

A.A. 2017/2018
Elementi di Calcolo delle Variazioni
Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01. Presentazione degli argomenti del corso mediante semplici esempi. Funzionali integrali, con esempi. Esempi di problemi che non verranno trattati.	8
Lezione 02. Introduzione al metodo indiretto nel calcolo delle variazioni. Variazione prima di un funzionale lungo una curva e in una direzione. Forme integrali e differenziali della variazione prima. Studio esplicito di tre casi modello di funzionali integrali dipendenti da potenze della derivata.	13
Lezione 03. Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni e lemma di Du Bois Reymond: enunciato, possibili dimostrazioni, discussione di possibili varianti. Esempio di un problema di minimo con vincolo integrale.	19
Lezione 04. Nascita delle condizioni al bordo per le equazioni di Eulero-Lagrange. Esempi che portano a condizioni di Dirichlet, di Neumann, e periodiche. Esempi di problemi in cui il minimo non esiste.	24
Lezione 05. Equazione di Eulero-Lagrange per una Lagrangiana generale: forme integrali, forma differenziale classica, alla Du Bois Reymond, alla Erdmann per il caso autonomo. Condizioni di Neumann per Lagrangiane generali. Discussione delle ipotesi di regolarità necessarie per le varie forme.	29
Lezione 06. Come dimostrare che un punto stazionario è un punto di minimo: utilizzo della convessità o di un opportuno funzionale ausiliario. Esempi di esistenza e non esistenza del minimo per una Lagrangiana non convessa dipendente dalla sola derivata.	35
Lezione 07. Problemi point-to-curve. Condizioni di transversality.	40
Lezione 08. Discussione sullo spazio in cui ambientare i problemi di minimo. Esempi finali di metodo indiretto (con argomenti di troncamento e perdita di regolarità).	46
Lezione 09. Introduzione al metodo diretto. Spazi con una nozione di convergenza e teorema di Weierstrass per funzioni semicontinue inferiormente e coercive. Spazi di Hilbert separabili: sistemi ortonormali (basi Hilbertiane) e componenti.	51
Lezione 10. Convergenza forte: continuità della norma e non compattezza delle palle in dimensione infinita. Convergenza debole: definizione, prime proprietà, semicontinuità della norma, compattezza delle palle.	57
Lezione 11. Passaggio al limite nei prodotti scalari. La convergenza debole di successioni limitate può essere testata limitandosi ad un sottoinsieme con span denso. Le successioni debolmente convergenti sono limitate.	63

Lezione 12. Ricapitolazione di fatti noti di analisi funzionale: teoremi di passaggio al limite per integrali, spazi di Lebesgue, disuguaglianze alla Holder. Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni negli spazi di Lebesgue. Esempio di successione di funzioni debolmente convergente.	68
Lezione 13. Spazi di Sobolev in dimensione uno: definizione W (mediante integrazione per parti) vs definizione H (mediante approssimazione o completamento astratto). Principali proprietà ed esempi. Dimostrazione che H è contenuto in W	73
Lezione 14. Le funzioni di Sobolev sono le primitive delle loro derivate deboli. Dimostrazione che W è contenuto in H . Le funzioni di Sobolev sono Holderiane. Derivate deboli e rapporti incrementali.	79
Lezione 15. Road map del metodo diretto: formulazione debole negli spazi di Sobolev, compattezza dei sottolivelli rispetto ad un'opportuna nozione di convergenza, semicontinuità, recupero della regolarità (passo iniziale e bootstrap). Primo esempio di applicazione.	85
Lezione 16. Discussione generale di come ottenere compattezza in spazi funzionali, sotto ipotesi di crescita per la Lagrangiana. Passaggio al limite nei funzionali integrali (caso di uniforme convergenza e Lagrangiana continua, caso di convergenza debole e Lagrangiana convessa).	90
Lezione 17. Approccio variazionale ai problemi al bordo per equazioni differenziali di ordine due: esistenza, regolarità, unicità sotto ipotesi di monotonia. Discussione di diverse condizioni al bordo di Dirichlet/Neumann.	97
Lezione 18. Esempio di non unicità per un problema di Dirichlet. Approccio variazionale all'esistenza di soluzioni periodiche. Regolarità e stretta positività della derivata seconda della Lagrangiana rispetto alla velocità.	103
Lezione 19. Definizione di inviluppo semicontinuo e rilassamento in spazi metrici. Principali proprietà del rilassamento: lemma fondamentale, semicontinuità inferiore, l'inf nella definizione è un minimo, coincide con l'inviluppo semicontinuo. Recovery sequences.	109
Lezione 20. Inf/min di una funzione vs inf/min del rilassato (in generale e sotto ipotesi di coercività). Successioni minimizzanti per una funzione vs recovery sequences dei punti di minimo del rilassato. Prima strategia per il calcolo di un rilassato. Stabilità del rilassato rispetto a perturbazioni continue.	116
Lezione 21. Sottoinsiemi densi in energia e relativo lemma. Seconda strategia per il calcolo di un rilassato. Estensione per rilassamento (ed ulteriore caratterizzazione degli spazi di Sobolev). Esempio di calcolo del rilassato di un funzionale integrale.	122
Lezione 22. Definizione di Gamma-convergenza in spazi metrici. Recovery sequences. Gamma-convergenza e rilassamento. Rapporti (quasi inesistenti) con la convergenza puntuale ed uniforme. Esempi sulla retta reale. Stabilità rispetto a perturbazioni continue. Definizione di Gamma-liminf e Gamma-limsup.	128

