (i) esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ e quindi

$$I \leq F(x_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = I$$

$\uparrow$ def. di I $\uparrow$ SCI $\uparrow$ $F(x_n)$ è succ. di numeri reali con limite $\uparrow$ def. di x_n

Quindi $F(x_\infty) = I$, da questo momento $I \in \mathbb{R}$ ed
 è il min. (con $x_\infty \in \text{argmin}$).
 — o — o —

Def. Sdito setting. Allora F si dice coerciva se

$$\exists K \subseteq X \text{ compatto t.c. } \inf \{F(x) : x \in X\} = \inf \{F(x) : x \in K\}.$$

Teo. (W. generalizzato) X ed F come prima.

Supp. che esista nozione di conv. in X t.c.

(i) F è coerciva

(ii) F è SCI

Allora esiste min.

Dim. Ovvio 😊 : la battaglia per il min. si gioca in K .
 — o — o —

Oss. È difficile conciliare SCI e CPT

- Troppe succ. conv. $\rightsquigarrow$ CPT facile, SCI diff.
- Poche succ. conv. $\rightsquigarrow$ CPT diff., SCI facile.

— o — o —

Achtung! [Aggiunto dopo video] Aggiustare se/dove serve per sistemare casi banali (tipi insieme vuoti o funzioni che valgono sempre $+\infty$).

Ist. Au. Mat.

-

LEZIONE 02

Titolo nota

24/09/2018

Esempi classici di metodo indiretto

$$F(u) := \int_a^b u(x)^2 dx$$

$$G(u) := \int_a^b |u(x)| dx$$

$$H(u) := \int_a^b |u(x)|^{1/2} dx$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([a,b]) : u(a) = A, u(b) = B \}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 numeri dati

✗

Oss. ✗ è uno spazio affine con spazio di riferimento
 $V := \{ u \in C^1([a,b]) : u(a) = u(b) = 0 \}$

Data $u \in \mathcal{X}$ e $v \in V$ provo a calcolare $\delta F(u, v)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) := F(u+tv) &= \int_a^b u(x)^2 dx + 2t \int_a^b u(x)v(x) dx \\ &\quad + t^2 \int_a^b v(x)^2 dx \end{aligned}$$

$$\varphi'(0) = 2 \int_a^b u(x)v(x) dx$$

Se u è un p.to di min., allora deve essere $\delta F(u, v) = 0$
 cioè

$$\int_a^b u(x)v(x) dx = 0$$

$$\forall v \in V$$

(1^a forma ind.
di ELE)

Integro per parti (non so se $u \in C^2$, ma ME NE FREGO)

$$\left[u(x)v(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)v(x) dx = 0$$

I termini di bordo se ne vanno perché $v(a) = v(b) = 0$
 Resta

$$\int_a^b \ddot{u}(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V \quad \text{(2ª forma int. di ELE)}$$

Da questa vorrei dedurre che $\ddot{u}(x) = 0$ (dovrei dirlo, ma ME NE FREGO). Quindi deduco

$$\ddot{u}(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{(ELE in forma diff.)}$$

Quindi u è la retta che passa per $u(a) = A$ e $u(b) = B$.

Dim. Considero u_0 la retta giusta.

Osservo che u_0 soddisfa tutte le 3 forme di ELE.

Penso ora un altro competitor $w \in \mathbb{X}$ e osservo che

$$w = u_0 + v \quad \text{con } v \in V.$$

Lo stesso conto di prima mi dice che

$$\begin{aligned} F(w) = F(u_0 + v) &= \int_a^b \underbrace{\dot{u}_0^2}_{F(u_0)} + 2 \int_a^b \underbrace{\dot{u}_0 \dot{v}}_{\delta F(u_0, v)} + \int_a^b \underbrace{\dot{v}^2}_{\geq 0} \\ &\geq F(u_0) \end{aligned}$$

Quindi u_0 è un pto di minimo. Inoltre vale il segno = se e solo se

$$\int_a^b \dot{v}(x)^2 dx = 0$$

cioè $\Leftrightarrow \dot{v} \equiv 0 \Leftrightarrow v = \text{costante} = 0$ (per via delle BC)
 boundary conditions $\nearrow$

Ora sappiamo che la retta è l'unico pto di min.

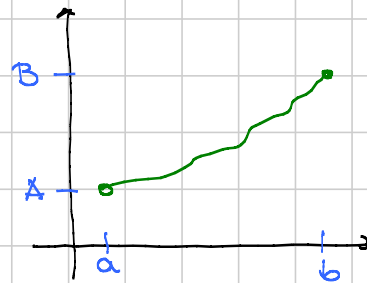
Facciamo ora il minimo per G assumendo WLOG che sia $B > A$.

Per ogni $u \in C^1$ con le BC vale

$$G(u) = \int_a^b |\dot{u}(x)| dx$$

$$\geq \int_a^b \dot{u}(x) dx$$

$$= u(b) - u(a) = B - A$$



Vale il segno di $=$ se e solo se $\dot{u}(x) \geq 0$ sempre in $[a, b]$
(dimostrarlo per bene)

Conseguenza: il min. esiste e tutte le funzioni non.
cresc. sono argmin.

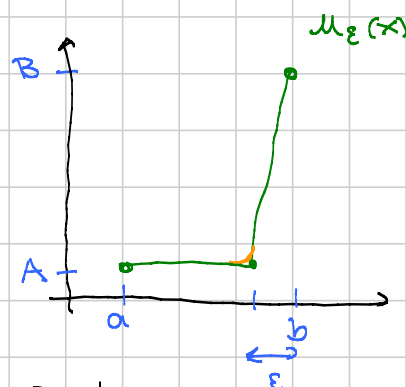
Passiamo ad $H(u) = \int_a^b |\dot{u}(x)|^{1/2} dx$

In questo caso il min non esiste e l'inf. è 0!!!

$u_\varepsilon(x)$ è costante fino a $b-\varepsilon$
e poi "sale alla fine"

$$H(u_\varepsilon) = \int_{b-\varepsilon}^b \left| \frac{B-A}{\varepsilon} \right|^{1/2} dx$$

$$= (B-A)^{1/2} \cdot \sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0^+$$



Ohw... non è C^1 ... ma posso fare un piccolo raccordino
fra $b-2\varepsilon$ e $b-\varepsilon$ pagando poco o nulla (verificare!)

Riassunto

- $F(u) \rightsquigarrow$ esistenza e unicità del min
 p^2 è strett. convessa 😊
- $G(u) \rightsquigarrow$ esistenza ma non unicità
 $|p|$ è conv. ma non strett. 😞 potenziali guai
- $H(u) \rightsquigarrow$ non esistenza e cose strane
 $|p|^{1/2}$ non è convessa 😞 guai GROSS!

Caso strett. convesso Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa strett.
 Consideriamo

$$F(u) := \int_a^b \psi(u(x)) dx$$

Allora la retta è l'unico pto di min. per il pbm

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([a,b]) : u(a) = A, u(b) = B \}$$

Dim. Supponiamo che ψ sia di classe C^2 . Allora per Analisi 1 vale la diseg.

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a)b \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$\text{con } = \text{se e solo se } b=0$$

(Taylor-Lagrange o funz. conv. sopra retta tangente)
 $\psi \in C^2$ $\psi \in C^1$

Sia u_0 la retta giusta e sia w un altro competitor.
 Allora

$$w = u_0 + v$$

↑
 $v(a) = v(b) = 0$

Solito conto:

$$\begin{aligned}
 F(w) - F(u_0 + v) &= \int_a^b \psi(\dot{u}_0(x) + \dot{v}(x)) dx \\
 &\geq \underbrace{\int_a^b \psi(\dot{u}_0(x)) dx}_{F''(u_0)} + \int_a^b \psi'(\dot{u}_0(x)) \dot{v}(x) dx \\
 &= \psi'(u_0) \int_a^b \dot{v}(x) dx \\
 &\quad \text{coeff.} \quad \uparrow \\
 &\quad \text{ang. retta} \\
 &= \psi'(u_0) (v(b) - v(a)) = 0 \\
 &\geq F(u_0)
 \end{aligned}$$

Ancora una volta: la retta è un p.to di min. (per qui ho usato solo la convessità)

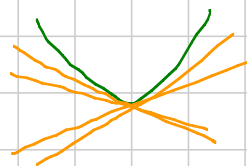
Se la conv. è stretta, allora vale e solo se $\dot{v}(x) \equiv 0$ da cui come prima $v(x) \equiv 0$.

Quindi in questo caso u_0 è l'unico p.to di min.

Sapendo bene Analisi 1, non ho usato che $\psi \in C^1$. Infatti per ogni convessa vale

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \mu b$$

$\uparrow$ qualunque elemento compreso tra derivata dx e sx di ψ in a
 (vedi Analisi 1)



e questo è quello che serve per concludere in entrambi i casi (conv. stretta o no)

Ist. Au. Mat.

—

LEZIONE 03

Note Title

27/09/2018

FLCV : Fundamental Lemma in the Calc. of Variations

DBR(L) : Lemma di Du Bois REYMOND

FLCV (Versione classica - C^0) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $f \in C^0(\Omega)$.
 Supponiamo che

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad (*)$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.
 $\uparrow$ a supporto compatto

Allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in \Omega$.

FLCV (Versione Lebesgue) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

Stessa ipotesi (N.B.: l'integrale
 ha senso).

Allora $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$.

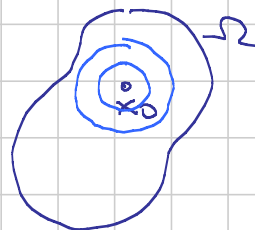
$L^1(\Omega')$ per ogni
 $\Omega' \subset\subset \Omega$

$\text{clos}(\Omega') \subset \Omega$
 $\uparrow$ compatto

Dim 1 classica Per assurdo supponiamo che esista $x_0 \in \Omega$
 tale che $\delta := f(x_0) > 0$ (wlog)

Allora esiste $r > 0$ t.c.

$$f(x) \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{per ogni } x \in B(x_0, r) \subset \Omega$$



Scelgo $\varphi \in C_c^\infty(B(x_0, r))$ tale che

(i) $\varphi(x) \geq 0$ per ogni $x \in B(x_0, r)$

(ii) $\varphi(x) = 1$ " " $x \in B(x_0, \frac{r}{2})$

È chiaro che $\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = \int_{B(x_0, r)} \dots > 0$.

Dim 2 classica

Idea brutale: se vale (*) per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, allora vale per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. A quel punto scelgo $\varphi = f$ e ottengo

$$\int_{\Omega} f(x) \cdot f(x) dx = 0 \quad \leadsto \quad f(x) \equiv 0.$$

Argomento di approssimazione: sia $f \in C^0(\Omega)$, sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ allora esiste una successione φ_n di funzioni $C_c^\infty(\Omega')$ tale che

(i) $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente per ogni $x \in \Omega'$

(ii) esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $|\varphi_n(x)| \leq M$ per ogni $x \in \Omega'$
per ogni $n \in \mathbb{N}$

A questo punto posso passare al limite per conv. dominata

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} f(x) \cdot f(x) dx &= \int_{\Omega'} f(x) \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega'} f(x) \cdot \varphi_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi_n(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Quindi $f(x) = 0$ q.o. in Ω' . Essendo Ω' arbitrario posso concludere.

— o — o —

Dim caso LEBESGUE Provo a riciclare la 2ª dim., cosa quasi immediata se f è L^2 , ma abbiamo assunto solo L^2_{loc}

Non mi tanto prendere $\varphi(x) = \text{sign}(f(x))$

Prendo qualunque $\Omega' \subset\subset \Omega$ e scelgo $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega')$ t.c.

- (i) $\varphi_m(x) \rightarrow \text{sign}(f(x))$ per q.o. $x \in \Omega'$
 (ii) $|\varphi_m(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \Omega'$ e ogni $m \in \mathbb{N}$

$$0 = \int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi_m(x) dx = \int_{\Omega'} f(x) \cdot \varphi_m(x) dx$$

$\uparrow$ Ω $\uparrow$ Ω'
 H^p $\varphi_m \in C_c^\infty(\Omega')$

$$\int_{\Omega'} |f(x) \varphi_m(x)| \leq |f(x)|$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} f(x) \cdot \text{sign}(f(x)) dx \\ &= \int_{\Omega'} |f(x)| dx \end{aligned}$$

Quindi $f(x) = 0$ per q.o. $x \in \Omega'$ che è arbitrario

Domanda : quanto posso indebolire la classe di funzioni test su cui richiedo che valga (*)

Posso limitarmi ad una classe V tale che $\text{Span}(V)$ sia "denso" in un opportuno senso in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Detto meglio:

per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ e per ogni $g: \Omega' \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ misurabile, esiste $\{\varphi_m\} \in \text{Span}(V)$ tali che

- (i) $\varphi_m(x) \rightarrow g(x)$ per q.o. $x \in \Omega$
 (ii) esiste M t.c. $|\varphi_m(x)| \leq M$ per ogni ...

Esempio Se $\Omega = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ posso usare

$$V = \left\{ \varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 7, \varphi^{(2018)}\left(\frac{1}{3}\right) = 5 \right\}$$

Lemma DBR $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $f \in C^0(\Omega)$ [$f \in L^1_{loc}(\Omega)$]

Supponiamo che

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ t.c. $\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 0$

Allora $f(x)$ è loc. costante in Ω (cioè costante sulle comp. connesse) Dopo video: NO, è costante e basta!

[$f(x)$ coincide q.o. in Ω con una funt. loc. cost.]

Idea fondamentale: se $f(x)$ soddisfa l'ipotesi, allora anche $f(x) + c$ soddisfa l'ipotesi.

Scelgo c in maniera tale che

$$\int_{\Omega} (f(x) + c) dx = 0$$

e a quel punto uso $\varphi(x) = f(x) + c$

Dim Supponiamo Ω connesso e prendiamo $\Omega' \subset\subset \Omega$ (posso anche supporre Ω' sia una palla).

Scelgo c in modo che

$$\int_{\Omega'} (f(x) + c) dx = 0$$

Approssimo $\int_{\Omega'} (f(x) + c)$ con funzioni $C_c^\infty(\Omega')$ a media nulla. Idea per farlo

→ approssimo frequendamente della media con $\varphi_m(x)$

→ osservo che

$$\int_{\Omega'} \varphi_m(x) dx \rightarrow 0$$

→ scelgo $\psi \in C_c^\infty(\Omega')$ con integrale positivo
 → congegno prendendo

$$\hat{\varphi}_m(x) := \varphi_m(x) + c_m \psi(x)$$

Giusta osservazione: questa funziona se $f(x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$
 perché in questo caso posso approssimare $f(x) + c$.

Nel caso generale ... ci pensiamo ...

— o — o —

Dopo video: nel caso $f \in L^1_{loc}$ scelgo c t.c. $f(x) + c$ abbia media nulla in Ω'
 e d t.c. $\text{sign}(f(x) + c) + d$ abbia pure lei media nulla in Ω' . Poi approssimo
 quest'ultima.

— o — o —

Corollario $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $f \in L^2((a, b))$.

Supponiamo che

ma basta L^1_{loc} , of course.

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((a, b))$$

Allora $f(x)$ è costante (q.o.) in (a, b) .

Dim. abusiva Integro per parti e applico FLCV

$$0 = \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx$$

$$\leadsto f'(x) \equiv 0 \leadsto f(x) = \text{costante}$$

Oss. fondamentale

$$\{ \psi \in C_c^\infty((a, b)) : \int_a^b \psi(x) dx = 0 \} = \{ \varphi' : \varphi \in C_c^\infty((a, b)) \}$$

A questo p.to uso DBR.

[La dim. dell'osservazione è fare la primitiva o derivare
 a seconda dell'inclusione che vogliamo dim.]

— o — o

Ist. Au. Matem.

—

LEZIONE 04

Note Title

27/09/2018

Nascita delle condizioni al bordo

$$F(u) := \frac{1}{2} \int [\ddot{u}^2 + u^2] dx$$

Esempio 1 $\min \{ F(u) : u \in C^4([0,2]) : u(0)=3, u(2)=7 \}$

$$\begin{aligned} F(u+tv) &= \frac{1}{2} \int (\ddot{u} + t\ddot{v})^2 + (u+tv)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (\ddot{u}^2 + u^2) + t \int_0^2 \ddot{u}\ddot{v} + u\ddot{v} + \frac{t^2}{2} \int_0^2 \ddot{v}^2 + v^2 \\ \delta F(u,v) &= \int_0^2 [\ddot{u}(x)\ddot{v}(x) + u(x)v(x)] dx \end{aligned}$$

per ogni $v \in C^4([0,2])$ t.c. $v(0)=v(2)=0 \rightsquigarrow V$

ELE 1ª forma int. $\int_0^2 (\ddot{u}\ddot{v} + u\ddot{v}) dx = 0 \quad \forall v \in V$

ELE 2ª forma int. $\int_0^2 (-\ddot{u}v + uv) dx = 0 \quad \forall v \in V$

$$\int_0^2 (-\ddot{u} + u)v dx = 0 \quad \forall v \in V$$

FLCV $\Rightarrow -\ddot{u}(x) + u(x) \equiv 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u \\ u(0) &= 3 \\ u(2) &= 7 \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto eq. diff. di ordine 2 con 2 condizioni al bordo. La soluz. generale di $\ddot{u}=u$ dipende da 2 parametri e con due cond. c'è ragionevole speranza di determinarli univocamente.

Achtung! Non è un p.m. di Cauchy, quindi NON ci sono teoremi di esistenza ed unicità.
Può succedere di tutto

Esempio $\ddot{u} = -u$
 $u(0) = 0$
 $u(\pi) = 0$ $\leadsto u(t) = a \sin x$ è sol. $\forall a$

$\ddot{u} = -u$
 $u(0) = 0$
 $u(\pi) = 1$ $\leadsto$ NON esistenza
 (le sol. dell'eq. sono comb. lin. di $\sin x$ e $\cos x$)

Nell'esempio di sopra si verifica che c'è esistenza ed unicità, e l'unica sol. è l'unico p.to di min.

$$F(u) = F(u_0 + v) = \dots$$

Esempio 2 $\min \{ F(u) : u \in C^1([0,2]) \quad u(0) = 3 \}$

Ora $V = \{ v \in C^1([0,2]) : v(0) = 0 \}$

Come prima arrivo a $\int_0^2 (\dot{u} \dot{v} + uv) dx = 0 \quad \forall v \in V$

Quando integro per parti

$$\underbrace{[\dot{u}(x)v(x)]_0^2}_{\dot{u}(2)v(2)} + \int_0^2 (-\ddot{u} + u)v dx \quad \forall v \in V$$

Quindi la 2ª forma integrale è

$$\dot{u}(2)v(2) + \int_0^2 (-\ddot{u} + u)v = 0 \quad \forall v \in V$$

Due fasi

- Fase 1 : mi limito a considerare le v.t.c. $v(0)=v(2)=0$
Non ho il termine di bordo e come prima deduco che

$$\ddot{u} = u$$

- Fase 2 Ora che so che $\ddot{u} = u$, la 2ª forma int. diventa

$$\ddot{u}(2)v(2) = 0 \quad \forall v \in V$$

Nella classe V trovo $v(x)$ t.c. $v(2)=1$ e quindi per forza $\dot{u}(2) = 0$.

Quindi $u(x)$ risolve

$$\begin{cases} \ddot{u} = u & \text{Eq. diff.} \\ u(0) = 3 & \text{DBC} \\ \dot{u}(2) = 0 & \text{NBC on the road} \end{cases}$$

DBC : Dirichlet Boundary Condition (prescrivere u al bordo)
NBC : NEUMANN " " (" $\dot{u}$ al bordo)

Si verifica con i soliti metodi che la sol. è unica ed è p.to di min.