Lezione 23. Proprietà del Gamma-liminf: lemma fondamentale, l'inf nella definizione è un minimo, semicontinuità inferiore, convergenza dei minimi (caso degli aperti e dei compatti). Definizione di successione equicoerciva.	135
Lezione 24. Teorema di convergenza dei minimi e dei punti di minimo (sotto ipotesi di Gamma-convergenza ed equicoercività). Proprietà del Gamma-limsup: lemma fondamentale, l'inf nella definizione è un minimo. Primo esempio di studio asintotico di un problema di minimo dipendente da un parametro.	141
Lezione 25. Diverse tipologie di punto di minimo: globale (GM), locale forte (SLM), locale debole (WLM), direzionale (DLM). Esempio di WLM che non è SLM. Variazione seconda di un funzionale lungo una direzione e sua espressione in termini della Lagrangiana.	147
Lezione 26. Funzionali quadratici. Condizioni di Legendre. Equazione di Jacobi e definizione di punto coniugato. Condizioni di Jacobi. Condizioni necessarie affinché un funzionale quadratico sia non negativo.	152
Lezione 27. Condizioni sufficienti affinché un funzionale quadratico sia non negativo. Legami tra equazioni di Riccati e soluzioni positive di equazioni lineari di ordine due. Dimostrazione del lemma di oscillazione.	158
Lezione 28. Funzionali quadratici strettamente positivi. Stime dall'alto e dal basso per funzionali quadratici. Condizioni necessarie per essere DLM. Condizioni sufficienti per essere WLM.	164
Lezione 29. Calibrazioni: esempi motivazionali. Null Lagrangians e verification functions. Interpretazione dei risultati di minimalità per funzionali quadratici e funzionali convessi in termini di calibrazioni mediante null Lagrangians. Insiemi di livello delle verifications functions e calibrazione di problemi curve-to-curve.	170
Lezione 30. Value function. Una value function regolare è una verification function. Eccesso di Weierstrass e condizioni di Weierstrass per essere SLM. Definizione di campo di Weierstrass.	176
Lezione 31. Slope function di un campo di Weierstrass. L'esistenza di un campo di Weierstrass implica la formula di rappresentazione di Weierstrass: dimostrazione alla Hilbert (via null Lagrangian) e dimostrazione alla Weierstrass (per campi con un punto base).	182
Lezione 32. Dimostrazione della condizione necessaria di Weierstrass per uno SLM. Dimostrazione della condizione sufficiente a partire dalla formula di rappresentazione. Idea della dimostrazione dell'embedding theorem (dall'equazione di Jacobi all'esistenza di campi di Weierstrass).	188
Lezione 33. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel calcolo delle variazioni: dimostrazione via teorema della funzione implicita e via teorema della funzione inversa. Condizione sufficiente per essere punto di minimo in un problema vincolato. Esempio di applicazione del metodo.	194