Esempio 3 $\min \{ F(u) : u \in C^1([0,2]) \}$

Idea: nascono le Neumann

2ª forma di ELE ...

$$\dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0) + \int_0^2 [-\ddot{u} + u]v = 0 \quad \forall v \in V = C^1([0,2])$$

1^a fase : uso v nulle al bordo e trovo $\ddot{u} = u$

2^a fase : uso v con $v(0)=0$ e $v(2)=1 \rightsquigarrow \dot{u}(2)=0$
 " " " $v(0)=1$ e $v(2)=0 \rightsquigarrow \dot{u}(0)=0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(2) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{NBC} \\ \text{NBC} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(2) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{array}} \right\} \text{ on the road}$$

Esempio 4 $\min \{ F(u) : u \in C^1(\dots), u(0) = u(2) \}$

Ora $V = \{ v \in C^1(\dots) : v(0) = v(2) \}$

ELE 2^a forma diventa

$$\dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0) + \int_0^2 [-\ddot{u} + u]v \, dx = 0 \quad \forall v \in V$$

1^a fase $\rightsquigarrow \ddot{u} = u$

2^a fase $\rightsquigarrow$ prendo $v \in V$ t.c. $v(2) = v(0) = 1$ e trovo $\dot{u}(2) = \dot{u}(0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} = u \\ u(0) = u(2) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2) \end{array} \right. \left. \vphantom{\begin{array}{l} \ddot{u} = u \\ u(0) = u(2) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{(PBC)} \\ \uparrow \text{Periodic} \end{array}$$

(Se ripeto la u per periodicità, me la ritrovo C^1)

— o — o —

Esempio 5

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} \ddot{u}^2 - 7\dot{u} + \frac{1}{2}u^2$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^2([0,1]), u(0) = 5 \}$$

$$\begin{aligned} F(u+tv) &= \int_0^1 \frac{1}{2} \ddot{u}^2 - 7\dot{u} + \frac{1}{2}u^2 \\ &\quad + t \int_0^1 (\ddot{u}\ddot{v} - 7\dot{v} + uv) \\ &\quad + t^2 \int_0^1 \frac{1}{2} \ddot{v}^2 + \frac{1}{2}v^2 \end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) = \int_0^1 (\ddot{u}\ddot{v} - 7\dot{v} + uv)$$

$$(\text{ELE 1ª forma}) \quad \delta F(u, v) = 0 \quad \forall v \in V = \{ \dots v(0) = 0 \}$$

Integro per parti cercando di arrivare a v ovunque

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ddot{u}\ddot{v} &= [\ddot{u}\dot{v}]_0^1 - \int_0^1 \ddot{u}\dot{v} \\ &= [\ddot{u}\dot{v}]_0^1 - [\ddot{u}v]_0^1 + \int_0^1 \ddot{u}v \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \dot{v} = [v]_0^1$$

Quindi ELE in 2ª forma integrale diventa

$$\begin{aligned} \ddot{u}(1)\dot{v}(1) - \ddot{u}(0)\dot{v}(0) - \ddot{u}(1)v(1) + \ddot{u}(0)v(0) + \int_0^1 \ddot{u}v \\ - 7v(1) + 7v(0) + \int_0^1 uv = 0 \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

1^a fase Pseudo $v \in C_c^\infty((0,1)) \rightsquigarrow$

$$\int_0^1 (u'' + u) v = 0 \rightsquigarrow \text{FLCV} \rightsquigarrow u'' = -u$$

2^a fase • Pseudo v t.c. $v(1) = \dot{v}(1) = 0$ e $\dot{v}(0) = 1$
 $\rightsquigarrow \ddot{u}(0) = 0$

• Pseudo $\dot{v}(1) = 1$ e gli altri $= 0 \rightsquigarrow \ddot{u}(1) = 0$

• Pseudo $v(1) = 1$ e gli altri $= 0 \rightsquigarrow \ddot{u}(1) = -7$

Conclusione: se u è p.to di min. deve soddisfare per forza

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' = -u \\ u(0) = 0 \\ \ddot{u}(0) = 0 \\ \ddot{u}(1) = 0 \\ \ddot{u}(1) = 7 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{DBC dall'inizio} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{rate on the road}$$

Oss. • L'ordine dell'eq. diff. è il doppio dell'ordine delle derivate nel funzionale

• Il numero di cond. in ogni estremo è uguale all'ordine delle derivate nel funzionale.

• Per l'eq. di ordine 4 in ogni estremo c'è

→ una cond. tra u e $\ddot{u}$

→ una cond. tra $\dot{u}$ e $\dot{\ddot{u}}$

(in tutti i termini di bordo la somma è $= 3$).

— 0 — 0 —

1st. An. Mat.

-

LEZIONE 05

Note Title

28/09/2018

Eq. di EULERO - LAGRANGE in varie forme

→ Forma "classica"

→ Forma DBR

→ Forma ERDMANN

Setting: funzionali integrali in dim 1

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

dove

$$L: [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$\begin{matrix} x & s & p \end{matrix}$

$$L(x, s, p)$$

$\uparrow$ Lagrangiana

Calcoliamo la variazione prima

$$\varphi(t) := F(u+tv) = \int_a^b L(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) dx$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_a^b \frac{d}{dt} L(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) dx \\ &= \int_a^b \{L_s(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) v + L_p(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) \dot{v}\} dx \end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) = \varphi'(0) = \int_a^b \{L_s(x, u, \dot{u}) v + L_p(x, u, \dot{u}) \dot{v}\} dx$$

1ª forma integrale della variazione prima

Ipotesi sufficienti: $\rightarrow L_s$ e $L_p \in C^0$ dove definiti
 $\rightarrow u$ e $v \in C^1$

Sotto ulteriori hp di regolarità integro per parti il 2° pezzo:

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ L_S(\dots) v - (L_p(x, u, \dot{u}))' v \} dx + [L_p(\dots) v]_a^b$$

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ L_5(x, u, \dot{u}) - (L_p(x, u, \dot{u}))' \} v \, dx + [L_p(x, u, \dot{u}) v]_a^b$$

2ª forma integrale

Ipotesi suff. : $\rightarrow L_p(x, u(x), u'(x)) \in C^1$
(ad esempio ok se $L_p \in C^1$ e $u \in C^2$)

Supponiamo che u sia p.to di minimo per $F(u)$. Allora
 $\delta F(u, v) = 0$ per ogni v ammissibile

Oss. Minimo in che senso?

→ GM (global minimum), cioè un min. assoluto è ok

→ ma basta DLM (directional Loc. min.), cioè
 $t=0$ è p.to di min. locale per $t \rightarrow F(u+tv)$
— o — o —

Supponiamo che stiamo cercando il min di $f(u)$ tra tutte le $u \in C^1$ che verificano DBC $u(a) = A$ e $u(b) = B$ allora se abbiamo suff. regolarità ogni DLM verifica

$$(L_p(x, u, \dot{u}))' = L_s(x, u, \dot{u}) \quad \text{ELE in forma diff.}$$

Questa vale tutte le volte che posso usare una classe di v
per cui vale FLCV e nulle al bordo.

Riscrivo l'eq. esplicitando LHS (left hand side)

$$L_{px}(x, u, \dot{u}) + L_{ps}(x, u, \dot{u}) \dot{u} + L_{pp}(x, u, \dot{u}) \ddot{u} = L_s(x, u, \dot{u})$$

In particolare: se $L \in C^2$ e $u \in C^2$ è DLM, allora vale $\uparrow$

Qss Se so per qualche motivo che $L_{pp} > 0$ (cioè L strett. conv. nella variabile p), allora l'eq. la posso mettere in forma normale.

Se in un estremo non ho DBC, allora posso usare v non nulle e procedendo in 2 fasi (vedi les. 4) nasce "on the road" la NBC

$$\boxed{L_p(x, u, \dot{u}) = 0} \quad \text{nell'estremo in questione}$$

— 0 — 0 —

ELE in forma DBR

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ L_s(x, u, \dot{u}) v + L_p(x, u, \dot{u}) \dot{v} \} dx$$

Idea: far diventare il 1° termine $\dot{v}$

Pongo $\hat{L}(x) := \int_a^x L_s(y, u(y), \dot{u}(y)) dy$ e per parti,

supponendo di usare v nulle al bordo, ritrovo

$$\delta F(u, v) = \int_a^b \{ -\hat{L}(x) + L_p(x, u, \dot{u}) \} \dot{v} dx$$

Supponiamo ora che u sia DLM rispetto a tutte le $v \in C_c^\infty(a, b)$. Allora dal lemma DBR deduco

$$L_p(x, u, \dot{u}) = \hat{L}(x) + \text{costante}$$

oppure più dettagliatamente

$$L_p(x, u(x), \dot{u}(x)) = c + \int_a^x L_s(y, u(y), \dot{u}(y)) dy$$

ELE in
forma
DBR

Oss. • Se ho abbastanza reg., questa si ottiene anche integrando la classica

- Si tratta di equ. di ordine 1, ma con una costante dentro
- u è presente anche dentro un integrale
— o — o —

ELE in forma ERDMANN

Supponiamo che $L(x, s, p)$ NON dipenda da x

ELE classica è $[L_p(u, \dot{u})]' = L_s(u, \dot{u})$

Moltiplico per $\dot{u}$ a dx e sx:

$$\dot{u} [L_p(u, \dot{u})]' = L_s(u, \dot{u}) \dot{u}$$

$$[\dot{u} L_p(u, \dot{u})]' - \dot{u} L_p(u, \dot{u}) = L_s(u, \dot{u}) \dot{u}$$

Aggiustando i termini

$$[\dot{u} L_p(u, \dot{u})]' = L_s(u, \dot{u}) \dot{u} + L_p(u, \dot{u}) \ddot{u} = [L(u, \dot{u})]'$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\ddot{u} L_p(u, \ddot{u}) = c + L(u, \ddot{u})$$

ELE in forma
Erdmann

Oss 1 Questa è eq. diff. di ordine 2 con una costante arbitraria.

Oss 2 Occhio che ELE classica NON è equiv. a ELE-ERD.

→ u risolve classica $\Rightarrow u$ risolve Erdmann

→ il viceversa vale solo per gli $x \in [a, b]$ t.c. $\ddot{u}(x) \neq 0$.

MINIMALITÀ VIA CONVESSITÀ

Supponiamo di essere interessati al minimo di $F(u)$ con DBC (ma il discorso vale più in generale).

Supponiamo che $u_0(x)$ risolva ELE classica con DBC

Supponiamo che $L(x, s, p)$ sia convessa nelle variabili (s, p) per ogni $x \in [a, b]$.

Allora $u_0(x)$ è p.to di minimo (unico se la conv. è stretta).

Dim Per analisi 2 vale

$$\begin{aligned} L(x, s_0 + s_1, p_0 + p_1) &\geq L(x, s_0, p_0) \\ &\quad + s_1 L_s(x, s_0, p_0) \\ &\quad + p_1 L_p(x, s_0, p_0) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} L(x, s_0 + s_1, p_0 + p_1) &\geq L(x, s_0, p_0) \\ &\quad + s_1 L_s(x, s_0, p_0) \\ &\quad + p_1 L_p(x, s_0, p_0) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{funzioni conv.} \\ \text{stanno sopra} \\ \text{piano tang.} \end{array}$$

per ogni valore ammissibile delle variabili.

Ma allora

$$\begin{aligned}
 F(w) &= F(u_0 + v) = \int_a^b L(x, u_0 + v, \dot{u}_0 + \dot{v}) dx \\
 &\quad \text{nulla al} \uparrow \text{ bordo} \\
 &\geq \int_a^b L(x, u_0, \dot{u}_0) dx \\
 &\quad + \underbrace{\int_a^b \{ L_s(x, u_0, \dot{u}_0) v + L_p(x, u_0, \dot{u}_0) \dot{v} \} dx}_{= \delta F(u_0, v) = 0} \\
 &\geq F(u_0) \quad \text{😊}
 \end{aligned}$$

Se ho convessità stretta, ho disug. stretta appena $v(x) \neq 0$ oppure $\dot{v}(x) \neq 0$ da qualche parte.

— 0 — 0 —

Oss. Volendo si può risparmiare sulla strettezza della convessità. Basta rispetto alla variabile p .

1st. Analisi Matematica - LEZIONE 06

Note Title

28/09/2018

Funzionali integrali con integrali multipli

$$F(u) = \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $L: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 $L(x, s, p_1, \dots, p_d)$

Oss. Più variabili in partenza, 1 sola in arrivo
 (il caso "vettoriale", cioè con più variabili anche in arrivo, presenta vari problemi)

Ripassino di Analisi 2: Gauss - Green

Ingredienti: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ "abbastanza regolare"

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad "$$

$$E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \quad "$$

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} E dx = \int_{\partial\Omega} f \langle E, n \rangle d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, E \rangle dx$$

normale
esterna
ad Ω
integrale
sul bordo

Esempio classico: funzionale di Dirichlet

$$F(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

DBC: assegnare i valori di $u(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= F(u+tv) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u + t \nabla v|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} t^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + t \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx\end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) = \varphi'(0) = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx$$

1^a formula
integrale

Ora uso GG con $v(x) \approx f(x)$, $\nabla u(x) \approx E$

$$\begin{aligned}\delta F(u, v) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u(x)) \cdot v(x) dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} v(x) \langle \nabla u(x), n \rangle d\sigma\end{aligned}$$

"0 quando uso v che sono nulle in $\partial\Omega$

$$= - \int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot v(x) dx + \text{eventuale bordo}$$

2^a formula integrale

Supponendo che u sia DLM rispetto a tutte le $v \in C_c^\infty(\Omega)$ posso usare FLCV e otteniamo

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 \\ + BC \end{cases}$$

— o — o —

In generale se partiamo da

$$F(u) = \int_{\Omega} L(x, u, \nabla u)$$

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} L(x, u+tv, \nabla u+t\nabla v)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_{\Omega} L_s(x, u+tv, \nabla u+t\nabla v) v \\ &\quad + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d L_{p_i}(x, u+tv, \nabla u+t\nabla v) v_{x_i} \end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) = \int_{\Omega} L_s(x, u, \nabla u) v + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} L_{p_i}(x, u, \nabla u) v_{x_i}$$

$$= \int_{\Omega} L_s(x, u, \nabla u) v + \langle \nabla_p L(x, u, \nabla u), \nabla v \rangle$$

Se e quando posso integrare per parti ottengo

$$\begin{aligned} \delta F(u, v) &= \int_{\Omega} \{ L_s(x, u, \nabla u) - \operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) \} v \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla_p L(x, u, \nabla u), n \rangle d\sigma \end{aligned}$$

Se u è DLM risp. a tutte le $v \in C_c^\infty(\Omega)$ ottengo

$$\operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) = L_s(x, u, \nabla u)$$

ELE
Differenziale

Se non ho DBC, cosa nasce "on the road"

Mettiamo di avere funzionale di Dirichlet sul quadrato con dato assegnato solo su 3 lati



Come sempre arrivo alla 2ª forma integr.

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} v(x) \langle \nabla u(x), n \rangle d\sigma = 0$$

Fase 1: uso $v \in C_c^\infty(\Omega) \rightsquigarrow \Delta u(x) \equiv 0$

Fase 2: so che il 1º termine è nullo e uso delle funzioni v che non si annullano sul 4º lato

Otengo una specie di FLCV sul quarto lato, da cui deduco che

$$\langle \nabla u(x), n \rangle \equiv 0 \quad \text{sul 4º lato}$$

In generale questo è

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \quad \text{sul 4º lato}$$

↑
derivata nella direzione
normale al bordo

Idea: dove non ho posto le DBC ottengo NBC del tipo $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Ponendo dal funzionale generale trovo

$$\langle \nabla_p L(x, u(x), \nabla u(x)), n \rangle = 0 \quad \text{sui pezzi opportuni di } \partial\Omega$$

Tutti i discorsi di convessità si riciclano.

Esempio Ω = palla o quashato in $\mathbb{R}^2$

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} |u(x) - f(x)|^2 dx$$

dove $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione data.

Voglio $\min \{ F(u) : u \in C^1(\Omega) \}$

Brutalmente: cerco $u(x)$ che sia "vicina ad $f(x)$ " ma non oscilli troppo.

$$\operatorname{div}(\nabla_p L(x, u, \nabla u)) = L_s$$

$$\Delta u(x) = u(x) - f(x) \quad \text{ELE differenziale}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \text{NBC on the road}$$

Supponiamo di essere in grado di risolvere ELE + NBC e sia $u_0(x)$ la soluzione.

Dico che $u_0(x)$ è l'unico p.to di min.

Sia w un altro competitore. Lo scrivo come $w = u_0 + v$ e faccio il solito conto

$$\begin{aligned} F(u_0 + v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0 + \nabla v|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_0 + v - f)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_0 - f)^2 \quad \rightsquigarrow F(u_0) \\ &\quad + \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle + \int_{\Omega} (u_0 - f) v \quad \rightsquigarrow \delta F(u_0, v) = 0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 \quad \geq 0 \end{aligned}$$

Quindi $F(u_0+v) \geq F(u_0)$ con $=$ se e solo se $v \equiv 0$.

ELE con derivate superiori

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u})$$

$$F(u+tv) = \int_a^b L(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}, \ddot{u}+t\ddot{v})$$

$$\delta F(u, v) = \int_a^b L_S(\dots) v + L_{P_1}(\dots) \dot{v} + L_{P_2}(\dots) \ddot{v}$$

$$= \int_a^b L_S(\dots) v - [L_{P_1}(\dots)]' v + [L_{P_2}(\dots)]'' v$$

+ eventuale bordo

... solito FLCV ... e concludo

Se avessimo derivate fino ordine k ...

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \frac{d^i}{dx^i} L_{P_i}(x, u, \dot{u}, \dots) = L_S(x, u, \dot{u}, \dots)$$

1st. Analisi Matematica - LEZIONE 07

Note Title

01/10/2018

- Tecniche di minimalità
- Variazione interna / orizzontale
- Ambientazione del pbm.
- Argomenti di troncamento $\rightsquigarrow$ principio del max

Tecniche per dimostrare che un certo x_0 è p.to di min.

- Procedendo per cond. necessarie trovo candidati p.to di min.
- Provo a dim. in 2 modi
 - via convessità
 - via funz. ausiliario

Def. Sia X affine con sp. vett. associato V . Una $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow F(x+tv) \in \mathbb{R}$$

è convessa $\forall x \in X$ e $\forall v \in V$.

(La convessità si testa sulle rette)

Strett. conv. se $F(x+tv)$ è strett. conv. per $v \neq 0$.

Teorema (Minimalità via convessità)

X, V, F come sopra. Supponiamo che

(i) F convessa

(ii) $x_0 \in X$ soddisfa $\delta F(x_0, v) = 0$ per ogni $v \in V$.

Allora x_0 è p.to di min. glob. (unico se F è strett. conv.)

Dim Per ogni competitor x vale

$$F(x) = F(x_0 + (x - x_0)) \geq F(x_0)$$

C'è sotto: ponga $\varphi(t) := F(x_0 + t\sigma)$ con $\sigma = x - x_0 \in V$ e osservo che

$$F(x_0 + (x - x_0)) = \varphi(1) \geq \varphi(0) + (1-0)\varphi'(0) = \varphi(0) = F(x_0)$$

— o — o —

Teorema (Minimalità via funz. ausiliario)

Sia S un insieme, $F: S \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in S$.

Supponiamo che esista $G: S \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) $F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in S$

(ii) $G(x) \geq G(x_0) \quad \forall x \in S$ (x_0 è p.to di min. per G)

(iii) $F(x_0) = G(x_0)$

Allora x_0 è p.to di min. gl. per F

Dim Per ogni $x \in S$ vale

$$F(x) \geq G(x) \geq G(x_0) = F(x_0).$$

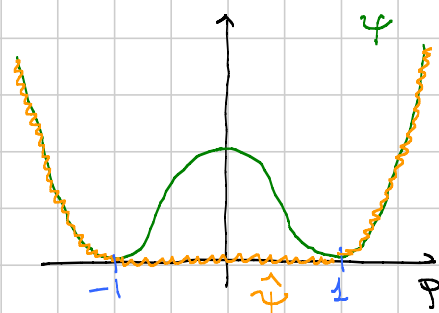
$\uparrow$ (i) $\uparrow$ (ii) $\uparrow$ (iii)
 — o — o —

Esempio 1 Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il doppio pozzo

$$\psi(p) := (p^2 - 1)^2$$

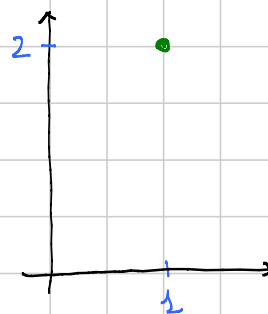
$$\min \left\{ \int_0^1 \psi(u) dx : u \in C^1, u(0)=0, u(1)=2 \right\}$$

— o —
 $F(u)$



Congettura: $u_0(x) = 2x$ è l'unico p.to di min.

Non posso usare la convessità perché $F(u)$ non è convesso



Considero $G(u) := \int_0^1 \hat{\psi}(\ddot{u}) dx$ dove $\hat{\psi}$ è la
"convessificata" di ψ

Verifichiamo le 3 ipotesi

(i) $F(u) \geq G(u)$ (ovvio perché $\psi \geq \hat{\psi}$)

(ii) $u_0(x)$ è p.to di min per $G(u)$ (vero perché $\hat{\psi}$ è
convessa, dunque G è convesso)

(iii) $F(u_0) = G(u_0)$ (vero perché $\psi(2) = \hat{\psi}(2)$)
 $\uparrow$ coeff. angolare

Si verifica anche che $u_0(x) = 2x$ è l'unico p.to di min.
di $F(u)$.

Basta osservare che $G(u) > G(u_0)$ quando $u \neq u_0$
cosa che segue dalla disuguaglianza

$$\hat{\psi}(2+a) > \underbrace{\hat{\psi}(2)}_0 + \underbrace{\hat{\psi}'(2)}_0 a \quad \forall a \neq 0$$

Esempio 2 $\min \{F(u) : u \in C^1, u(0)=0, u(1)=0\}$

Cong. iniziale: $u_0(x) \equiv 0$ è p.to di min., magari non
unico

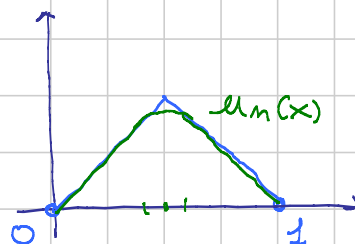
FALSA !! Il minimo non esiste e $\inf = 0$.

Se dimostro che $\inf = 0$, allora per forza min N.E.

(Dovrebbe essere $\equiv 0$, ma allora $\psi(\ddot{u}(x)) \equiv 0$, ma
allora $\ddot{u}(x) \in \{\pm 1\}$, il che è incompatibile con DBC)

Poiché $F(u) \geq 0$ sempre, basta trovare un t.c. $F(u_n) \rightarrow 0$

Basta fare un piccolo raccordo in
 $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ ed il gioco è
fatto



Esempio 3 $\psi(p) = (p^2 - 1)^2$

$$\psi'(p) = 2(p^2 - 1) \cdot 2p = 4(p^3 - p)$$

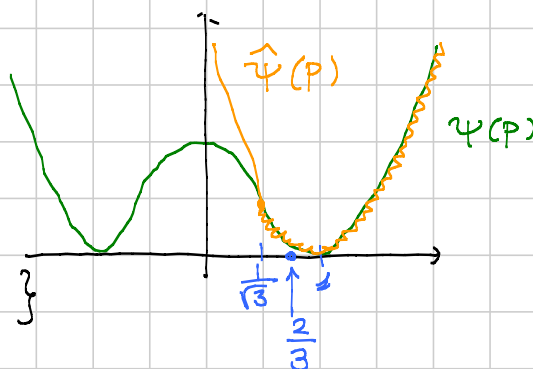
$$\psi''(p) = 4(3p^2 - 1)$$

I punti di flesso sono $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1$$

$$u(0) = 0, u(1) = \frac{2}{3}$$

$$u(x) \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ovunque} \}$$

N.B. L'insieme $\mathbb{X}$ non è più uno spazio affineConc. La retta è l'unico p.to di minimoDim Costruisco $G(u) := \int_0^1 \hat{\psi}(u) dx$ con $\hat{\psi}(p)$ CONVESSA che coincide con $\psi(p)$ per $p \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Le 3 verifiche sono ovvie.

(i) $F(u) \geq G(u)$ per ogni $u \in \mathbb{X}$ (vale pure =)(ii) $G(u) \geq G(\text{retta})$ per ogni $u \in \mathbb{X}$ (vale addirittura senza considerare il vincolo)(iii) $F(\text{retta}) = G(\text{retta})$.

— o — o —

Osservazione Per i classici funzionali integrali

$$F(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x)) dx$$

anche con integrali multipli o con derivate di ordine superiore, la convessità di F segue dalla convessità della funzione

$$(s, p) \rightarrow L(x, s, p) \quad \forall x \in (a, b) \quad (\Omega)$$

SPAZI DI AMBIENTAZIONE

$$\min \left\{ \int_a^b u^2 + 8u(u) : u(a)=0, u(b)=7 \right\}$$

Dove prendo u ?

- Ambientazione classica: $u \in C^1$
- " ristretta: $u \in C^\infty$
- " creativa: $u \in C^{2018}$
- " più inclusiva: $u \in C^1$ a tratti (continua e C^1 in un numero finito di tratti)

Tra qualche lezione: $u \in H^1$.

MORALE: se la Lagrangiana è decente, non cambia praticamente nulla.

Teorema Sia $L(x, s, p)$ continua nelle 3 variabili.

Allora l'sup è lo stesso in tutte le classi (da C^1 a tratti fino a C^∞). Più avanti sarà vero pure in H^1 .

Lemma di approssimazione (versione classica)

Sia $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1 a tratti, e sia $S \subseteq [a, b]$ l'insieme dei p.ti in cui u è discontinua. Allora esiste $\{u_n\} \subseteq C^\infty([a, b])$ tale che

$$\begin{aligned} (i) \quad u_n(x) &\rightarrow u(x) && \text{unif. su } [a, b] \\ \dot{u}_n(x) &\rightarrow \dot{u}(x) && \text{unif. sui cpt. contenuti in } [a, b] \setminus S \end{aligned}$$

$$(ii) \quad |u_n(x)| + |\dot{u}_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad \text{volendo possiamo anche imporre } u_n(a) = u(a) \\ u_n(b) = u(b)$$

→ Il Lemma di approx si dimostra in 1000 modi
(volendo basta approx u con funzioni C^∞ e fare
la primitiva)

→ Dato il Lemma, per il teorema basta osservare che
se $u_m \rightarrow u$ come nel Lemma, allora

$$F(u_m) \rightarrow F(u)$$

(qui si usa la continuità di $L(x, s, p)$)

[Provare a dim. tutto ciò usando solo analisi 1+2].

Ist. Analisi Matematica -

LEZIONE 08

Titolo nota

01/10/2018

$$F(u) = \int_a^b F(x, u, \dot{u}) dx$$

Variazione esterna / verticale : data $v \in C_c^\infty((a,b))$ si considera

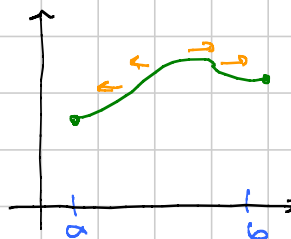
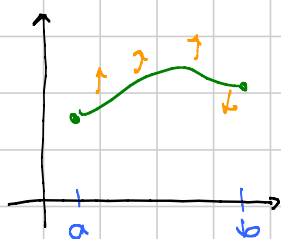
$$\varphi(t) := F(u + tv)$$

Variazione interna / orizzontale : data $v \in C_c^\infty((a,b))$ si considera

$$\varphi(t) := F(u(x + t\sigma(x)))$$

$\in [a,b]$ se $x \in [a,b]$ e $|t|$ è abbastanza piccolo

qui è
fondamentale
il supporto
compatto
di σ



Poi si procede analogamente calcolando $\varphi'(0)$ (fare per esercizio con la variazione orizz.)

$$\varphi(t) = \int_a^b L(x, u(x + t\sigma(x)), \dot{u}(x + t\sigma(x))(1 + t\dot{\sigma}(x))) dx$$

Oss. Ci sono molti problemi in cui la variazione verticale non ha senso. Due esempi

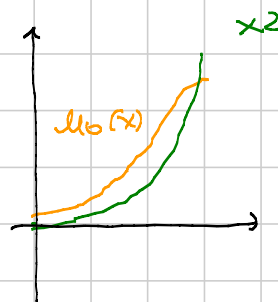
→ pbm. in cui le u sono a valori in una varietà

→ pbm. in cui l'incognita è un insieme

— o — o —

Esempio 1

$$\min \left\{ \int_0^1 \underbrace{[\ddot{u}^2 + (u - x^2)^2]}_{L(x, \dot{u}, \ddot{u})} dx \right\}$$



$$(ELE) \quad (L_p)' = L_s$$

$$(2\ddot{u})' = 2(u - x^2)$$

$$\ddot{u} = u - x^2$$

Quindi devo risolvere

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 \end{cases} \quad NBC$$

$$\begin{cases} u(1) = 0 \end{cases} \quad NBC$$

risolvo

$$u(x) = a \cos Rx + b \sin Rx + x^2 + 2$$

con le NBC trovo a e b in modo unico (va verificato)

la $u_0(x)$ risultante è l'unico pto di minimo per la stretta convessità

Anche senza risolvere, si può dimostrare che gli eventuali punti di minimo verificano

$$0 \leq u(x) \leq 1$$

max e min di x^2

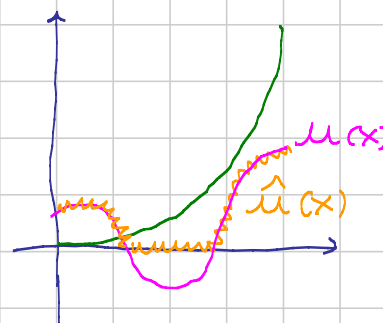
ARGOMENTO DI TRONCAMENTO

Supponiamo che $u(x_0) < 0$ per un qualche x_0

Idea: se trovo a o migliori.

Piccola cautela: la funzione

$$\max\{u(x), 0\}$$



può essere esibibile anche se $u \in C^\infty$ (potrebbe non essere nemmeno C^1 a tratti)

Via d'uscita: definisco

$$a := \sup \{x \in [0, x_0] : u(x) \geq 0\}$$

$$b := \inf \{x \in [x_0, 1] : u(x) \geq 0\}$$

e pongo

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a, b] \\ u(x) & \text{se } x \in [0, a] \cup [b, 1] \end{cases}$$



Questa davvero è C^1 a tratti e si verifica facilmente che

$$F(\hat{u}) < F(u)$$

↑ ho risparmiato su entrambi i
termini in $[a, b]$ perché in $[a, b]$
abbiamo che $\hat{u} = 0$ mentre $u < 0$

Per il solito lemma di approx esiste $\tilde{u}$ tale che $F(\tilde{u}) < F(u)$
e $\tilde{u} \in C^1$.

— o — o —

L'argomento di troncamento è anche suggerito da EGE

$$\ddot{u} = u - x^2$$

Se fosse $u(x_0) < 0$ da qualche parte, sarebbe min $u < 0$
Sia y_0 il p.to di min., allora

$$\ddot{u}(y_0) = \underbrace{u(y_0)}_{< 0} - \underbrace{y_0^2}_{\geq 0} < 0$$

il che è assurdo.

Questo funziona se il p.to di minimo sta in $(0, 1)$.

Può essere al bordo? Sappiamo che al bordo la derivata
è nulla, quindi niente di male. A quel p.to il segno
in un intorno è deciso dalla derivata 2^a.

— o — o —

Esempio 2 $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 + [u-x^2]^2 : u\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \right\}$

↑
valore assegnato in
p.to interno

Idea: spezzo in 2 problemi $\int_0^{1/2} \dots + \int_{1/2}^1 \dots$

e minimizzo separatamente con DBC $u\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.

In ogni tratto nasce NBC nell'altro estremo e trovo soluzione unica (verificare!).

Ci sono 2 casi

- se le sol. dx/sx si ricollano C^1 in $\frac{1}{2}$, allora il pbm. originario ha sol. unica in C^1
- se non si ricollano C^1 , allora il pbm. originario NON ha minimo in C^1 , ma ha minimo in C^1_a tratti e questo min. è l'inf. in C^1 .

Esempio 3 $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 + [u-x^2] : u(0) = 7, \ddot{u}(0) = 8 \right\}$

Se faccio il metodo indiretto, nasce comunque la NBC $\ddot{u}(1) = 0$, per cui mi ritrovo 3 soluzioni.

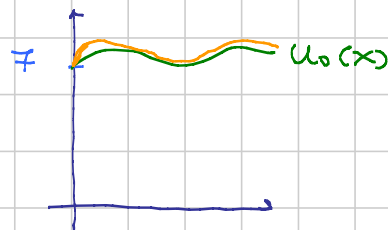
Risolto $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 + [u-x^2] : u(0) = 7 \right\}$

$$\dots \begin{cases} \ddot{u} = u - x^2 \\ u(0) = 7 \\ \ddot{u}(1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{sol. unica } u_0(x)$$

Ci sono 2 casi

- se per puro caso $\ddot{u}_0(0) = 8$, allora pbm. originario ha sol. in C^1
- se $\ddot{u}_0(0) \neq 8$, allora il pbm. or. NON ha sol. in C^1 e l'inf. è $F(u_0)$

Con un piccolo ragionamento
possiamo appross $u_0(x)$ con
funzioni $u_n(x)$ con $\dot{u}_n(0) = 8$
e. $F(u_n) \rightarrow F(u_0)$



MORALE Se la Lagrangiana contiene solo derivate di
ordine 1, non ha senso mettere condizioni
su u che coinvolgono le o derivate di
ordine superiore.

Esempio 4 $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 dx : u(0) = 7, \int_0^1 u(x) dx = 9 \right\}$

$$V = \left\{ v \in C^1 : v(0) = 0 \text{ e } \int_0^1 v(x) dx = 0 \right\}$$

$$\begin{aligned} \delta F(u, v) &= 2 \int_0^1 \dot{u} \dot{v} dx \quad \forall v \in V \\ &= -2 \int_0^1 \ddot{u} v + \text{termini di bordo} \end{aligned}$$

Uso v nulle al bordo e ottengo per il lemma DBR

$$\begin{cases} \ddot{u} = \lambda \\ u(0) = 7 \\ \dot{u}(1) = 0 \\ \int_0^1 u(x) dx = 9 \end{cases}$$

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

- LEZIONE 09

Note Title

04/10/2018

- $\mathbb{R}^n$
- Sp. di Hilbert (funziona tutto con POCHÉ eccezioni)
- Sp. di Banach (" nulla " POCHÉ ")
- Sp. Vett. Top. Loc. Convessi
- Sp. Vett. Top.
- Insieme

Norma Sia V vettoriale una NORMA è una funzione

$$V \ni x \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$$

$$(m1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$$

$$(m2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(m3) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V$$

$$(m4) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Sp. di Banach Sp. vett. V munito di una norma che lo rende un metrico completo.

Prod. scalare Sia V vettoriale. Un PROD. SCALARE è

$$V^2 \ni (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

$$(p1) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall \dots$$

$$(p2) \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall \dots$$

$$(p3) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V \quad \text{con} = 0 \text{ e solo se } x = 0$$

Facile verifica : se $\langle x, y \rangle$ è prod. scal., allora

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2} \quad \text{è una norma}$$

Def. Uno sp. di Hilbert = sp. vett. H con un prod. scal. che induce una norma che induce una metrica che lo rende completo.

Def. Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita (se $\dim H < +\infty$, allora $H = \mathbb{R}^n$)

Una base Hilbertiana è un sottoinsieme $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

(i) Vale

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \left. \vphantom{\langle e_i, e_j \rangle} \right\} \begin{array}{l} \text{cioè gli } e_n \\ \text{sono} \\ \text{ortonormali} \end{array}$$

(ii) $\text{Span}(\{e_n\})$ è denso in H

$\uparrow$ comb. lin. FINITE

Teorema 1 Sia H uno sp. di Hilbert di dim. infinita. Supponiamo che H sia separabile (esiste sottoinsieme denso numerabile). Allora esiste una base Hilbertiana.

Teorema 2 Sia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base Hilbertiana in uno sp. di Hilbert H (che a quel punto è separabile). Per ogni $x \in H$, poniamo

$$x_k := \langle x, e_k \rangle \quad (\text{k-esima comp. di } x \text{ rispetto alla base})$$

Allora

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n$$

serie di vettori

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$$

serie di numeri

Se $y \in H$ ha comp. y_n , allora $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$.

Brutalmente: uno sp. di Hilbert separabile è " $\mathbb{R}^\infty$ ".

Achtung! Una base Hilbertiana NON è una base algebrica

Dim. Teo. 1 Sia $D \subseteq H$ il denso numerabile

$$D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$$

Step 1 Esiste sottosucc. $\{d_{n_k}\}$ con la proprietà che

$\text{Span} \{d_{n_1}, d_{n_2}, \dots, d_{n_k}\}$ ha dim k e coincide con

$$\text{Span} \{d_1, d_2, \dots, d_{n_k}\}$$

Osservo che $\text{Span} \{d_1, d_2, d_3, \dots\} = \text{Span} \{d_{n_1}, d_{n_2}, \dots\}$
e quindi è denso

Step 2 Applico Gram-Smidt a $\{d_{n_1}, d_{n_2}, \dots\}$
ottenendo così un sottosistema ortonormale.

— o — o —

Nomenclatura Sono sinonimi

"Base Hilbertiana"

"Sistema ortonormale completo"

Oss. La base Hilbertiana costruita dal teo. 1 vive
nello span del denso numerabile D .

— o — o —

Lemma 0 (Continuità (forte) di norma e prod. scalare)

Se $x_n \rightarrow x_\infty$ e $y_n \rightarrow y_\infty$, allora

$$\|x_n\| \rightarrow \|x_\infty\| \quad \text{e} \quad \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_\infty, y_\infty \rangle$$

Lemma 1 (Caratterizzazione serie Hilbertiane conv.)

Sia $\{e_n\}$ base Hilb. in H . Sia $\{a_n\}$ una succ. di numeri.

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ conv. $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ conv.,

Lemma 2 (Proprietà somma della serie)

Sia $\{e_n\}$ base Hilb. in H . Sia $\{a_n\}$ una succ. tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$

Consideriamo $v := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ (che sappiamo conv.)

Allora

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

$$\langle v, e_n \rangle = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lemma 3 (Caratterizzazione del vettore nullo)

Sia $\{e_n\}$ base Hilb. in H . Sia $v \in H$ tale che

$$\langle v, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora $v = 0$.

Dim. Lemma 0

- Continuità della norma: segue dalla triangolare

$$| \|x_\infty\| - \|x_n\| | \leq \|x_\infty - x_n\| \quad (\text{dimostrarlo!})$$

- Continuità del prod. scalare

$$| \langle x_\infty, y_\infty \rangle - \langle x_n, y_n \rangle | \leq | \langle x_\infty, y_\infty \rangle - \langle x_n, y_\infty \rangle |$$

$$+ | \langle x_n, y_\infty \rangle - \langle x_n, y_n \rangle |$$

$$\begin{aligned} \text{c.s.} \nearrow & \leq \underbrace{\|x_\infty - x_n\|}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\|y_\infty\|}_{\downarrow \text{numero}} + \underbrace{\|x_n\|}_{\downarrow \text{limitato}} \cdot \underbrace{\|y_\infty - y_n\|}_{\downarrow 0} \\ & \quad \text{(le succ. conv. lo sono)} \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Dim. Lemma 1

$$S_m := \sum_{k=0}^m a_k e_k$$

$$\hat{S}_m := \sum_{k=0}^m a_k^2$$

Per ogni $m > n$ vale

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^m a_k e_k \right\|^2 \\ \text{geometria} \nearrow &= \sum_{k=n+1}^m a_k^2 \\ &= \hat{S}_m - \hat{S}_n \end{aligned}$$

Questo ci dice che $\{S_n\}$ è di Cauchy in H se e solo se $\{\hat{S}_n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$.

Conclusione

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \text{ conv. in } H \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ è di C. in } H$$

$$\Leftrightarrow \{\hat{S}_n\} \text{ è di C. in } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \text{ converge}$$

Oss. Non ho usato ancora lo Span denso

Dim. Lemma 2 $v := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$

Pongo $v_n := \sum_{k=0}^n a_k e_k$ e per def. $v_n \rightarrow v$

Ma allora $\|v_n\| \rightarrow \|v\|$ e

$$\|v_n\|^2 = \sum_{k=0}^n a_k^2 \quad (\text{geometria 1})$$

Per ogni k fisso $\langle v_n, e_k \rangle \rightarrow \langle v, e_k \rangle$

a_k non appena $n \geq k$

Continuo a non usare la densità ...

Dim. Lemma 3 Dall'ipotesi segue che $\langle v, w \rangle = 0$
per ogni $w \in \text{Span}(\{e_n\})$.

Voglio dim. che $\forall \varepsilon > 0$ vale $\|v\|^2 \leq \varepsilon$. Uso finalm. la densità.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $w_\varepsilon \in \text{Span}(\{e_n\})$ t.c. $\|v - w_\varepsilon\|^2 \leq \varepsilon$

Ma allora

$$\varepsilon \geq \|v - w_\varepsilon\|^2 = \|v\|^2 + \|w_\varepsilon\|^2 - 2\langle v, w_\varepsilon \rangle \geq \|v\|^2 \quad \text{!} \quad \text{☺}$$

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 10

Note Title

04/10/2018

Dim. teo. 2 Dato $x \in H$ definisco $x_k := \langle x, e_k \rangle$
e spero che

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n$ converga e converga ad x

Step 1 Per dim. che la serie conv., mostro che $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty$.

Fisso $n \geq 0$ e scrivo

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + r_n$$

$\uparrow$ resto

Dimostro che $\langle r_n, e_k \rangle = 0$ per ogni $k = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \langle r_n, e_k \rangle &= \langle x - x_0 e_0 - \dots - x_n e_n, e_k \rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle - x_k = x_k - x_k = 0 \end{aligned}$$

Posso calcolare la norma a dx e sx:

$$\|x\|^2 = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 + \|r_n\|^2 \geq \sum_{k=0}^n x_k^2$$

$\uparrow$
a dx sono
ortogonali

Questo mi assicura la conv. di $\sum x_k^2$, quindi anche della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n.$$

Step 2 Pongo

$$\hat{x} := \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \quad (\text{presumo } x)$$

Per un lemma, $\langle \hat{x}, e_k \rangle = x_k$. Ma allora

$$\langle x - \hat{x}, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle \hat{x}, e_k \rangle = x_k - x_k = 0$$

Quindi per un lemma $x - \hat{x} = 0$.

Step 3 Ora sappiamo che $\|x\|^2 = \|\hat{x}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$
↑
Lemma

Dati x e y pongo

$$u_n := \sum_{k=0}^n x_k e_k \rightarrow x \quad w_n := \sum_{k=0}^n y_k e_k \rightarrow y$$

Per un lemma

$$\sum_{k=0}^n x_k y_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lem. 1}}}{=} \langle u_n, w_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$

— o — o —

Def. (Convergenza debole)

Sia H uno sp. di Hilbert, sia $\{u_n\} \subseteq H$ una succ., e sia $u_\infty \in H$.