Lezione 34. Variazione prima di funzionali con integrali multipli: integrale di Dirichlet e Laplaciano, equazione di Eulero-Lagrange in forma di divergenza, derivata normale al bordo e condizioni al bordo di Neumann.	200
Lezione 35. Definizione di convergenza debole in L_p . Semicontinuità rispetto alla convergenza debole sotto ipotesi di convessità. Per le successioni limitate è possibile limitarsi a testare la convergenza debole su un denso.	205
Lezione 36. Compattanza debole sotto ipotesi di crescita superlineare. Questioni di regolarità: mancanza di coercività vs regolarità Holderiana della derivata dei minimi. Esempio di metodo diretto per una Lagrangiana con dipendenza accoppiata da funzione/derivata	212
Lezione 37. Estensione per rilassamento di funzionali convessi da ambienti regolari ad ambienti meno regolari. Densità in energia delle funzioni affini a tratti. Patologie dovute alla mancanza di crescita superlineare.	218
Lezione 38. Inviluppo convesso di una funzione. Rilassamento di funzionali integrali con Lagrangiana non convessa (ma con ipotesi di crescita). Esempi di applicazione della teoria.	224
Lezione 39. Esempi classici: geodetiche in spazi euclidei, sul cilindro e sulla sfera (estremali, minimi locali/globali, calibrazioni). Le curve che minimizzano l'integrale di Dirichlet sono geodetiche.	230
Lezione 40. Esempi classici: problemi con ostacolo. Metodo diretto, sia con ostacolo sulla funzione, sia con ostacolo sulla derivata. Equazione di Eulero-Lagrange in forma di disuguaglianza. Condizioni di contatto e regolarità ottimale in un punto di contatto.	236
Lezione 41. Esempi di Gamma-convergenza: problemi con parametri piccoli (nel funzionale o nelle condizioni al bordo) che inducono effetti di linearizzazione. . . .	242
Lezione 42. Esempi di Gamma-convergenza: problemi con passaggio dal discreto al continuo, dai rapporti incrementali alle derivate. Integrazione per parti discreta. Equazione di Eulero nel contesto discreto.	248
Lezione 43. Problema classico: la brachistocrona. Modello fisico, equazione di Eulero, famiglie di cicloidi, esistenza ed unicità della cicloide che rispetta le condizioni al bordo, effettiva minimalità globale (via campi di Weierstrass e via trucco di convessità).	254
Lezione 44. Problema classico: problema di Didone in versione cartesiana. Equazione di Eulero con moltiplicatore di Lagrange, esistenza di soluzioni al variare del parametro, minimalità globale (via campi di Weierstrass e via vera convessità). Discussione del caso in cui una soluzione classica non esiste.	261
Lezione 45. Problema classico: superfici di rotazione di area minima. Equazione di Eulero, discussione di esistenza/unicità a seconda dei parametri, famiglie di catenarie, discussione delle soluzioni nel caso simmetrico.	266

- Lezione 46.** Problema classico: heavy chain. Formulazione cartesiana, equazione di Eulero con moltiplicatori di Lagrange, esistenza/unicità a seconda dei parametri. Discussione generale di problemi di minimo con vincoli integrali/puntuali sulle derivate: rilassamento (da uguaglianza a disuguaglianza) e saturazione del vincolo. 272
- Lezione 47.** Esempi di Gamma-convergenza: problemi di omogenizzazione con coefficienti oscillanti, sia davanti alla funzione, sia davanti alla derivata. Problema di cella. 278
- Lezione 48.** Esempi di Gamma-convergenza: funzionale di Modica-Mortola in dimensione uno (studio asintotico del valore del minimo e del profilo di transizione ottimale). 285

Calc. Var.

-

LEZIONE 01

Note Title

26/09/2017

Calcolo delle variazioni: studio pbm. di minimo

 $\mathbb{X} = \text{insieme}$ $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ (talvolta $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)
$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{X} \}$$

↑
minimo valore

$$\operatorname{argmin} \{ f(x) : x \in \mathbb{X} \}$$

↑
p.ti $x \in \mathbb{X}$ dove f vale il min.

- ① Metodo indiretto
 - ② " diretto
 - ③ Rilassamento
 - ④ Gamma-convergenza
- + so esempi finali

Esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 4x$

Metodo indiretto: $f'(x) = 2x - 4$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
 $x = 2$ è il p.to di min., e il min. vale $f(2) = -4$

Provo a dim. che $f(x) \geq -4$ sempre:

$$x^2 - 4x \geq -4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$$

↑
ok e
vale $\Leftrightarrow x=2$

Metodo diretto: dim. che il min. esiste, ad esempio usando Weierstrass generalizzato

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua + $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ esiste min.