Si dice che u_n conv. deb. a u_∞ , e si scrive

$$u_n \longrightarrow u_\infty$$

$$\text{Se } \langle u_n, w \rangle \longrightarrow \langle u_\infty, w \rangle \quad \forall w \in H$$

— o — o —

Esercizio 1 Sia H un Hilbert di dim. infinita, e sia $\{e_n\}$ una base Hilbertiana.

Allora

- La succ. $\{e_n\}$ non ha sottosucc. che convergano forte
- $e_n \rightarrow 0$

Dim. $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ se $m \neq n$

Quindi non può avere s.succ. di Cauchy

Dimostro invece che $e_n \rightarrow 0$. Prendo un qualunque $w \in H$ e spero che $\langle w, e_n \rangle \rightarrow \langle w, 0 \rangle = 0$

Ora

$$\langle w, e_n \rangle = w_n \rightarrow 0$$

per cond. necessaria di conv. della serie $\sum_{n=0}^{\infty} w_n^2$

Esercizio 2 Se $u_n \rightarrow u_\infty$ e $w_n \rightarrow w_\infty$, allora

$$\alpha u_n + \beta w_n \rightarrow \alpha u_\infty + \beta w_\infty$$

Dim. Linearità di prod. scalare e passaggio al limite.

Esercizio 3 Se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora

$$\langle u_n, e_k \rangle \rightarrow \langle u_\infty, e_k \rangle \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(le comp. di u_n tendono alle comp. di u_∞)

Dim. Uso def. di conv. debbe con $w_i = e_k$.

Esercizio 4 Se H ha dimensione finita, allora

$$U_m \longrightarrow U_\infty \iff U_m \longrightarrow U_\infty$$

Dim In dimensione finita la conv. come vettori è equiv. alla conv. delle componenti.

Esercizio 5 In qualunque Hilber H vale

$$U_m \longrightarrow U_\infty \implies U_m \longrightarrow U_\infty$$

Dim Continuità del prod. scalare

Prop. Sia H Hilbert. Supponiamo che

(i) $U_m \longrightarrow U_\infty$

(ii) $W_m \longrightarrow W_\infty$

(iii) $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $\|U_m\| \leq M$ per ogni $m \in \mathbb{N}$

(molto più avanti vedremo che questa hp non serve)

Allora

$$\langle U_m, W_m \rangle \longrightarrow \langle U_\infty, W_\infty \rangle$$

Dim La solita

$$|\langle U_\infty, W_\infty \rangle - \langle U_m, W_m \rangle| \leq$$

$$\leq \underbrace{|\langle U_\infty, W_\infty \rangle - \langle U_m, W_\infty \rangle|}_{\substack{\downarrow \\ \text{per def. di conv.} \\ \text{debole}}} + |\langle U_m, W_\infty \rangle - \langle U_m, W_m \rangle|$$

$$\leq \underbrace{\|U_m\|}_{\leq M} \cdot \underbrace{\|W_\infty - W_m\|}_{\downarrow 0}$$

— 0 — 0 —

Oss. Due deboli non bastano

$$v_m = w_m = eu$$

$$v_m \rightarrow 0$$

$$w_m \rightarrow 0$$

$$\underbrace{\langle v_m, w_m \rangle}_{\rightarrow 0} = \underbrace{\|eu\|^2}_{= 1} = 1 \not\rightarrow 0 = \langle w_\infty, w_\infty \rangle$$

Domanda: nella def. di conv. debole, quanto posso indebolire la richiesta

$$\langle v_m, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle \quad \forall w \in ?$$

Prop. Sia H un Hilbert, sia $\{v_m\} \subseteq H$ una succ., e sia $v_\infty \in H$.

Supponiamo che $\{v_m\}$ sia limitata.

Supponiamo che

$$\langle v_m, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle \quad \forall w \in W$$

con $\text{Span}(W)$ denso.

Allora davvero $v_m \rightarrow v_\infty$

Oss. Se v_m non è limitata, allora non è vero.

Prendo $v_m = me_m$. È chiaro che

$$\langle v_m, e_k \rangle \rightarrow 0 \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}$$

↑
è 0 definitivamente

Tuttavia $v_m \not\rightarrow 0$, come si vede scontrando contro

$$w := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \quad \left(\text{converge e } \langle v_m, w \rangle = 1 \text{ per ogni } m \in \mathbb{N} \right)$$

Dim Prop. Brutta copia... prendo $w \in H$ qualunque e scrivo

$$|\langle u_m, w \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| \leq |\langle u_m, w \rangle - \langle u_m, w_\varepsilon \rangle| \quad (1)$$

$$+ |\langle u_m, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle| \quad (2)$$

$$+ |\langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| \quad (3)$$

Idea: (1) e (3) sono piccoli se $w_\varepsilon \in W$ è vicino a w
 (2) è piccolo se n è grande

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Scelgo $w_\varepsilon \in \text{Span}(W)$, che è denso, tale che

$$\|w - w_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{M+1}$$

↑ limitazione su $\|u_m\|$

$$\|w - w_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{\|u_\infty\| + 1}$$

• Ricevuto w_ε dal passo prec., scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|\langle u_m, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$$

(posso perché il prod. scal. passa al limite in $\text{Span}(W)$)

• Osservo che per $m \geq m_0$ vale

$$(1) = |\langle u_m, w \rangle - \langle u_m, w_\varepsilon \rangle| \leq \|u_m\| \cdot \|w - w_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$\leq M$

$$(3) = \text{idem.} \leq \|u_\infty\| \cdot \|w - w_\varepsilon\| \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$$\textcircled{2} \leq \frac{1}{4} \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_0$$

Quindi ho finito.

— o — o —

Riassunto

• In dim. finita

cov. vettori $\Leftrightarrow$ cov. delle componenti

• In dim. infinita

cov. vettori $\rightsquigarrow$ cov. forte

cov. componenti, almeno sulle succ. limitate $\rightsquigarrow$ cov. debole

↑

Posso controllare la cov.
debole solo contro una
base Hilbertiana

— o — o —

BAIRE POINT Le succ. deb. cov. sono limitate
(per ora non serve)

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 11

Note Title

05/10/2018

Oss. In un Hilbert di dim infinita la norma non è continua debolmente

$$u_n \rightarrow u_\infty \not\Rightarrow \|u_n\| \rightarrow \|u_\infty\|$$

[Esempio: sia $\{e_n\}$ una base Hilbertiana. Allora $e_n \rightarrow 0$,
ma $\|e_n\| \equiv 1$]

Teorema (sci della norma) Sia H un Hilbert.

Supponiamo che $u_n \rightarrow u_\infty$.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \geq \|u_\infty\|$$

Dim

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \|u_\infty + (u_n - u_\infty)\|^2 \\ &= \|u_\infty\|^2 + \|u_n - u_\infty\|^2 + 2 \langle u_\infty, u_n - u_\infty \rangle \\ &\geq \|u_\infty\|^2 + 2 \underbrace{\langle u_\infty, u_n - u_\infty \rangle}_{\downarrow 0 \text{ per def. di conv. debole}} \end{aligned}$$

Faccio $\liminf$ a dx e sx e ho concluso.
— 0 — 0 —

Esercizio Sia H Hilbert.

Supponiamo che

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{e} \quad \|u_n\| \rightarrow \|u_\infty\|$$

Allora

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ forte.}$$

Dim

$$\begin{aligned} \|u_n - u_\infty\|^2 &= \|u_n\|^2 + \|u_\infty\|^2 - 2 \langle u_n, u_\infty \rangle \\ &\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \|u_\infty\|^2 + \|u_\infty\|^2 - 2 \langle u_\infty, u_\infty \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Oss. Se H è uno spazio di Hilbert di dimensione ∞ , allora

- le palle chiuse $\{x \in H : \|x\| \leq R\}$ non sono compatte fortemente

[la solita $\{e_n\}$ non ha s.succ. di Cauchy perché $\|e_m - e_n\|^2 = 2$ per ogni $m \neq n$]

- le sfere $\{x \in H : \|x\| = R\}$ non sono compatte, né fortemente, né debolmente

[la solita $\{e_n\}$]

Teorema (compattanza debole delle palle)

Sia H uno spazio di Hilbert separabile

Sia $\{u_m\} \subseteq H$ una successione limitata, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \|u_m\| \leq M$$

Allora u_m ammette s.succ. cov., debolmente, cioè esiste $\{n_k\}$ succ. cresc. di interi positivi, ed esiste $u_\infty \in H$, tale che

$$u_{n_k} \longrightarrow u_\infty \quad (\text{debole})$$

Dim Sia $\{e_i\}$ una base Hilbertiana. Mi basta dim. che esiste n_k ed esiste u_∞ tale che

$$\langle u_{n_k}, e_i \rangle \longrightarrow \langle u_\infty, e_i \rangle \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Step 1 Scelta di n_k con procedimento diagonale.

- Considero e_1 e considero $|\langle u_m, e_1 \rangle|$. È una succ. limitata di numeri (C-S). Quindi ammette s.succ. che converge ad un certo a_1 .

Sia $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli indici di questa s.succ.

- Considero e_2 e considero $|\langle u_m, e_2 \rangle|$ con $m \in N_1$

Questa ammette s.succ. che converge ad α_2 .

Chiamo $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$ gli indici di questa.

- Procedendo in questo modo ottengo sottosuccessioni

$$\mathbb{N} \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_k \supseteq \dots$$

Prendo n_k crescente tale che

$$n_k \in N_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

↓ e quindi anche a tutti
i precedenti

Osservo che u_{n_k} è una s.succ. di tutte quelle usate strada facendo, almeno definitivamente.

Conseguenza

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle u_{n_k}, e_i \rangle = \alpha_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Step 2 Praticamente ho la tesi se pongo

$$u_\infty := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Devo però dimostrare che la serie converge, il che è equivalente a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < +\infty$$

il che equivale ad un bound uniforme sulle somme parziali.

Fisso $m \in \mathbb{N}$. Allora

↓ somma finita

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \langle u_{n_k}, e_i \rangle^2$$

↓ rapp. norma con le componenti

$$\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_{n_k}, e_i \rangle^2 = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \|u_{n_k}\|^2 \leq M$$

Achtung! Occhio agli scambi. Supponiamo che $u_n \rightarrow u_\infty$
Allora

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle u_n, e_i \rangle^2 = \|u_n\|^2$$

↓ $\neq$ NO!!!

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle u_\infty, e_i \rangle^2 = \|u_\infty\|^2$$

OCCIO: NON si scambiano le serie infinite con i limiti.

— o — o —

Cosa succede se H non è separabile

Fatto 1 (semplice) Esiste comunque un sottoinsieme numerabile $\{e_n\}$ di vettori ortonormali (non dico che abbiano span denso)

[Si costruisce facilmente per induzione: prendo e_1 con $\|e_1\|=1$, poi prendo $u_2 \notin \text{Span}(e_1)$ e lo rendo ortogonale al prec. e di norma 1, poi prendo $u_3 \in \text{Span}(e_1, e_2)$...]

Fatto 2 Usando l'assioma di scelta si dimostra che esiste $\{e_i\}_{i \in I}$ ~~non nec. numerabile~~ tale che

- $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ se $i=j$ e 0 altrimenti
- per ogni $v \in H$ esiste un sottoinsieme $J \subseteq I$ numerabile tale che

$$v = \sum_{j \in J} \langle v, e_j \rangle e_j$$

— o — o —

Lemma (Serie assolutamente conv. in un Banach)

Sia V un Banach e sia $\{v_n\} \subseteq V$ una succ.

Allora

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < +\infty}_{\text{serie di numeri}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ converge}}_{\text{serie di vettori}}$$

Oss. Non vale il viceversa, nemmeno se $V = \mathbb{R}$

Dim. Poissau

$$S_m := \sum_{k=0}^m v_k$$

$$\hat{S}_m := \sum_{k=0}^m \|v_k\|$$

Allora per ogni $m > n$ vale

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m v_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|v_k\| = \hat{S}_m - \hat{S}_n$$

↑
triangolo

Conclusione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \{\hat{S}_n\} \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \{S_n\} \text{ è di Cauchy in } V$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ converge in } V$$

— ○ — ○ —

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 12

Note Title

05/10/2018

Ripassiamo: spazi $L^2(\Omega)$ e $\mathcal{L}^2$ Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto. Allora

$$L^2(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabili t.c. } \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty\}$$

(in realtà sarebbero classi di funzioni)

misura di Lebesgue

↑ quadrato della norma

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$$

Oss. Più in generale posso prendere uno spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$

insieme ↑

 σ -algebra↑ misura numerabilmente additiva sui disgiunti a valori in $[0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

$$L^2(X, \mathcal{M}, \mu) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mis. t.c. } \int_X |f(x)|^2 d\mu < +\infty\}$$

Perché è un Hilbert

- che è vettoriale è semplice
- che il prod. scalare è ben definito segue da $|AB| \leq \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2$
- che è def. positivo segue dal quoziente
- che è completo: → prendo $\{f_n\}$ di Cauchy e con il lemma di accelerazione trovo s. succ. t.c. $\|f_{n+1} - f_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ (fatto metrico). A questo punto

$$f_n = f_1 + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \dots + (f_n - f_{n-1})$$

Quindi dire f_n = somma di una serie che per il
 lemma di acc. è assolutamente conv.

Una succ. di C. con s. succ. conv. converge a sua volta

Def. $\ell^2 = \{ \text{successioni di reali } \{x_n\} \text{ t.c. } \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty \}$

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \quad (\text{converge per i motivi di sopra})$$

Perché è un Hilbert

Dim. canonica: $\ell^2 = L^2(\mathbb{N})$ rispetto alla misura che
 conta i punti

Dim. "elementare" Per comodità riscrivo

$$\ell^2 := \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|^2 < +\infty \}$$

Prendo una succ. $\{f_n\}$ di Cauchy e voglio dim. che
 converge.

Step 1 Dim. che $f_n(k) \rightarrow f_\infty(k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$
 (conv. puntuale)

Basta verificare che $\{f_n(k)\}$ è una succ. di C. di numeri
 il che segue da

$$|f_n(k) - f_m(k)|^2 \leq \|f_n - f_m\|_{\ell^2}^2$$

Step 2 Dimostro che $f_\infty \in \ell^2$. Mi serve bound unip.
 sulle somme parziali. Dato $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{k=0}^m |f_\infty(k)|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^m |f_n(k)|^2}_{\leq \|f_n\|_{\ell^2}^2} \leftarrow \begin{array}{l} \text{equilibrato per due} \\ \text{succ. di C. sono limitate} \end{array}$$

Step 3 Dimostro che le code sono unif. piccole

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 &= \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k) - f_{m_0}(k) + f_{m_0}(k)|^2 \\ &\leq 2 \underbrace{\sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k) - f_{m_0}(k)|^2}_{\leq \|f_m - f_{m_0}\|_{\ell^2}^2} + 2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_{m_0}(k)|^2 \end{aligned}$$

Sistema rigorosamente

• Mi viene dato $\varepsilon > 0$

• Scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\forall m \geq m_0 \quad \forall n \geq m_0 \quad \|f_m - f_n\|_{\ell^2}^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

• Visto d'uovo, scelgo M in maniera tale che

$$\sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \leq m_0$$

(che sono un numero finito)

Questo M va bene per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Step 4 Il valore di M dello step 3 va bene anche per f_∞ .
La dim. è un lemma dello Step 2.

Step 5 $f_m \rightarrow f_\infty$ in ℓ^2 .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |f_\infty(k) - f_m(k)|^2 &= \sum_{k=0}^{M-1} \dots + \sum_{k=M}^{\infty} |f_\infty(k) - f_m(k)|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} |f_\infty(k) - f_m(k)|^2 + 2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_\infty(k)|^2 + 2 \sum_{k=M}^{\infty} |f_m(k)|^2 \end{aligned}$$

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Scelgo N come nello step 3 in modo da avere $\frac{\varepsilon}{4}$
- Passo al limite nella somma finita e ottengo

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} LHS \leq \varepsilon$$

— o — o —

Oss.

Geometria 1: tutti gli spazi di Hilbert di dim. finita "sono" $\mathbb{R}^n$

Ist. An. Mat.: tutti gli spazi di H. separabili di dim. infinita sono ℓ^2 .

— o — o —

Hilbert NON separabile Metto su $\mathbb{R}$ la misura $\mathcal{H}^0$ che conta i punti

$$\mathcal{H}^0(A) = \begin{cases} +\infty & \text{se } A \text{ è infinito} \\ \text{numero di el. di } A & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}^0)$ è un Hilbert e non è separabile

[I suoi elementi sono funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sono $\neq 0$ solo su un insieme numerabile, e la loro norma è la serie.

Una base Hilbertiana + che numerabile sono le funzioni che valgono 1 in un p.to e 0 altrove].

— o — o —

Perché gli $L^2(\Omega)$ è separabile?

Un denso numerabile sono le comb. lin. a coeff. in $\mathbb{Q}$ di caratteristiche di prod. di interv. ad estremi razionali

Esercizio Considero $L^2((0, \pi))$.
Considero

$$u_n(x) = \sin(mx)$$

Queste stanno in L^2

Dico che $u_n \rightarrow 0$

Dici In teoria dovrei far vedere che

$$\int_0^\pi \sin(mx) v(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall v \in L^2((0, \pi))$$

Basta che lo testi per ogni v e sottoinsieme che spanna
un denso

Prendo le funzioni caratteristiche dei sottointervalli
 $(a, b) \subseteq (0, \pi)$. Ora il conto è facile

$$\int_a^b \sin(mx) dx \rightarrow 0$$

$$= \frac{1}{m} [\cos(ma) - \cos(mb)] \rightarrow 0 \quad \text{😊}$$

Esercizio $\sin^2(mx) \rightarrow \frac{1}{2}$

$$[\text{Precorso: } \sin^2(mx) = \frac{1 - \cos(2mx)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2mx)]$$

Achtung! La convergenza debole si comporta molto
male per composizione, cioè

$$f_n \rightarrow f_\infty$$

$$\not\Rightarrow \varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f_\infty)$$

(anche se φ è molto buona: lo
posso garantire solo per le affini)

ma ovviamente

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f_n(x)^2 dx \geq \int_0^\pi f_\infty(x)^2 dx.$$

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 13

Note Title

08/10/2018

SPAZI DI SOBOLEV 1 DIM

Caso "baby"

- $d = 1$ (dimensione 1)
- $k = 1$ (derivate prime)
- $\Omega = (a, b)$ (intervallo)

Caso generale

- dimensione d qualunque
- ordine di deriv. k qual.
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto qualunque

Def. (Derivata debole, def. W)Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, e sia $u \in L^1_{loc}((a, b))$.Si dice che u ammette derivata debole se esiste $v \in L^1_{loc}((a, b))$ tale che

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a, b)$$

Brutalmente: v gioca il ruolo di $u'(x)$ nella formula di integrazione per parti

Prop. Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

(1) (unicità) La deriv. debole, se esiste, è unica

(2) (linearità) [bla bla bla nel video]

Se v_1 è deriv. debole di u_1 e v_2 " " " " u_2 , allora $\alpha v_1 + \beta v_2$ è deriv. debole di $\alpha u_1 + \beta u_2$

(3) (compatibilità trivial con caso classico)

Se $u \in C^1((a, b))$, allora $u'(x)$ è la sua deriv. debole(4) (compatibilità meno trivial) Se $u \in L^1_{loc}((a, b))$ ammette derivata debole $v \in C^0((a, b))$, allora in realtà u era C^1 .

Dim.](1) Siano v_1 e v_2 due derivate deboli di u . Allora

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx &= - \int_a^b v_1(x) \varphi(x) dx \\ &= - \int_a^b v_2(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Ma allora

$$\int_a^b [v_1(x) - v_2(x)] \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a, b)$$

FLCV $\Rightarrow v_1(x) = v_2(x)$ per quasi ogni $x \in (a, b)$

(2) Ovvio: Linearità dell'integrale

(3) Ovvio: formula di integrazione per parti

(4) Sia $V(x)$ una primitiva di $v(x)$ (analisi $\pm$ in un intervallo)

$$V(x) := \int_{x_0}^x v(t) dt \quad x_0 \in (a, b) \text{ fisso}$$

Osservo che

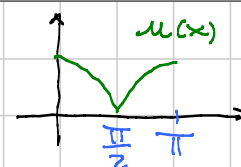
$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. deriv.} \\ \text{debole}}}{v(x)} \varphi(x) dx = \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{int. per} \\ \text{parti}}}{V(x)} \varphi'(x) dx$$

Ma allora

$$\int_a^b [u(x) - V(x)] \varphi'(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a, b).$$

Lemma DBR $\Rightarrow u(x) = \underbrace{V(x) + c}_{\text{funzione } C^1} \text{ per q.o. } x \in (a, b)$
 — 0 — 0 —

Esempio 1 $(a, b) = (0, \pi)$ $u(x) = |\cos x|$



Dico che u è derivabile in senso debole e la sua derivata è

$$v(x) := \begin{cases} -\sin x & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \sin x & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u(x) \varphi'(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \varphi'(x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x \varphi'(x) dx \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x) \varphi(x) dx + [\cos x \cdot \varphi(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\sin x) \varphi(x) dx - [\cos x \cdot \varphi(x)]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= - \int_0^\pi v(x) \varphi(x) dx + 2 \cos \frac{\pi}{2} \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Oss. Allo stesso modo si verifica che tutte le funzioni continue e C^1 a tratti hanno la derivata debole come uno si aspetta. Ce ne sono però altre.

Esempio 2 Consideriamo $H: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ (Heaviside)

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Questa non ammette derivata debole

$$\int_{-1}^1 H(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \dots$$

$$\text{LHS} = \int_0^1 \varphi'(x) dx = \varphi(1) - \varphi(0) = -\varphi(0)$$

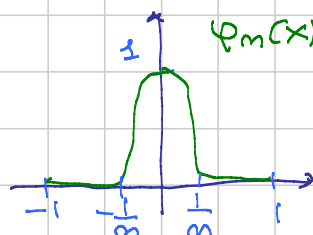
Quindi dovrebbe essere

$$\varphi(0) = \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

Se da scrivo con φ_n ho che

$$\text{LHS} \equiv 1$$



RHS $\rightarrow 0$ per conv. puntuale

$$\text{dominata da } |v(x) \varphi_n(x)| \leq |v(x)|$$

— o — o —

Def. (Spazio di Sobolev - Def. W)

compresso



Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $p \in [1, +\infty]$.

Si definisce $W^{1,p}(a,b)$ come l'insieme delle funzioni $u \in L^p(a,b)$ con derivata debole $v \in L^p(a,b)$.

Si verifica che $W^{1,p}(a,b)$ è uno spazio vettoriale e

$$\|u\|_{1,p,(a,b)} := \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}$$

è una norma sullo spazio.

— o — o —

Def. (Derivata debole, def. 4)

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ e sia $u \in L^1_{loc}((a,b))$.

Si dice che v è "la" derivata debole (in senso H) di u se esiste una succ. $\{u_n\} \subseteq C^\infty((a,b))$ tale che

$\uparrow$ non c'è il supp. compatto

(i) $u_n \rightarrow u$ in $L^1(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset (a,b)$

(ii) $\dot{u}_n \rightarrow v$ in $L^1(\Omega')$ " " "
 $\uparrow$ derivate vere

Cosa è valido della teoria precedente

- | | |
|-------------------|---------------------------------------|
| (1) Unicità | $\leadsto$ non ovvia |
| (2) linearità | $\leadsto$ ovvia |
| (3) Compatibilità | trivial $\leadsto$ derivati di approx |
| (4) " | non trivial $\leadsto$ non ovvio |
| (5) $ \cos x $ | $\leadsto$ vedi sotto |
| (6) $H(x)$ | $\leadsto$ non ovvio |

Per $|\cos x|$ pongo

$$u_n(x) := \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{n}}$$

Si vede che $u_n(x) \rightarrow |\cos x|$ anche uniformemente

$$\dot{u}_n(x) = \frac{-\cos x \cdot \sin x}{\sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{n}}}$$

e quindi

$$\dot{u}_n(x) \rightarrow \begin{cases} -\sin x & \text{se } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \sin x & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

in maniera dominata $|\dot{u}_n(x)| \leq 1$.

Prop. Se v è la derivata debole in senso H di u , allora v è anche la derivata in senso W .

Dim. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\int_a^b u_n(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b u_n'(x) \varphi(x) dx$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx$$

Questo mostra che $\underbrace{v(x)}_0$ è derivata in senso W .

Oss. Questo risolve i problemi lasciati aperti nei commenti

In realtà ho usato molto meno

Prop. Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $\{u_n\}$ una succ. in $L^1_{loc}((a,b))$ e siano $\{v_n\}$ le corrispondenti derivate deboli che sappiamo esistere.

Supponiamo che

Basta ancora
meno

$$\begin{array}{llll} u_n \longrightarrow u_\infty \text{ debole in } L^2(\Omega') & \text{per ogni } \Omega' \subset\subset (a,b) \\ u_n \longrightarrow v_\infty & \text{"} & \text{"} & \text{"} \end{array}$$

Allora $v_\infty = u'_\infty$ in senso debole (per ora in senso W)

Dim.: La stessa di sopra: usa solo conv. deboli!

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 14

Note Title

08/10/2018

Oss. Indichiamo con $C^{1,p}([a,b])$ l'insieme delle funzioni $u \in C^1$ in (a,b) tali che $u \in L^p$ e $u' \in L^p$ Osservo che

$$\|u\|_{1,p,[a,b]} := \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

è una norma in questo spazio.

Def. (Spazio di Sobolev - Def. H) vedi Oss. Analisi 2

Si definisce $H^{1,p}([a,b])$ il completamento di $C^{1,p}([a,b])$ rispetto alla distanza indotta dalla norma $\|\cdot\|_{1,p,[a,b]}$ (si può fare anche completando C^∞ rispetto alla stessa metrica)

In termini più concreti, accade che $u \in H^{1,p}([a,b])$ se e solo se esiste $\{u_n\} \subseteq C^\infty([a,b])$ tale che ↑ senza supp. opt

(i) $u_n \rightarrow u$ in $L^p([a,b])$

(ii) $u_n' \rightarrow v$ in $L^p([a,b])$
↑ derivata vera ↑ derivata sia in senso H sia in senso W

Oss. Come dimostrato prima vale che

$$H^{1,p}([a,b]) \subseteq W^{1,p}([a,b])$$

Teorema (In **Dim. 1** le funzioni $W^{1,p}$ sono le primitive delle loro derivate deboli)

Sia (a,b) intervallo, sia $u \in W^{1,p}(a,b)$ con derivata debole v . Poniamo

$$V(x) := \int_a^x v(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

Allora V è una funzione continua e $u(x) = V(x) + \text{cost.}$ per quasi ogni $x \in (a,b)$.

[Probabilmente vale anche con u e v in L^1_{loc} definendo la primitiva a partire da $x_0 \in (a,b)$]

Dim. Volei dimostrare che

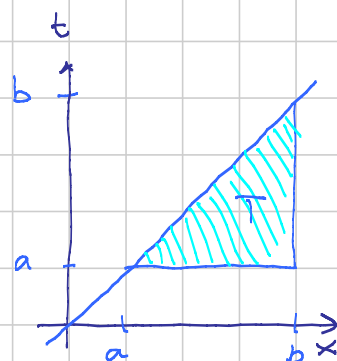
$$\int_a^b [V(x) - u(x)] \varphi'(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

Perché poi concludo con DBR.

$$\begin{aligned} \int_a^b V(x) \varphi'(x) dx &\stackrel{\text{def. } V}{=} \int_a^b \varphi'(x) \int_a^x v(t) dt \\ &= \iint_T \varphi'(x) v(t) dt \\ &\stackrel{\text{(commutabile risp. asse } t)}}{=} \int_a^b dt \int_t^b dx \varphi'(x) v(t) \\ &= \int_a^b v(t) dt \int_t^b \varphi'(x) dx \\ &= - \int_a^b v(t) \varphi(t) dt \\ &= \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx, \end{aligned}$$

da cui la tesi.

— o — o —



Teorema ($H=W$) Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e sia
 $p \in (1, +\infty)$ *escluso*

Allora

$$W^{1,p}((a,b)) = H^{1,p}((a,b))$$

Dim. $\geq$ già fatto

$\leq$: devo mostrare che ogni $u \in W^{1,p}$ si approssima bene
 con funzioni C^∞ .

Detta v la derivata debbole (in senso W) di u , la
 posso approssimare in $L^p((a,b))$ con funzioni C^∞
 Ottengo

$$v_m \rightarrow v \quad \text{in } L^p((a,b))$$

$$\text{Pongo } V_m(x) := \int_a^x v_m(t) dt \rightarrow V(x) = u(x) + c$$

Quindi basta porre $u_m(x) := V_m(x) - c$ ed è fatta
 — o — o —

Alcune proprietà si vedono bene con la def. H
 — o — o —

Ripasso: Ascoli - Arzelà (versione metrica)

Siano X e Y spazi metrici. Sia $f_n: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) X compatto

(ii) (compattezza a x fisso) per ogni $x \in X$ esiste un compatto
 $K \subseteq Y$ (K può dipendere da x) tale che

$$f_n(x) \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(iii) (Equicontinuità)

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in B_X(x, \delta) \quad \widehat{\forall n \in \mathbb{N}} \quad f_n(y) \in B_Y(f_n(x), \varepsilon)$$

(δ dipende da ε ed x , ma non da n)

Allora esiste s.succ. che converge uniformemente.

HÖLDERIANITÀ DELLE FUNZIONI DI SOBOLEV

Teorema (1 dim. assolutamente)

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $p \in (1, +\infty)$, sia p' l'esponente coniugato, cioè oscuro

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

e sia $u \in W^{1,p}([a,b])$.

Allora u è $\frac{1}{p'}$ Hölderiana in (a,b) , e anzi

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_{L^p} \cdot |x - y|^{1/p'} \quad \begin{array}{l} \forall x \in (a,b) \\ \forall y \in (a,b) \end{array}$$

(si interpreta: u coincide quasi ovunque con una funzione $\frac{1}{p'}$ Hölderiana)

Dim. Sia $v(x)$ la derivata debole, sia $V(x)$ come prima

$$V(x) := \int_a^x v(t) dt$$

Allora $u(x) = V(x) + \text{costante}$, quindi per ogni $x > y$

$$|u(x) - u(y)| = |V(x) - V(y)|$$

$$= \left| \int_y^x v(t) dt \right|$$

$$\leq \int_y^x |v(t)| dt$$

$$= \int_y^x |v(t)| \cdot 1 dt$$

$\in L^p \quad \in L^{p'}$

(Hölder)

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_y^x |v(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_y^x 1^{p'} dt \right)^{1/p'} \\ &\leq \left(\int_a^b |v(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \underbrace{\left(\int_y^x 1^{p'} dt \right)^{1/p'}}_{|x-y|^{1/p'}} \end{aligned}$$

Oss. I teoremi precedenti autorizzano a parlare del "valore di una funzione di Sobolev in un p.to" inteso "valore del rappresentante continuo".

Prop. Solito setting. Siano $u(x)$ e $v(x)$ in $W^{1,p}(a,b)$ con $p \in (1, +\infty)$.

Allora

$$\int_a^b u(x) \dot{v}(x) dx = - \int_a^b \dot{u}(x) v(x) dx + u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

↑
continua, quindi
 $u(x)\dot{v}(x)$ è integrabile
↑
i valori
puntuali hanno
senso

Dim. Si può fare a partire dalla def. W , ma è molto più semplice a partire dalla H

Prendo le approssimanti C^∞ $u_n \rightarrow u$ $v_n \rightarrow v$
 $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}$ $\dot{v}_n \rightarrow \dot{v}$

Sulle approx C^∞ vale la formula

$$\int_a^b u_n \dot{v}_n = - \int_a^b \dot{u}_n v_n + [u_n v_n]_a^b$$

e spero di passare al limite.

Lemma Se $u_n \rightarrow u_\infty$ in $L^p(a,b)$
 $\dot{u}_n \rightarrow v_\infty$ in $L^p(a,b)$

Allora

$u_n \rightarrow u_\infty$ UNIFORMEMENTE (a meno d's.s.u.c.)

Dim. Basta dim. che se u_n verificano le hp di A.A. l'equicontinuità segue dalla equi-kölderianità.
 Infatti

$$|u(y) - u(x)| \leq \underbrace{\|u\|_{L^p}}_{\text{sono limitate}} |x-y|^{1/p}$$

perché u è conv. in L^p

L'equicontinuità segue dalla equicontinuità di $\|u\|_{L^p}$.

Ist. Analisi Matematica

LEZIONE 15

Note Title

11/10/2018

ROAD MAP DEL METODO DIRETTO

Setting : S insieme, $F: S \rightarrow \mathbb{R}$ funzionale
 ↑ anche $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Obiettivo : dimostrare che esiste

$$\min \{ F(x) : x \in S \}$$

1 **Formulazione debole** Estendo il pbm. ad ambiente più generale

Cerco $\hat{S} \supseteq S$ e cerco $\hat{F}: \hat{S} \rightarrow \mathbb{R}$ che estende quella data

$$\hat{F}(x) = F(x) \quad \forall x \in S$$

(in realtà basta $\leq$)

2 **Compattezza** Cerco una nozione di conv. in $\hat{S}$ per cui almeno un sottolivello di $\hat{F}$ risulta non $\emptyset$ e compatto

$$\{x \in \hat{S} : \hat{F}(x) \leq M\} \neq \emptyset \text{ e cpt.}$$

(se tutti i sottolivelli, ancora meglio)

3 **Semicontinuità** Spero che $\hat{F}$ sia scl in $\hat{S}$ rispetto alla nozione di conv. di cui al punto 2

Se 1, 2 e 3 valgono a buon fine, allora $\hat{F}$ ha min. in $\hat{S}$

④ Regolarità Sia $\hat{x}_0 \in \arg\min \{ \hat{F}(x) : x \in \mathcal{S} \}$

Spero che • $\hat{x}_0 \in \mathcal{S}$ (ambiente originario)

• $\hat{F}(\hat{x}_0) = F(\hat{x}_0)$ (non scontato se ho p.to
 □ con disuguaglianza)

Se anche ④ è ok, allora $\hat{x}_0$ è p.to di min. di $F(x)$ su $\mathcal{S}$, quindi il pbm. originario ha minimo.

$$[\forall x \in \mathcal{S} \quad F(x) \geq \hat{F}(x) \geq \hat{F}(\hat{x}_0) = F(\hat{x}_0)]$$

— • — • —

Esempio

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b \frac{1}{2} u^2 + \arctan u^3 dx}_{F(u)} : \underbrace{\begin{cases} u \in C^1([a,b]) \\ u(a) = A, u(b) = B \end{cases}}_{\mathcal{S}} \right\}$$

① Formulazione debole $\hat{\mathcal{S}} = H^1((a,b)) = W^{1,2}((a,b))$
 con $u(a) = A, u(b) = B$
 hanno senso anche in H^1

$$\hat{F}(u) := \int_a^b \frac{1}{2} \underbrace{u^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{derivata} \\ \text{debole}}} + \underbrace{\arctan u^3}_{\substack{\uparrow \\ u \in C^0, \text{ quindi ha senso}}} dx \quad \text{😊}$$

② Compattezza Considero su H^1 la nozione di conv. per cui $u_n \rightharpoonup u_\infty$ se e solo se

- $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. in $[a,b]$
- $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ debole $L^2((a,b))$

Dico che i sottolivelli sono compatti rispetto a questa nozione.

Per ogni $M \in \mathbb{R}$, considero una succ. $\{u_n\} \subseteq H^1$ t.c.

$$\hat{F}(u_n) \leq M$$

$$\int_a^b \frac{1}{2} \dot{u}_n^2 + \arctan(u_n^3) \leq M$$

$$\int_a^b \dot{u}_n^2 \leq 2M - 2 \int_a^b \arctan(u_n^3)$$

$$\leq 2M + \pi(b-a)$$

Quindi le norme L^2 di $\dot{u}_n$ sono equi-limitate, quindi a meno di s.succ.

$$\dot{u}_{n_k} \rightharpoonup v_0 \text{ debole in } L^2$$

Inoltre una limitazione sulla norma L^2 delle derivate implica una limitazione sulla costante di $\frac{1}{2}$ -Hölder di u_n :

$$|u_n(y) - u_n(x)| \leq \underbrace{\|\dot{u}_n\|_{L^2}}_{\leq 2M + \pi(b-a)} \cdot |y-x|^{1/2} \quad \forall (y,x) \in [a,b]^2$$

$\leadsto$ equicontinuità delle u_n

Equicontinuità + DBC $\leadsto$ equilimitatezza delle u_n

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq |u_n(a)| + |u_n(x) - u_n(a)| \\ &\leq A + (2M + \pi(b-a)) \cdot |x-a|^{1/2} \\ &\leq |b-a|^{1/2} \end{aligned}$$

Applico Ascoli - Arzelà alla succ. $\{u_{n_k}\}$ che avvolge bene per le derivate e trovo una ulteriore s. succ.

$$u_{n_{k_i}} \longrightarrow u_\infty \quad \text{unif. in } [a,b]$$

Riassumendo abbiamo trovato

- $u_{n_{k_i}} \longrightarrow u_\infty \quad \text{unif. in } [a,b]$

- $\dot{u}_{n_{k_i}} \longrightarrow v_\infty \quad \text{debole } L^2$

Per il solito "doppio scambio" deduciamo che $\dot{u}_\infty = v_\infty$ e in particolare $u_\infty \in H^1$

$$\begin{aligned} \int_a^b u_{n_{k_i}}(x) \varphi'(x) dx &= - \int_a^b \dot{u}_{n_{k_i}}(x) \varphi(x) dx \\ \downarrow & \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \int_a^b u_\infty(x) \varphi'(x) dx &= - \int_a^b v_\infty(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

In conclusione i sottolivelli sono opt. rispetto alla nozione di conv. data

[3] Semicontinuità Se $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. e $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ posso dedurre che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{F}(u_n) \geq \hat{F}(u_\infty) \quad ?$$

• Sapendo che $u_n \rightarrow u_\infty$ unif., per analisi 2 sappiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \arctan(u_n^3) dx = \int_a^b \arctan(u_\infty^3) dx$$

- Usando la SCI della norma rispetto alla conv. debole sappiamo che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{2} u_n^2 dx \geq \int_a^b \frac{1}{2} u_\infty^2 dx$$

Per le proprietà del Liminf abbiamo la tesi

In particolare esiste $\min \{ \hat{F}(u) : u \in H^1 + \text{DBC} \}$

- [4] Spero che i minimi in H^1 siano in realtà in $C^1([a,b])$ a quel punto ho finito.

Roadmap:
 → ELE debole
 → passo iniziale
 → bootstrap

(ELE debole) Considero $u \in H^1$ p.to di minimo
 Considero $v \in C_c^\infty([a,b])$
 Pongo

$$\varphi(t) := \hat{F}(u+tv) = \int_a^b \frac{1}{2} (u+tv)^2 + \arctan(u+tv)^3$$

e impongo $\varphi'(0) = 0$

Sperando di poter derivare sotto il segno di integrale, ottengo

$$\varphi'(t) = \int_a^b (u+tv) v + \frac{3(u+tv)^2 v}{1+(u+tv)^6}$$

e quindi

$$\varphi'(0) = \int_a^b u v + \frac{3u^2}{1+u^6} v = 0$$

da cui

$$-\int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{u} \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi'}}{\dot{u}} = \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ g}}{\frac{3u^2}{1+u^6}} \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi}}{v} \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

$\Rightarrow g$ è la derivata debole di f !!!

Abbiamo quindi dimostrato che

$u \in H^1$ e la sua derivata debole è $\frac{3u^2}{1+u^6}$, cioè

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Derivata debole} \\ \text{della derivata debole}}}{(u)'} = \frac{3u^2}{1+u^6} \quad (\text{ELE classica interpretata})$$

$\rightarrow$ Passo iniziale: guadagnare regolarità su u

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0 \Rightarrow (u)' \in C^0$$

$$\Rightarrow u \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$$

$\uparrow$
compatibilità
caso classico

Ora (ELE) ha senso classico $u'' = \frac{3u^2}{1+u^6}$

$\rightarrow$ Bootstrap diretto fino a C^∞

$$u \in C^2 \Rightarrow \text{RHS} \in C^2 \Rightarrow u \in C^4 \Rightarrow \text{RHS} \in C^4 \\ \Rightarrow \dots \text{ fino a } C^\infty$$

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 16

Note Title

11/10/2018

Generalità sui teoremi di SCI

- "Ponte di funzione" Supponiamo $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. e voglio passare al limite

$$\int_a^b g(x, u_n(x)) dx$$

Se $g(x, s)$ è continua in (x, s) , allora questi termini passano al limite "gratis"

Per il futuro, basta supporre molto meno. Ad esempio

$u_n(x) \rightarrow u_\infty(x)$ puntualmente in $[a, b]$

$g(x, s)$ sia SCI nella variabile s e misurabile in x
 $g(x, s)$ limitata dal basso

In queste ipotesi posso usare il lemma di Fatou

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x, u_n(x)) dx \geq \int_a^b \liminf_{n \rightarrow \infty} g(x, u_n(x)) dx$$

$$\geq \int_a^b g(x, u_\infty(x)) dx$$

— o — o —

- Parte "di derivata" segue dalla SCI della norma se è u_i^2
 A quali

$$\int_a^b \psi(u) dx$$

posso generalizzare ?

Teorema Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, che supponiamo C^1 e t.c.
 $|\psi'(p)| \leq A|p| + B \quad \forall p \in \mathbb{R}$

Supponiamo che $v_n \rightarrow v_\infty$ debole in $L^2(a,b)$.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_n) dx \geq \int_a^b \psi(v_\infty)$$

Dim. Supponiamo generosamente che $\psi \in C^1$. Allora

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a)b \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(v_n(x)) dx &= \int_a^b \psi(\underbrace{v_\infty(x)}_a + \underbrace{v_n(x) - v_\infty(x)}_b) dx \\ &\geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx + \underbrace{\int_a^b \psi'(v_\infty(x)) \cdot (v_n(x) - v_\infty(x)) dx}_0 \end{aligned}$$

↓ per def. di
conv. debole

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{LHS} \geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx$$

Tutto vero perché $\psi'(v_\infty(x)) \in L^2(a,b)$ e questo a sua volta è vero perché

$$|\psi'(v_\infty(x))|^2 \leq (A|v_\infty(x)| + B)^2$$

↓
integrabile se $v_\infty \in L^2$.

— o — o —

Teoremi di compattezza

Obiettivo: sapendo che $F(u_n) \leq M$, dedurre che esiste una sottosuccessione t.c.

$$\begin{array}{ll} u_{m_k} & \rightarrow u_\infty \text{ unif.} \\ \dot{u}_{m_k} & \rightarrow \dot{u}_\infty \text{ debole } L^2 \end{array}$$

Per avere s.succ. conv. sulle derivate, spero di avere qualcosa del tipo

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad \| \dot{u}_n \|_{L^2} \leq M'$$

Caso tipico $F(u) = \int_a^b \psi(x, u) + g(x, u)$

Supponiamo

① $g(x, s)$ limitata dal basso da una costante

② $\psi(p)$ sta sopra una parabola

$$\psi(p) \geq Ap^2 - B \quad \text{con } A > 0 \quad g(x, s) \geq -C$$

Dim. Supponiamo $F(u_n) \leq M$. Allora

$$\begin{aligned} M \geq F(u_n) &= \int_a^b \psi(u_n) + g(x, u_n) \\ &\geq \int_a^b (A u_n^2 - B - C) dx \\ &= A \int_a^b u_n^2 - (B+C)(b-a) \end{aligned}$$

$$\leadsto \int_a^b u_n^2 dx \leq \frac{1}{A} \{ M + (B+C)(b-a) \} = M'$$

Esempio + delicato

$$F(u) = \int_a^b u^2 - u + \text{DBC}$$

Da $F(u) \leq M$ posso dedurre $\|u\|_{L^2} \leq M$?

Risposta : SI (ma non puoi se avessi $-u^3$)

Dim. Supponiamo di avere DBC $u(a)=A$ e $u(b)=B$

- Una stima su $\|u\|_{L^2}$ mi dà una stima sulla costante di Hölder

$$|u(y) - u(x)| \leq \|u\|_{L^2} \cdot |y-x|^{1/2} \quad \forall \dots$$

- Stima Hölder + DBC $\leadsto$ stima L^∞ su $u(x)$

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |u(a)| + |u(x) - u(a)| \\ &\leq A + \|u\|_{L^2} \cdot |b-a|^{1/2} \end{aligned}$$

- Stima L^∞ su $u(x)$ $\leadsto$ stima del basso sulla parte di funzione

$$-\int_a^b u(x) dx \geq -\{A + \|u\|_{L^2} \cdot |b-a|^{1/2}\} (b-a)$$

- Salvataggio finale. Suppongo $F(u) \leq M$ e scrivo

$$\begin{aligned} M \geq F(u) &= \int_a^b u^2 - \int_a^b u \\ &\geq \|u\|_{L^2}^2 - \{A + \|u\|_{L^2} \cdot |b-a|^{1/2}\} (b-a) \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme abbiamo ottenuto

$$M \geq \underbrace{\|\ddot{u}\|_{L^2}^2 - \alpha \|\ddot{u}\|_{L^2} - \beta}$$

Polinomio di 2° grado nella variabile $\|\ddot{u}\|_{L^2}$

- Analisi 1 : se $x^2 - \alpha x - \beta \leq M$, allora $|x| \leq M'$

($\forall \alpha, \beta, M \exists M'$ t.c. $\nearrow$)

Da una stima su $F(u)$ ottengo una stima su $\|\ddot{u}\|_{L^2}$.

Oss. Lo stesso ragionamento si ricicla per

$$\int_a^b \psi(\ddot{u}) + g(x, u)$$

purché

- $\psi(p) \geq Ap^2 - B$
- $g(x, s) \geq -C - D|s|^\alpha$ per un qualche $\alpha < 2$

Oss. Ho usato solo una DBC in un estremo.

Esempio (senza DBC) $F(u) = \int_a^b \ddot{u}^2 + (u - e^x)^2$

Sapendo $F(u) \leq M$ posso dedurre $\|\ddot{u}\|_{L^2} \leq M'$

$$\underbrace{\|u\|_{L^\infty} \leq M'}$$

Fuori sempre ottenuto da DBC + $\|\ddot{u}\| \leq M'$

- La stima $\|\ddot{u}\|_{L^2} \leq M$ (stesso M) è gratis perché $(u - e^x)^2 \geq 0$

- Sappiamo che

$$\int_a^b (u(x) - e^x)^2 dx \leq M$$

$\parallel \leftarrow$ tes. media integrale

$$(b-a) \cdot (u(c) - e^c)^2 \quad \text{con } c \text{ p.to misterioso in } (a,b)$$

Stima integrale $\leadsto$ stima puntuale in p.to misterioso

$$\begin{aligned} (u(c) - e^c)^2 &\leq \frac{M}{b-a} \leadsto u(c) \leq \left(\frac{M}{b-a}\right)^{1/2} + e^c \\ &\leq \left(\frac{M}{b-a}\right)^{1/2} + e^b = M' \end{aligned}$$

- Stima puntuale in p.to misterioso + equi-Hölder
 $\leadsto$ stima puntuale ovunque

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |u(c)| + |u(x) - u(c)| \\ &\leq M' + \|u\|_{L^2} \cdot |x-c|^{1/2} \\ &\leq M' + \|u\|_{L^2} \cdot |b-a|^{1/2} = M'' \\ &\quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

Stima integrale $\leadsto$ stima puntuale in p.to misterioso

(se in aggiunta ho stima su $\|u\|_{L^2}$) $\leadsto$ stima L^∞

Ist. Analisi Matematica

-

LEZIONE 17

Titolo nota

15/10/2018

APPROCCIO VARIATIONALE ALLE EQ. DIFF.

Obiettivo : voglio dim. che una certa eq. diff. ha soluzione.
 Mi invento un pbm. di min. per cui quella è
 ELE e dim. che il min. esiste
 (punto di vista capovolto)

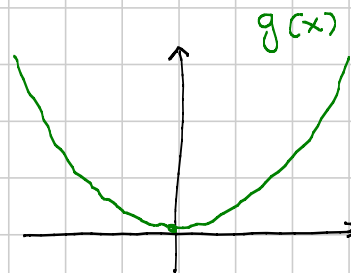
Esempio
$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 2018 \end{cases}$$

Oss. È un pbm. di Dirichlet, quindi non c'è una teoria di esistenza e unicità.

Cerco un funzionale di cui è ELE

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \arctan u \\ (Lp)' &= Ls \end{aligned}$$

Introduciamo
$$g(x) := \int_0^x \arctan s \, ds$$



Considero

$$F(u) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) \right) dx$$

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 + g(s)$$

ELE è quella data

Consideriamo il pm. di min

$$\min \{ F(u) : u \in C^2([0,1]), u(0)=0, u(1)=2018 \}$$

1 Formulazione debole

Esempio $F(u)$ a $H^1((0,1)) = W^{1,2}((0,1))$ con la stessa formula.

Oss. $\rightarrow$ u è ora la derivata debole

$\rightarrow$ le BC sono ben definite perché u ha un unico rappresentante continuo fino al bordo.

$$\min \{ F(u) : u \in H^1((0,1)), u(0)=0, u(1)=2018 \}$$

2 Compattezza dei sottolivelli

Da una stima su $F(u) \leq M$ voglio dedurre stime su u e u .

$$\rightarrow M \geq F(u) \geq \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 dx \leadsto \int_0^1 u^2 dx \leq 2M$$

$\uparrow$
uso $g(x) \geq 0$

$\rightarrow$ Dalla stima di prima ottengo

$$|u(y) - u(x)| \leq \sqrt{2M} \cdot |y - x|^{1/2} \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2$$

$\rightarrow$ Dalla prec. + $u(0)=0$ ottengo

$$|u(x)| \leq \sqrt{2M} \quad \forall x \in [0,1]$$

Considero dunque su $\mathbb{X}$ la nozione di convergenza per cui $u_n \rightharpoonup u_\infty$ se e solo se $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. in $[0,1]$
 $u_n \rightarrow u_\infty$ debole L^2

Le stime ottenute garantiscono la cpt. dei sottolivelli

$$F(u_n) \leq M \Rightarrow \|u_n\|_{L^2}^2 \leq 2M \Rightarrow u_{n_k} \rightarrow v_\infty$$

Le stime su costante di Hölder + $\|u\|_{L^\infty}$ grazie ad A.A. garantiscono

$$u_{n_{k_i}} \rightarrow u_\infty \text{ unif.}$$

Il solito discorso dice che $v_\infty = u_\infty$.

Perché $u_\infty \in \mathbb{X}$? Le DBC passano al limite per conv. unif.

[3] SCI rispetto alla stessa nozione

Praticamente gratis

→ se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n^2 dx \geq \int_0^1 u_\infty^2 dx$$

↑
la nozione è SCI

→ se $u_n \rightarrow u_\infty$ unif., allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(u_n(x)) dx = \int_0^1 g(u_\infty(x)) dx$$

In questo momento esiste il min in $\mathbb{X}$.

4 Regolarità

4.1 Ricavo ELE. Sia u un pto di min. Sia $v \in C_c^\infty((0,1))$

$$\varphi(t) := \int_0^1 \frac{1}{2} (\dot{u} + t\dot{v})^2 + g(u + tv)$$

Spero che

$$\varphi'(t) = \int_0^1 \dot{u}\dot{v} + t\dot{v}^2 + \underbrace{g'(u+tv)}_{\arctan(u+tv)} v$$

e quindi

$$\varphi'(0) = \int_0^1 \dot{u}\dot{v} + \arctan(u) v = 0$$

Potero derivare sotto il segno di integrale? Sarebbe una giustificazione sulla presunta derivata

$$\left| \underbrace{\dot{u}(x)\dot{v}(x)}_{\leq M} + t \underbrace{\dot{v}(x)^2}_{\leq M} + \arctan(u(x) + tv(x)) \underbrace{\dot{v}(x)}_{\leq M} \right|$$

$$\leq \underbrace{|\dot{u}(x)| \cdot M + M^2 + \frac{\pi}{2} \cdot M}_{\text{integrabile perché } \dot{u} \in L^2, \text{ quindi } \dot{u} \in L^1 \text{ essendo su un intervallo}}$$

4.2 Guadagno le prime derivate

Abbiamo ottenuto che

$$-\int_0^1 \underbrace{\dot{u}\dot{v}}_{\neq \dot{\varphi}} dx = \int_0^1 \underbrace{\arctan u}_g \cdot \underbrace{v}_\varphi dx \quad \leadsto g \text{ e la deriv. debole di } f$$

$$\underbrace{(\dot{u})'} = \arctan u$$

↑ derivata debole di derivata debole

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0$$

$$\Rightarrow u \text{ ha derivata debole } C^0 \Rightarrow u \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$$

↑
Le funzioni Sobolev
sono prim. delle
loro deriv. deboli

Ora ELE è con derivate vere $u'' = \arctan u$

[4.3] Con il bootstrap si arriva a C^∞ .

In questo momento il pbm. originario ha almeno una
soluzione, che è pure C^∞ .

— o — o —

UNICITÀ Disaviamo 2 approcci

1° modo: quando il funzionale

Ocdio! L'unicità del minimo NON basta

Fase 1: dico che ogni soluz. del pbm. dato è pto di
min. del funzionale in X .

Questo segue dalla convessità di $L(s,p)$ rispetto alla
coppia (s,p)

$$L(s_0+s, p_0+p) \geq L(s_0, p_0) + s L_s(s_0, p_0) + p L_p(s_0, p_0)$$

Prendevo un competitor $w = u+v$ e facevo il conto

Fase 2: dico che il minimo è unico. La dim. è
analoga usando la stessa convessità di L in (s,p)
(notare che in questo caso basterebbe in p)

2° modo: quando solo 2° eq. Siano u e v due soluz.

$$\ddot{u} = \arctan u \quad + DBC$$

$$\ddot{v} = \arctan v \quad + DBC$$

Sottraggo $\ddot{u} - \ddot{v} = \arctan u - \arctan v$

Moltiplico per $u-v$

$$(\ddot{u} - \ddot{v})(u-v) = (\arctan u - \arctan v)(u-v)$$

≥ 0 perché $\arctan$ è monotona crescente

$$-\int_0^1 (\ddot{u} - \ddot{v})^2 dx + \underbrace{[(u-v)(\ddot{u} - \ddot{v})]_0^1}_{=0 \text{ per DBC}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (\ddot{u} - \ddot{v})^2 dx \leq 0 \Rightarrow \ddot{u} - \ddot{v} \equiv 0$$

$$\Rightarrow u - v \equiv \text{cost}$$

$$+ DBC \Rightarrow u \equiv v$$

La soluzione è convessa?

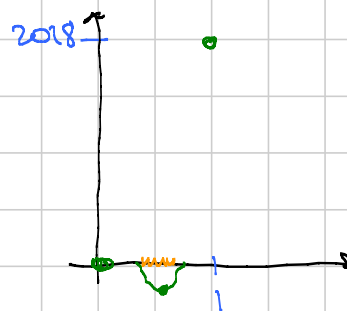
Quando 2° eq. $\ddot{u} = \arctan u$

Quindi è convessa se $\ddot{u} \geq 0$

Con un classico argomento di troncamento deduco che $u(x) \geq 0$ sempre.

La soluzione diventa > 0 subito? Sì, e anzi $\dot{u}(0) > 0$

Sì, se fosse $\dot{u}(0) = 0$ allora per unicità del plan. di Cauchy avrei $u \equiv 0$.



Ist. Analisi Matematica

- LEZIONE 18

Titolo nota

15/10/2018

Varianti della lezione precedente

Stessa equ., diverse BC

$$\text{Esempio 1} \quad \begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 2018 \\ \ddot{u}(1) = 0 \end{cases}$$

$$\min \{ F(u) : u \in H^1((0,1)), u(0) = 2018 \text{ e BASTA} \}$$

Forse 1, 2, 3 esattamente come prima

[4] Usando $v \in C_c^\infty((0,1))$ ottengo come prima

$$(\ddot{u})' = \arctan u \quad \text{da cui si arriva fino a } u \in C^\infty$$

Poi uso perturbazioni v che non si annullano in $x=1$

$$\int_0^1 \ddot{u} \dot{v} + \arctan(u) v = 0$$

$$\int_0^1 (-\ddot{u} + \arctan u) v + [\ddot{u} v]_0^1$$

$$\underbrace{\ddot{u}(1)}_{=0} \underbrace{v(1)}_{\neq 0} - \underbrace{\ddot{u}(0)}_0 \underbrace{v(0)}_0$$

Horde la NBC $\ddot{u}(0) = 0$ NON va messa nel piano di minimizzazione, una variazione "on the road"

Unicità: NO PBM.

Esempio 2
$$\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u + x \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(1) = 0 \end{cases}$$

$$F(u) := \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) + xu$$

$$\min \{ F(u) : u \in H^1 \text{ e BASTA} \}$$

- [1] No problem [3] No plan. (se abbiamo fatto 2)
 [4] No plan, bisogna far nascere le NBC su due radici
 [2] Da $F(u) \leq M$ voglio stime su $\dot{u}$ e u

Osservo che esiste una costante $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$g(s) + xs \geq -A \quad \forall x \in [0,1], \forall s \in \mathbb{R}$$

Infatti
$$g(s) + xs \geq \underbrace{g(s) - |s|}_{\substack{\text{tende a } +\infty \text{ per } s \rightarrow \pm\infty, \text{ quindi} \\ \text{è limitata dal basso}}}$$

Da $F(u) \leq M$ ottengo
$$\frac{1}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 dx \leq M + A \quad (\odot)$$

Questo garantisce stima su cost. di Hölder, una serie di stime su $|u(x)|$ unif.

Non ho DBC, quindi devo sperare in stime integrali
 Per questo dico che vale

$$g(s) + xs \geq -A + \frac{1}{2}|s| \quad \text{e uso che } \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2}$$

$$M \geq F(u) \geq \int_0^1 -A + \frac{1}{2}|u| \quad \leadsto \int_0^1 |u| \leq 2(M+A)$$

$\leadsto$ stima di $|u(c)|$ con c misterioso (teo. media integrale)

$\leadsto$ + Hölder $\Rightarrow$ conclusione

Esempio 3 $\ddot{u} = \arctan u$

$$u(0) = 2018$$

$$\dot{u}(1) = 3$$

NBC non omogenea

Ricordo che su the road nasce $L_p(x, u, \dot{u}) = 0$

quindi mi piacerebbe che fosse $L_p = \dot{u}^2 - 3$

Ma allora basta usare

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2}p^2 - 3p + g(s)$$

Anche con questa Lagrangiana ELE è $\ddot{u} = \arctan u$

$$F(u) := \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 - 3\dot{u} + g(u)$$

che minimizzo con DBC $u(0) = 2018$ (la NBC nasce dopo)

Cambia un minimo in fase compattezza

$$\frac{1}{2}p^2 - 3p + g(s) \geq \frac{1}{4}p^2 - A \quad \forall p \in \mathbb{R} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\frac{1}{4}p^2 - 3p}_{\substack{\uparrow \\ \text{lim. dal} \\ \text{basso}}} + \underbrace{g(s)}_{\geq 0}$$

$$M \geq F(u) \geq \int_0^1 \frac{1}{4} \dot{u}^2 - A \quad \leadsto \quad \int_0^1 \dot{u}^2 \leq 4(M+A) \quad \text{☺}$$

— 0 — 0 —

Esempio 4 $\ddot{u} = \arctan u$

$$\dot{u}(0) = 3$$

$$\dot{u}(1) = 4$$

1° modo Cambio variabili $u(x) = v(x) + q.c. \text{ che soddisfa le NBC}$

$$u(x) = v(x) + 3x + \frac{1}{2}x^2$$

Se $\dot{v}(0) = \dot{v}(1) = 0$, allora u soddisfa le cond. date.

che cosa risolve v ?

$$\underbrace{\ddot{v} + 1}_{\ddot{u}} = \arctan\left(v + 3x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

$$\ddot{u} = \arctan u$$

$$\ddot{v} = \arctan\left(v + 3x + \frac{1}{2}x^2\right) - 1$$

Non resta che dare una formulazione variazionale di questo pbm.

Diventa

$$\min \left\{ \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{v}^2 + g\left(v + 3x + \frac{1}{2}x^2\right) - v : v \in H^1 \right\} \text{ e BASTA}$$

Verificare che tutto funziona nel metodo diretto.

2° modo Cerco una funzione che vale 3 in 0 e 4 in 1
ad esempio $3+x$.

Vonei on the road

$$L_p = \infty$$

$$\dot{u} - 3 - x = 0$$

$$L_p = p - 3 - x$$

Possò usare come Lagrangiana

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 - (3+x)p + g(s)$$

Vediamo chi è ELE: $(L_p)' = L_s$

$$(u - 3 - x)' = \arctan u$$

$$u'' - 1 = \arctan u$$

↑ vorrei $u-1$

Secondo tentativo, forse buono

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 - (3+x)p + g(s) - s$$

$$\min_u \left\{ \int_0^1 \frac{1}{2} u'^2 - (3+x)u' + g(u) - u : u \in H^1 \text{ e basta} \right\}$$

[Per la compattezza servono stime del tipo

$$\frac{1}{2} p^2 - (3+x)p \geq \frac{1}{4} p^2 - A$$

$$g(s) - s \geq \frac{1}{4} |s| - B$$

il resto è come sempre]

Esempio (nt+1)

$$u'' = \frac{\arctan u}{7 + \sin u}$$

+ DBC

$$(7 + \sin u)u' = \arctan u$$

$$L_p = 7p - \cos p$$

$$(L_p)' = (7u' - \cos u)' = 7u'' + \sin u u' \quad (\odot)$$

$$L(x, s, p) := \frac{7}{2} p^2 - \sin p + g(s)$$

Tutto tranquillo fino alla risposta

La prima forma di ELE diventa

$$\int_0^1 (\mp u' - \cos u') v' + \arctan u \cdot v = 0$$

da cui al solito modo

$$(\mp u' - \cos u')' = \arctan u$$

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0 \Rightarrow \mp u' - \cos u' \in C^1$$

$$\varphi(u) \in C^1$$

Con $\varphi(p) := \mp p - \cos p$

Ora $\varphi'(p) \geq \delta$ sempre, quindi φ ha inversa di classe C^1 , anzi C^∞

$$\varphi(u) \in C^1 \quad \text{allora} \quad u = \varphi^{-1}(\text{funzione } C^1) \in C^1$$

— o — o —

Ist. Analisi Matematica

-

LEZIONE 19

Note Title

18/10/2018

CONVESSITÀ VS SEMICONTINUITÀProblema guida

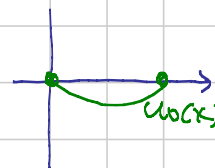
$$\min \left\{ \int_0^1 \ddot{u}^4 + u^3 : u \in C^1([0,1]), u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

$$\text{ELE: } (L_p)' = L_s \quad (4\ddot{u}^3)' = 3u^2$$

$$4\ddot{u}^2 \ddot{u} = u^2$$

1° fatto : $u \equiv 0$ risolve ELE + DBC, ma non è p.to min.

Prendo una qualunque $u_0(x)$ negativa che soddisfa le DBC. Allora



$$F(\varepsilon u_0) = \varepsilon^4 \int_0^1 \ddot{u}_0^4 dx + \varepsilon^3 \underbrace{\int_0^1 u_0^3 dx}_{< 0} < 0 \quad \text{per } \varepsilon \text{ piccolo}$$

Quindi, se esiste, il minimo è negativo.

Metodo diretto

$$\text{Formulazione debole} \quad F(u) := \int_0^1 \ddot{u}^4 + u^3$$

per u dove? $\rightarrow W^{1,4}$ va bene

$\rightarrow W^{1,2}$ va bene ugualmente, a patto di accettare che F può assumere il valore $+\infty$ (quando faccio i sottolivelli non cambia nulla)

Compattezza

$$\{u \in W^{1,2} + DBC: F(u) \leq M\}$$

Domanda: da $F(u) \leq M$, riesco ad avere una stima su $\dot{u}$?

2° fatto: realizzo la stima

Le funzioni con $\int_0^1 \dot{u}^4 < +\infty$ sono $\frac{3}{4}$ -Hölderiane

$$|u(y) - u(x)| \leq \left\{ \int_0^1 \dot{u}^4 dx \right\}^{1/4} |y-x|^{3/4} \quad (\text{solita})$$

Hölderianità + DBC $\leadsto$ stima L^∞

$$|u(x)| = |u(x) - u(0)| \leq \left\{ \int_0^1 \dot{u}^4 dx \right\}^{1/4} \underbrace{|x|^{3/4}}_{\leq 1}$$

Ma allora

$$\left| \int_0^1 u(x)^3 dx \right| \leq \int_0^1 |u(x)|^3 dx \leq \left\{ \int_0^1 \dot{u}^4 dx \right\}^{3/4} = \|\dot{u}\|_{L^4}^3$$

Finalmente

$$M \geq F(u) = \|\dot{u}\|_{L^4}^4 + \int_0^1 u^3 dx \geq \|\dot{u}\|_{L^4}^4 - \|\dot{u}\|_{L^4}^3$$

Osservo che la funzione $\varphi(x) = x^4 - x^3$ tende a $+\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$.



Quindi da $\varphi(\|\dot{u}\|_{L^4}) \leq M$ deduco

$$\|\dot{u}\|_{L^4} \leq M^1$$

Supponiamo di aver formulato in $W^{1,2}$.

Da una stima su $\|u\|_{L^4}$ posso dedurre

$$\|u\|_{L^2} \leq M''$$

Fatto generale : $1+x^4 \geq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \leq \underbrace{\int_0^1 u(x)^4 dx}_{\text{se è limitato}} + \int_0^1 1 dx$$

A questo p.to so che esiste una s.succ. (che non riusciamo) che converge debolmente.

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad u_n \rightharpoonup v_\infty \quad \text{in } L^2 \text{ debole}$$

Allo stesso modo di sempre trovo ulteriore s.succ. t.c.

$$u_n \rightarrow v_\infty = u_\infty \quad u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif.}$$

Semicontinuità Sul termine $\int u^3$ non ci sono pbm.
Sulle DBC nemmeno

Vonci che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n^4 dx \geq \int_0^1 u_\infty^4$$

Il problema è che lo abbiamo dim. per $\int_a^b \psi(u)$
supponendo $\psi'(p)$ a crescita lineare.
— o — o —

Occorre aprire una parentesi

CONVERGENZA DEBOLE IN L^p

(X, m, μ) spazio di misura

Convergenza debole in L^2 : $u_n \rightarrow u_\infty$ in $L^2(X, m, \mu)$

Se

$$\int_X u_n(x) v(x) d\mu \rightarrow \int_X u_\infty(x) v(x) d\mu \quad \forall v \in L^2(\dots)$$

Def. Sia (X, m, μ) sp. di misura, sia $p \in [1, +\infty]$ (estremi inclusi), sia $\{u_n\} \subseteq L^p(X, m, \mu)$, sia u_∞ nello stesso spazio.

Si dice che

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{debole in } L^p(\dots)$$

Se

$$\int_X u_n(x) v(x) d\mu \rightarrow \int_X u_\infty(x) v(x) d\mu$$

per ogni $v \in L^{p'}(X, m, \mu)$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Più precisamente, la notazione giusta è

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ in } L^p \text{ se } p < +\infty$$

$$u_n \xrightarrow{*} u_\infty \text{ debole } * \text{ in } L^\infty \text{ se } p = +\infty$$

↑ ragioni misteriose.

Oss. Se $\mu(X) < +\infty$, allora $L^{p_1} \subseteq L^{p_2}$ se $p_1 \geq p_2$, quindi in questo caso la convergenza più debole di tutte è quella L^1 , perché richiede di scontrarsi solo con L^∞ , che è lo spazio più piccolo.

Prop. Se la successione $\{u_n\}$ è limitata in L^p , allora basta testare la conv. debole contro un insieme di funzioni v che spannano un denso in $L^{p'}$.

Dim. Se vale per ogni $v \in V$, allora vale per ogni $v \in \text{Span}(V)$ (linearità di integrali e limiti).
Facciamo vedere che vale per ogni $v \in L^{p'}$

$$\begin{aligned} & \left| \int_X u_n(x) v(x) - \int_X u_\infty(x) v(x) \right| \\ & \leq \left| \int_X u_n(x) v(x) - \int_X u_n(x) v_\varepsilon(x) \right| \quad (1) \\ & \quad + \left| \int_X u_n(x) v_\varepsilon(x) - \int_X u_\infty(x) v_\varepsilon(x) \right| \quad (2) \\ & \quad + \left| \int_X u_\infty(x) v_\varepsilon(x) - \int_X u_\infty(x) v(x) \right| \quad (3) \end{aligned}$$

Formalmente:

- mi vengono dati $v \in L^{p'}$ e $\varepsilon > 0$
- Scelgo $v_\varepsilon \in \text{Span}(V)$ in modo da sistemare (1) e (3)

$$(1) \leq \int_X |u_n(x)| \cdot |v(x) - v_\varepsilon(x)| \leq \underbrace{\|u_n\|_{L^p}}_{\leq M} \cdot \underbrace{\|v - v_\varepsilon\|_{L^{p'}}}_{\text{piccolo quanto voglio}}$$

Stessa cosa per (3)

- Ricevuta v_ε , scelgo n abbastanza grande in modo da avere (2) piccola

Corollario Se $\mu(X) < +\infty$, $q > p$, $\{u_n\}$ è limitata
in L^p e

tra 15 min. non serve

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^p \quad \boxed{\text{con } u_\infty \in L^q}$$

allora $u_n \rightarrow u_\infty$ in L^q (* se $q = +\infty$)

(Limitata nello spazio diff. + conv. deb. nel facile
 $\Rightarrow$ conv. debolm. nel difficile)

[Dim: basta osservare che $L^{p'}$ è denso in $L^{q'}$]
— o — o —

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 20

Note Title

18/10/2018

Domanda : $\|u_m\|_{L^4} \leq M' \leadsto \|u_m\|_{L^2} \leq M''$

$\leadsto$ esiste $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ in L^2 debole.

Posso dedurre che $u_\infty \in L^4$ e

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 u_{m_k}^4 \geq \int_0^1 u_\infty^4 \quad ?$$

Lemma di approssimazione Sia $\psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convessa

Allora esiste una successione

$$\psi_n: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

(i) tutte le ψ_n sono convesse

(ii) tutte le ψ_n sono di classe C^4 con gradiente limitato
(ma la limitazione dipende da n)

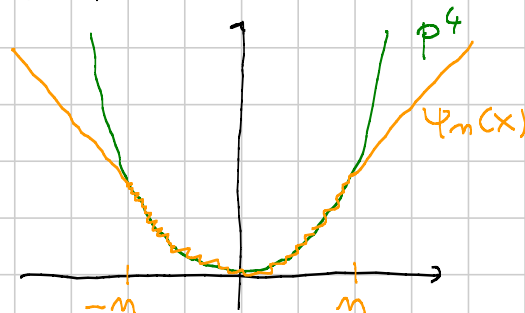
(iii) $\psi_n(x) \rightarrow \psi(x)$ puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}^d$

(iv) la convergenza è monotona, cioè

$$\psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Oss. In casi concreti la costruzione è semplice.

Ad esempio $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\psi(p) = p^4$



Teorema Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa
 Sia (X, m, μ) con $\mu(X) < +\infty$
 Sia $\{v_n\} \in L^1(X, m, \mu)$
 Supponiamo che
 $v_n \rightarrow v_\infty$ debole in L^1
 Allora

$$\liminf \int_X \psi(v_n) d\mu \geq \int_X \psi(v_\infty) d\mu$$

Dim Caso base: $\psi \in C^1$ con ψ' limitata.
 Ricordiamo la solita

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a) b \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Da questa

$$\begin{aligned} \int_X \psi(v_n) &= \int_X \psi(v_\infty + (v_n - v_\infty)) \\ &\geq \int_X \psi(v_\infty) + \underbrace{\int_X \psi'(v_\infty) \cdot (v_n - v_\infty)}_{\downarrow 0} \end{aligned}$$

$\in L^\infty$ perché ψ' è limitata.

Caso con ψ generica: approssimo ψ come nel Lemma
 (per chiarezza chiamo ψ_ε le approx)

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X \psi(v_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X \psi_\varepsilon(v_n) \\ &\geq \int_X \psi_\varepsilon(v_\infty) \end{aligned}$$

vale per ogni $\varepsilon > 0$. A dx posso passare al limite per Beppo Levi grazie al fatto che le ψ_ε sono monotone in ε .

Oss. Il teorema vale più in generale per integrande che dipendono da 2 o più variabili, tipo

$$\begin{array}{l} v_n \rightarrow v_\infty \\ w_n \rightarrow w_\infty \end{array} \quad \text{debole } L^1$$

Allora

$$\liminf \int_{\mathbb{R}^n} \psi(v_n, w_n) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \psi(v_\infty, w_\infty)$$

Torniamo all'esempio Nella formulazione $W^{1,2}$ sappiamo che

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ in } L^2 \quad u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif.}$$

Grazie al tes. precedente sappiamo che $u_\infty \in L^4$ e che

$$\liminf \int_{\mathbb{R}^n} u_n^4 \geq \int_{\mathbb{R}^n} u_\infty^4$$

Finalmente abbiamo esistenza della soluzione debole.

[Abbiamo usato che la convergenza debole L^2 implica la debole L^4]

Se usavamo la formulazione $W^{1,4}$ potremmo ricorrere ad un tes.

Teorema (misterioso) Sia (X, m, μ) spazio di misura

Sia $p \in [1, +\infty]$ (NOTA BENE: 1 escluso)

Sia $\{u_n\}$ una succ. limitata in $L^p(X, m, \mu)$

Allora esiste una sottosuccessione che converge debolmente in L^p . (si intende debole * se $p = +\infty$)

Si dimostra facilmente sotto 2 ipotesi aggiuntive

- $\mu(X) < +\infty$
- $p \geq 2$

$\{u_n\}$ limitata in $L^p \xRightarrow{\mu(X) < +\infty} \{u_n\}$ limitata in L^2

teoria sp.
di Hilbert

$\Rightarrow u_{n_k} \rightharpoonup u_{\infty}$ debole L^2

teo.
precedenti

$\Rightarrow u_{\infty} \in L^p$ e $u_{n_k} \rightharpoonup u_{\infty}$
debole L^p

— o — o —

Oss. Se $p = 1$ non c'è verso.

Basta prendere $L^1([-1,1])$.

Le u_n in figura sono
limitate in L^1 .

Si verifica facilmente che
per ogni $\varphi \in C^0([-1,1])$ vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 u_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

Abbiamo visto che non esiste nessuna $v \in L^1$ tale che

$$\int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C^0([-1,1])$$

(vedi 1ª lezione sui Sobolev)

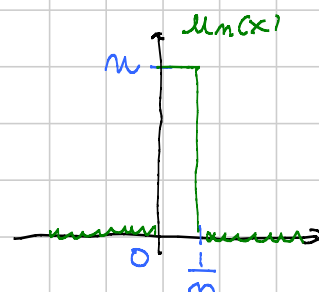
— o — o —

Teorema (ancora + misterioso) Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ superlineare,
cioè

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{\psi(p)}{|p|} = +\infty$$

aggiunto dopo video

Sia $\{u_n\} \subseteq L^1(X, m, \mu)$ con $\mu(X) < +\infty$ t.c.



$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(u_n(x)) \, d\mu \leq M$$

Allora esiste $u_n \xrightarrow{\quad} u_\infty$ debde L^1 .

Torniamo all'esempio e andiamo in fase regolarità.

Al solito modo troviamo ELE in forma integrale

$$-\int_0^1 4u^3 v' = \int_0^1 3u^2 v \quad \forall v \in C_c^\infty(0,1)$$

da cui deduco che $\underbrace{(4u^3)'}_{\text{qui tutto debole}} = 3u^2$

$u \in W^{1,2}$ o $W^{1,4}$ a scelta $\Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0$

$$\Rightarrow u^3 \in C^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow u \in C^1$$

se $f^3 \in C^0 \leadsto f \in C^0$
se $f^3 \in C^1 \not\leadsto f \in C^1$

$\frac{1}{3}$ -Hölder

Analisi 1: se $f^3 \in \text{Lip}$ e f è continua $\Rightarrow f \in C^{0,1/3}$

Nel nostro caso $\left. \begin{array}{l} u \in C^0 \\ u^3 \in C^1 \subseteq \text{Lip} \end{array} \right\} \Rightarrow u \in C^{0,1/3}$

quindi $u \in C^{1,1/3}$. Non è detto che $u \in C^2$, anzi in questo caso si dimostra che u è solo $\frac{1}{3}$ -Hölder

Ovviamente $u \in C^\infty$ nei p.ti in cui u non si annulla

In questo caso esiste $x_0 \in (0,1)$ t.c. $u'(x_0) = 0$ (Rolle)

Ist. Analisi Matematica — LEZIONE 21

Note Title

19/10/2018

Esempio precedente:

$$F(u) = \int_0^1 \dot{u}^4 + u^3$$

Minimizzare $F(u)$ con DBC $u(0) = u(1) = 0$.→ Dimostrare che $F(u) \leq M \rightsquigarrow \|\dot{u}\|_{L^4} \leq M'$ → $\|\dot{u}\|_{L^4} \leq M' \rightsquigarrow \|\dot{u}\|_{L^2} \leq M'' \rightsquigarrow$ se $\{u_n\}$ sta in un sottolivello esiste $\dot{u}_{n_k} \rightharpoonup \dot{u}_\infty$ in L^2 → Per la semicontinuità bastava $\dot{u}_{n_k} \rightharpoonup \dot{u}_\infty$ debole L^2

→ In realtà c'era pure $\dot{u}_{n_k} \rightharpoonup \dot{u}_\infty$ debole L^4
 Da questa, in questo caso specifico, si può mostrare la SCI senza passare attraverso il tes. generale che richiedeva il lemma di approx

Se $v_n \rightharpoonup v_\infty$ debole in L^4 , allora $\liminf \int v_n^4 \geq \int v_\infty^4$ Vale infatti $(a+b)^4 \geq a^4 + 4a^3b$ (disug. di convessità)
 $\psi'(a)$

$$\int_0^1 v_n^4 = \int_0^1 [v_\infty + (v_n - v_\infty)]^4 \geq \int_0^1 v_\infty^4 + 4 \int_0^1 v_\infty^3 (v_n - v_\infty)$$

Se sapessi che v_∞^3 sta in $L^{4/3}$ allora avrei finito,
 ma questo è equivalente a chiedere che $v_\infty \in L^4$.

Per il p.to di minimo u (non so davvero che è unico)
la regolarità max è $C^{1,1/3}$.

C'è un p.to x_0 t.c. $\dot{u}(x_0) = 0$. Se
ce ne sono tanti, prendo l'inf.

So che $\dot{u}(x) \neq 0$ in $[0, x_0)$, quindi
in questo intervallo $u \in C^\infty$.

Supponiamo che $\ddot{u} \in C^{0,1/3+\alpha}$, quindi è + regolare.

$$\frac{|\dot{u}(x) - \dot{u}(x_0)|}{|x - x_0|^{1/3+\alpha}} = \frac{|\dot{u}(x)|}{|x - x_0|^{1/3}} \cdot \frac{1}{|x - x_0|^\alpha}$$

↓ ha limite $\neq 0$
↓ ∞ per $x \rightarrow x_0^-$

Elevo tutto al cubo e ottengo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{|\dot{u}(x)|^3}{|x - x_0|} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\dot{u}(x)^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{3\dot{u}(x)\ddot{u}(x)^2}{1}$$

↑ considero i segni
 ↑ Hôp (posso fare il conto prima di x_0)

$$12\dot{u}\ddot{u}^2 = 3\dot{u}^2 \quad (ELE)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{3}{4} \dot{u}(x)^2 = \frac{3}{4} \dot{u}(x_0) \neq 0.$$

Ci sono potenziali se $x_0 = 0$. Cosa ci è servito

→ un p.to in cui $\dot{u}$ si annulla preceduto da un
intervallo in cui $\dot{u}$ non si annulla

Per forza esiste $x_1 \in (0, 1)$ t.c. $\dot{u}(x_1) \neq 0$.

Pengo

$$x_0 := \sup \{x < x_1 : \dot{u}(x) = 0\} \quad \text{oppure}$$

$$x_0 := \inf \{x > x_1 : \dot{u}(x) = 0\}$$

Uno dei due ha la proprietà richiesta.

— 0 — 0 —

Esempi di non unicità per eq. diff. con DBC

$$\begin{cases} u'' = -\lambda \sin u \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $u \equiv 0$ è soluzione per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se λ è grande, non è l'unica

$$F_\lambda(u) := \int_0^\pi \frac{1}{2} u'^2 + \lambda \cos u$$



Per λ grande $F_\lambda(u)$ può assumere valori negativi.

Prendo $u_0(x)$ tale che

$$\int_0^\pi \cos(u_0(x)) dx < 0$$

Per λ grande $F_\lambda(u_0) < 0 \leadsto u(x) \equiv 0$ non è univ.

Oss. L'assenza di convessità nella coppia (s, p) è fondamentale.

— o — o —

Tentativo di teorema

$$F(u) := \int_a^b |u'|^p + g(x, u) \quad \min \{ F(u) : \text{DBC} \}$$

Condizioni suff. per l'esistenza del minimo

- $p > 1$
- stima dal basso su g

$$g(x, s) \geq -A - B|s|^q \quad \text{con } q < p$$

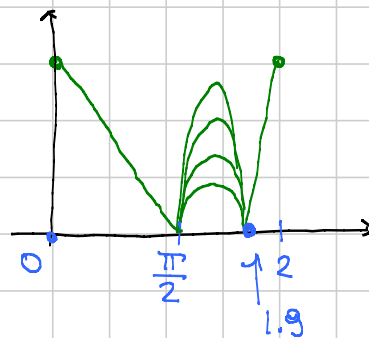
- costante di $\frac{1}{p}$ -Hölder $\leq k_1 \|\dot{u}\|_{L^p}$
- $|u(x)| \leq k_2 \|\dot{u}\|_{L^p} + k_3$
 $\uparrow$ DBC
- $\int_a^b g(x, u(x)) dx \geq -k_4 - k_5 \|\dot{u}\|_{L^p}^q$
- $M \geq F(u) \geq \|\dot{u}\|_{L^p}^p - k_4 - k_5 \|\dot{u}\|_{L^p}^q$
 $\leadsto \|\dot{u}\|_{L^p} \leq M' \leadsto$ è storia.

Esempio $\int_0^2 |\dot{u}|^7 + \cos x \cdot u(x)^8 dx \quad u(0) = u(2) = 2018$

Il minimo non esiste e $\inf = -\infty$

Considero $u_n(x)$ fissa in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $[1.9, 2]$.

Tra $\frac{\pi}{2}$ e 1.9 pongo



$u_n(x) = n u_0(x)$, con $u_0(x)$ positiva in $(\frac{\pi}{2}, 1.9)$

$F(u_n(x)) =$ parte iniziale fissa +
 + parte finale fissa

$$+ n^7 \int_{\frac{\pi}{2}}^{1.9} |\dot{u}_0(x)|^7 + n^8 \int_{\frac{\pi}{2}}^{1.9} \cos x \cdot |u_0(x)|^8 dx$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{fisse e negative}}$

— 0 — 0 —

Esempio

$$\min \left\{ \int_0^1 u(x)^2 + u(x) \quad \text{senza B.C.} \right\}$$

$L(x, s, p)$ è convessa nella coppia (s, p)

La crescita di g è minore del quadrato

Tuttavia il minimo non esiste

Basta prendere $u(x) := -n$

Mancano le BC per ottenere stima L^∞ su u .
 — o — o —

1st. Analisi Matematica

LEZIONE 22

Titolo nota

19/10/2018

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

In generale: dati due funzionali F e G , voglio risolvere

$$\min \{ F(u) : G(u) = 0 \}$$

Analisi 2: sotto opportune ipotesi di regolarità, ogni p.to di min u_0 soddisfa almeno una delle seguenti

$$\rightarrow \nabla G(u_0) = 0$$

$$\rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } \nabla F(u_0) = \lambda \nabla G(u_0)$$

Analisi 3+: sotto opportune ipotesi di regolarità, ogni p.to di min u_0 soddisfa almeno una delle seguenti

$$\rightarrow \delta G(u_0, v) = 0 \text{ per ogni } v \text{ ammissibile}$$

$$\rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v) \text{ per ogni } v \text{ ammissibile}$$

Esempio $\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 u^2 dx}_{F(u)} : \underbrace{\int_0^1 u^2 dx = 1}_{G(u)}, u(0) = u(1) = 0 \right\}$

Esistenza del minimo: solito metodo diretto, basta osservare che il vincolo passa al limite per la solita nozione di conv.

Cond. nec. sul minimo: dando per buono il metodo, ci sono due possibilità

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \delta G(u_0, v) = 0 \text{ per ogni } v &\leadsto \int_0^1 u_0 v dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \\ &\leadsto u_0 \equiv 0 \quad \text{NO!} \end{aligned}$$

② Esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \ddot{u} \dot{v} &= \lambda \int_0^l u v \\ &= - \int_0^l \ddot{u} v \end{aligned}$$

Conclusione $\begin{cases} \ddot{u} = -\lambda u \\ \text{DBC} \\ \int u^2 = 1 \end{cases}$ 3 parametri
3 condizioni

Calcolo il segno di λ moltiplicando per u

$$u \ddot{u} = -\lambda u^2 \quad \leadsto \quad -\lambda \int_0^l u^2 = \int_0^l u \ddot{u} = - \int_0^l \dot{u}^2$$

Questa mi dice che $\lambda > 0$. le soluzioni sono quindi del tipo

$$u(x) = a \cos(\sqrt{\lambda} x) + b \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

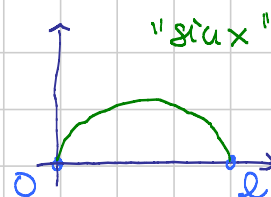
$$u(0) = 0 \leadsto a = 0; \quad u(l) = 0 \quad b \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

$b \neq 0$ altrimenti addio $\int u^2 = 1$.

$$\text{Quindi} \quad \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0 \quad \sqrt{\lambda} l = k\pi \quad \lambda = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$$

Imponendo l'integrale trovo b . Ho infinite sol. che dipendono da k e cerco quella per cui $\int \dot{u}^2$ risulta minimo.

Fatti gli integrali, il minimo si ha per $k=1$



Sia $P(l)$ il minimo del problema precedente.

Ora sappiamo che

$$\int_0^l u^2 dx \geq P(l) \int_0^l u^2 dx$$

è una disuguaglianza omogenea, quindi nel cercare la costante ottima, si può supporre $\int u^2 = 1$

Esempio Supponiamo di sapere che $P(\pi) = 1$ (cosa che si fa facilmente)

$$\min \left\{ \int_0^\pi 2u^2 - 2u^2 + \arctan u; u(0) = u(\pi) = 0 \right\}$$

Esiste il minimo? È la funzione $u \equiv 0$?

La funzione $u_0(x) \equiv 0$ non risolve (ELE) quindi non può essere p.to di min., quindi $\inf < 0$.

Gli esponenti sono 2 e 2, quindi tes. der. prec. non si applica ☹

Per la Pórucaé (la disug. di sopra), abbiamo che

$$\int_0^\pi 2u^2 \geq \int_0^\pi 2u^2, \text{ da cui}$$

$$M \geq F(u) \geq \int_0^\pi u^2 + \arctan u$$

e da qui stima su u e metodo diretto classico.

Esempio variato

$$\min \left\{ \int_0^\pi 2u^2 - 3u^2 + \arctan u : u(0) = u(\pi) = 0 \right\}$$

Dico che $\inf = -\infty$, quindi min. non esiste.

Basta considerare

$$F(n \sin x) = \int_0^{\pi} 2n^2 \cos^2 x - 3n^2 \sin^2 x + \underbrace{\arctan(n \sin x)}_{\text{limitato}} - \cos x \cdot n^2$$

Se avessi

$$\int_0^{\pi} u^6 - \alpha u^6 + \arctan u : u(0) = u(\pi) = 0$$

ci sarà una soglia

- $d > \alpha^*$, allora $\inf = -\infty$
- $d < \alpha^*$, allora esistenza del minimo

dove

$$\alpha^* := \min \left\{ \int_0^{\pi} u^6 : \int_0^{\pi} u^6 = 1 + \text{DBC} \right\}$$

Ist. Analisi Matematica - LEZIONE 23

Note Title

22/10/2018

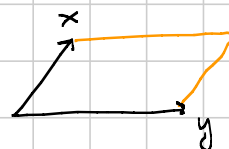
Identità (legge) del parallelogramma

Sia V uno sp. vett. munito di un prod. scalare $\langle x, y \rangle$.
Allora

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \quad \forall (x, y) \in V^2$$

↑
somma □ dei lati

↑
somma □ delle diagonali



Dim. : contine.

Teorema (Jordan-Fréchet-von Neumann)

Sia V uno sp. vett. munito di una norma $\|x\|$.

Allora la norma deriva da un prod. scalare se e solo se soddisfa la legge del parallelogramma.

In tal caso

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

identità di polarizzazione

[Provare a dimostrarlo da sé]

Dim. Indico con $p(x, y)$ il presunto prodotto scalare.
Verifico che lo è.

Step 0 : banalità

$$\rightarrow p(x, y) = p(y, x)$$

$$\rightarrow p(x, 0) = p(0, x) = 0$$

$$\rightarrow p(x, x) = \|x\|^2$$

$$\rightarrow p(-x, y) = -p(x, y)$$

Step 1 $p(x+y, 2z) = 2p(x, z) + 2p(y, z)$

$$p(x+y, 2z) = \frac{1}{4} (\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2) = \star$$

$$2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 = \|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2$$

$$2\|x-z\|^2 + 2\|y-z\|^2 = \|x+y-2z\|^2 + \|x-y\|^2$$

$$\star = \frac{1}{4} (2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2) + \frac{1}{4} (2\|y+z\|^2 - 2\|y-z\|^2)$$

$$= 2p(x, z) + 2p(y, z)$$

Step 2 $p(x+y, z) = p(x, z) + p(y, z)$

Dallo step 1 con $y=0$ deduciamo $p(x, 2z) = 2p(x, z)$

A questo punto $2p(x+y, z) = p(x+y, 2z) = 2p(x, z) + 2p(y, z)$
e semplifichiamo

Resta da dim. che $p(\lambda x, y) = \lambda p(x, y)$

Step 3 La relazione precedente vale per $\lambda \in \mathbb{Q}$

→ per $\lambda \in \mathbb{N}$ si dim. per induzione grazie all'additività

→ per $\lambda \in \mathbb{Z}$ uso che posso portare fuori -1

→ per $\lambda = \frac{a}{b}$ avremo che

$$b p\left(\frac{a}{b} x, y\right) \underset{\substack{\uparrow \\ b \text{ dentro}}}{=} p(ax, y) = a p(x, y) \underset{\substack{\uparrow \\ a \text{ fuori}}}{=}$$

dividendo ho la tesi

Step 4 Conquisto $\lambda \in \mathbb{R}$.

Osservo che $\lambda \rightarrow \|\lambda x + y\|$ e $\lambda \rightarrow \|\lambda x - y\|$ sono funzioni continue di λ (fissati x e y)

$$|\|\lambda_1 x + y\| - \|\lambda_2 x + y\|| \leq \|(\lambda_1 - \lambda_2)x\| \leq |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \|x\|$$

quindi $\lambda \rightarrow p(\lambda x, y)$ è una funzione continua di λ .
Quanto scrivo

$$p(\lambda x, y) = \lambda p(x, y)$$

ho che LHS e RHS sono funzioni continue di λ che coincidono per $\lambda \in \mathbb{Q}$, quindi coincidono per $\lambda \in \mathbb{R}$.
— o — o —

Proiezione su un convesso chiuso

Sia H uno sp. di Hilbert, sia $K \subseteq H$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$, chiuso e convesso, e sia $x_0 \in H \setminus K$ se $x_0 \in K$ è banale

(1) Esiste $\min \{ \|x_0 - y\| : y \in K \}$ ed è realizzato da un unico p.to $P_K x_0 \in K$
 $\uparrow$ proiezione di x_0 su K

(2) La funzione $x \rightarrow P_K x$ è 1-lip., cioè

$$\|P_K x_2 - P_K x_1\| \leq \|x_2 - x_1\| \quad \forall x_1 \in H \quad \forall x_2 \in H$$

(3) (Caratterizzazione) $P_K x$ è l'unico p.to di K tale che

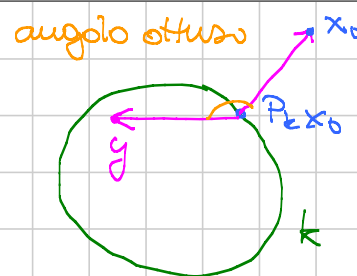
$$\langle x - P_K x, y - P_K x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K.$$

Dim. finito dimensionale

Considero $f(y) := \|y - x_0\|$.

Questa è convessa, quindi posso restringermi ad una palla, che è compatta, quindi il minimo esiste

(basta k chiuso per avere esistenza)



In dimensione infinita NON funziona perché le palle, anche chiuse, non sono compatte.

(Esistenza) Pongo

$$D^2 := \inf \{ \|y - x_0\|^2 : y \in K \}$$

Prendo $\{y_n\} \subseteq K$ succ. infinita e spero di Cauchy.

Idea: confrontare con il p.to medio

$$\|y_n - y_m\|^2 = \underbrace{2\|y_n - x_0\|^2}_{\text{parall.}^\uparrow \sim 2D^2} + \underbrace{2\|y_m - x_0\|^2}_{\sim 2D^2} - 4\| \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2} - x_0}_{\geq D^2} \|^2$$

Formalmente

- ci viene dato $\varepsilon > 0$
- scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\|y_n - x_0\|^2 \leq D^2 + \frac{1}{4}\varepsilon \quad \forall n \geq n_0$
- osservo che $\frac{y_n + y_m}{2} \in K$ perché è convesso, quindi

$$\| \frac{y_n + y_m}{2} - x_0 \|^2 \geq D^2$$

- Concludo che per $n \geq n_0$ e $m \geq n_0$ vale

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 4D^2 + \varepsilon - 4D^2 = \varepsilon \quad \text{😊}$$

Allora $y_n \rightarrow y_0$ e per continuità ho esistenza.

(Unicità) *Uso la stessa relazione*

Siano y_1 e y_2 due p.ti di univ. Allora

$$\|y_2 - y_1\|^2 = 2\|y_2 - x_0\|^2 + 2\|y_1 - x_0\|^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x_0\right\|^2 \leq 0$$

$\underbrace{\quad}_{2D^2} \quad \underbrace{\quad}_{2D^2} \quad \leq -4D^2$

(Caratterizzazione) [Provare a farla da sé]

Dato $y \in K$ osservo che $P_K x_0 + t(y - P_K x_0) \in K$ per $t \in [0, 1]$ quindi

$$\|x_0 - P_K x_0 - t(y - P_K x_0)\|^2 \geq \|x_0 - P_K x_0\|^2$$

Espongo

$$\|x_0 - P_K x_0\|^2 + t^2 \|y - P_K x_0\|^2 - 2t \langle x_0 - P_K x_0, y - P_K x_0 \rangle \geq \|x_0 - P_K x_0\|^2$$

$$t \|y - P_K x_0\|^2 \geq 2 \langle x_0 - P_K x_0, y - P_K x_0 \rangle$$

Faccio tendere $t \rightarrow 0^+$ e ho la tesi

(Unicità della caratterizzazione) Siano $z_1 \in K$ e $z_2 \in K$ due punti che soddisfanno la caratt., cioè tali che

$$\begin{aligned} \langle x - z_1, y - z_1 \rangle &\leq 0 & \forall y \in K \\ \langle x - z_2, y - z_2 \rangle &\leq 0 & \forall y \in K \end{aligned}$$

Metto $y = z_2$ nella prima e $y = z_1$ nella seconda, sommo e ottengo che

$$\|z_1 - z_2\|^2 \leq 0$$

(Lipschitzianità) segue dalla caratterizzazione.

Siano x_1 e $x_2 \in H \setminus K$. Siano $P_K x_1$ e $P_K x_2$ le loro proiezioni.

Scrivo la caratt.:

$$\langle x_1 - P_K x_1, y - P_K x_1 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$$

$$\langle x_2 - P_K x_2, y - P_K x_2 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$$

Uso $y = P_K x_2$ sopra e $y = P_K x_1$ sotto

$$\langle x_1 - P_K x_1, P_K x_2 - P_K x_1 \rangle \leq 0$$

$$\langle x_2 - P_K x_2, P_K x_1 - P_K x_2 \rangle \leq 0$$

Sommo:

$$\langle x_1 - x_2 - (P_K x_1 - P_K x_2), P_K x_2 - P_K x_1 \rangle \leq 0$$

$$\langle x_1 - x_2, P_K x_2 - P_K x_1 \rangle + \|P_K x_1 - P_K x_2\|^2 \leq 0$$

Quindi

$$\|P_K x_1 - P_K x_2\|^2 \leq \langle x_2 - x_1, P_K x_2 - P_K x_1 \rangle$$

$$\leq \|x_1 - x_2\| \cdot \|P_K x_1 - P_K x_2\|$$



Ist. Analisi Matematica

- LEZIONE 24

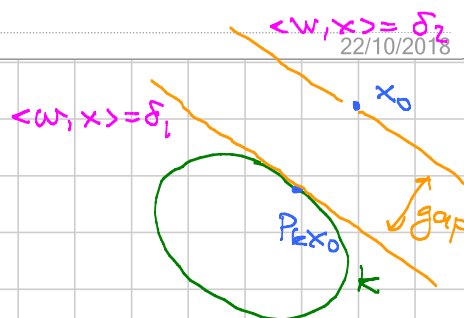
Note Title

22/10/2018

Separazione punto - convessoSia H sp. di Hilbert $K \subseteq H$ convesso chiuso $\neq \emptyset$ $x_0 \in H \setminus K$ Allora esiste $w \in H$ ed esistono numeri reali $\delta_2 > \delta_1$ tale che

$$\langle w, x_0 \rangle = \delta_2 \quad (1)$$

$$\langle w, y \rangle \leq \delta_1 \quad \forall y \in K \quad (2)$$

Dim Pongo $w := x_0 - P_K x_0$

$$\delta_2 := \langle w, x_0 \rangle \quad \delta_1 := \delta_2 - \|x_0 - P_K x_0\|^2$$

Allora (1) è ovvio per definizione.

Proviamo (2). Dato $y \in K$ vale

$$\langle w, y \rangle = \langle x_0 - P_K x_0, y \rangle$$

$$= \langle x_0 - P_K x_0, y - P_K x_0 + P_K x_0 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle x_0 - P_K x_0, y - P_K x_0 \rangle}_{\leq 0} + \langle x_0 - P_K x_0, P_K x_0 \rangle$$

$$\leq \langle x_0 - P_K x_0, x_0 + P_K x_0 - x_0 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle x_0 - P_K x_0, x_0 \rangle}_{= \delta_2} - \|x_0 - P_K x_0\|^2 = \delta_1.$$

$$\delta_2 - \|x_0 - P_K x_0\|^2 = \delta_1$$

Teorema 1 (Convesso + chiuso forte $\Rightarrow$ chiuso debole)

Sia H sp. di Hilbert, e sia $K \subseteq H$ un sottoinsieme.

Supponiamo che

(i) K è convesso

(ii) K è chiuso forte (se $x_n \in K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightarrow x_\infty$, allora $x_\infty \in K$)

Allora K è chiuso debole (se $x_n \in K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightarrow x_\infty$ debole, allora $x_\infty \in K$)

Brutalmente: la conv. debole non permette di scappare dai convessi chiusi

Dim Sia $x_n \rightarrow x_\infty$.

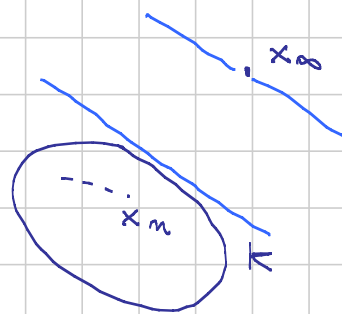
Supponiamo per assurdo che $x_\infty \notin K$

Per la separazione punto convesso esistono $w \in H$ e $\delta_2 > \delta_1$ t.c.

$$\langle w, x_\infty \rangle = \delta_2$$

$$\langle w, x_n \rangle \leq \delta_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{perché } x_n \in K)$$

Ma $\langle w, x_n \rangle \rightarrow \delta_2$, il che è assurdo.



Teorema 2 (Convessa + fortemente SCI $\Rightarrow$ debolmente SCI)

Sia H sp. di Hilbert, e sia $F: H \rightarrow \mathbb{R}$ (si può prendere anche $+\infty$)

Supponiamo che

(i) F è convessa

(ii) F è SCI forte (se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora $\liminf F(x_n) \geq F(x_\infty)$)

Allora F è SCI debole (se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora $\liminf F(x_n) \geq F(x_\infty)$)

Dim I sottolivelli di F sono convessi e chiusi forte, dunque sono chiusi debole
[sistemare i dettagli]

Esempio Consideriamo

$$F(v) = \int_0^{100} \underbrace{(7 + \sin x)}_{\geq 6} v^2 dx \quad v \in L^2((0, 100))$$

Allora $F(v)$ è convesso (facile verifica) e continuo forte

Se $v_n \rightarrow v_\infty$ in L^2 , allora esiste $v_{n_k} \rightarrow v_\infty$ puntualmente per q.o. $x \in (0, 100)$ e in maniera dominata.

Quindi posso passare al limite per il tes. di Lebesgue e il limite è $F(v_\infty)$. Per il lemma della sotto-sotto tutta la succ. $F(v_n) \rightarrow F(v_\infty)$.

Quindi automaticamente $F(v)$ è SCI debole.

Caso speciale di proiezione: sottospazi chiusi

Sia H sp. di Hilbert, sia $V \subseteq H$ s.sp. vett. chiuso, sia $P_V: H \rightarrow V$ la proiezione.

(1) Per ogni $x \in H$ il vettore $P_V x$ è l'unico elemento di V tale che

$$\langle x - P_V x, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

(2) P_V è lineare

(3) Se poniamo

$$V^\perp := \{x \in H : \langle x, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V\}$$

abbiamo che $V^\perp$ è s.sp. chiuso e $H = V \oplus V^\perp$.

Dim (1) Voglio dim. che $\langle x - P_K x, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

So che

$$\langle x - P_K x, y - P_K x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in V$$

Uso $y = v + P_K x$ e $y = -v + P_K x$ e ho finito

Devo dimostrare che $P_K x$ è l'unico vettore con questa proprietà. Sia $z \in V$ t.c.

$$\langle x - z, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Allora per ogni $y \in V$ vale

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x - z + z - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 + \underbrace{2\langle x - z, z - y \rangle}_{\substack{\in V \\ \geq 0 \\ 0}} \\ &\geq \|x - z\|^2 \end{aligned}$$

Questo dimostra che z minimizza la distanza da x e quindi $z = P_K x$.

(2) La linearità si dimostra usando la caratterizzazione

$$\langle x_1 - P_K x_1, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\langle x_2 - P_K x_2, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Sommando abbiamo la tesi. Ideen per λx .

(3) Chiusura e $V^\perp$ s.sp. sono quasi ovvi.

$$x = \underbrace{x - P_K x}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_K x}_{\in V}$$

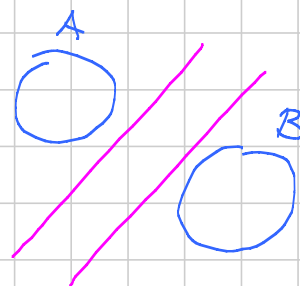
Occorre verificare anche $V \cap V^\perp = \{0\}$ ☺

Separazione convesso - Convesso

Sia H sp. Hilbert, e siano $A \subseteq H$ e $B \subseteq H$ non vuoti.

Supponiamo che

- $A \cap B = \emptyset$
- A e B convessi
- B chiuso
- A compatto



Allora

(1) esistono $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$ che minimizzano la distanza

(2) esistono $w \in H$ e $\delta_2 > \delta_1$ tali che

$$\langle w, a \rangle \geq \delta_2 \quad \forall a \in A$$

$$\langle w, b \rangle \leq \delta_1 \quad \forall b \in B$$

[Esercizio] Minimizzare $f(a) := \|a - P_B a\|^2$