Ora che so che esiste posso vedere dove $f'(x) = 0$ come sopra.

Esempio $\min \{ (x^2 - 2)^2 : x \in \mathbb{Q} \}$

In questo caso il min. non esiste, il che pone 2 domande

① chi è l'inf?

② come sono fatte le succ. minimizzanti, cioè le succ. $\{x_n\} \subseteq \mathbb{X}$ t.c.

$$f(x_n) \rightarrow \inf \{ f(x) : x \in \mathbb{X} \}$$

Risposta: $\inf = 0$ e le succ. min. hanno una s.succ. che tende a $\pm\sqrt{2}$.

Rilassamento: $\rightarrow$ estendere una funzione ad un ambiente più vasto

$\rightarrow$ cambiare la funzione in modo che il minimo abbia più prob. di esistere

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 2)^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2017 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esempio Consideriamo una famiglia di pbm. di minimo

$$m_n := \min \{ e^{x^2} + \arctan x + n \sin^2 x : x \in \mathbb{R} \}$$

Domande: $\rightarrow$ a cosa tende m_n quando $n \rightarrow +\infty$?

$\rightarrow$ " " tendono i pti di min. quando $n \rightarrow +\infty$?

Ci aspettiamo

$$m_n \rightarrow m_\infty := \min \{ e^{x^2} + \arctan x : x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \}$$

Ci aspettiamo lo stesso dai pti di min.

— 0 — 0 —

Negli esempi "veri" $\mathbb{X}$ è uno spazio di funzioni, in generale di dimensione infinita. Le funzioni

$$F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{o } \overline{\mathbb{R}})$$

le chiameremo funzionali perché l'argom. è una funzione

$$F(u) = \int_2^4 (u^2 + \sin u) dx \quad \mathbb{X} := C^1([2,4])$$

$$\min \left\{ \int_2^4 [u(x)^2 + u(x)^2] dx : u \in C^1([2,4]), u(2)=3 \right\}$$

definiscono un insieme $\mathbb{X}$

Funzionali integrali

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), u'(x)) dx$$

dove $L: [a,b] \times \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{\mathbb{R}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{\mathbb{R}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ u'}}{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$

$L(x, s, p)$
 $\uparrow$ Lagrangiana

Generalizzazioni

$$F(u) := \int_a^b L(x, u, u', u'', \dots) dx$$

Dipendenza da deriv.
di ordine sup

$$F(u, v) := \int_a^b L(x, u, v, u', v') dx$$

$$u: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\uparrow$ 1 variabile in partenza

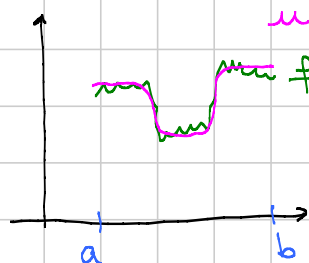
Problemi + complicati

$\rightarrow$ più variabili in partenza $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\rightarrow$ " " " " e arrivo (caso vettoriale)

Esempio classico 1 Data una funzione $f(x)$, trovare

$$\min \left\{ \int_a^b [\ddot{u}^2 + \underbrace{(u-f)^2}_{\substack{u \text{ vicino ad } f \\ u \text{ non troppo brutta}}}] dx : u \in C^1([a,b]) \right\}$$



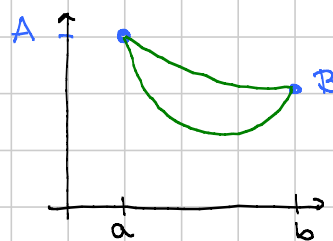
Esempio classico 2

$$\min \left\{ \int_a^b (\ddot{u}^2 + u) dx : u(a) = A \quad u(b) = B \quad u \in C^4 \right\}$$

$\uparrow$ dati $\uparrow$

Pensiamo u come una corda

- tenere basso $\ddot{u}^2$ vuol dire tenere bassa l'energia elastica
- tenere basso u vuol dire min. l'energia potenziale



Variante: $\min \left\{ \int_a^b (\ddot{u}^2 + \underbrace{\dot{u}^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{curvare}}} + u) dx : \text{come prima} \right\}$

$\uparrow$ allungare

In generale: problemi di minimo per funzionali integrali per funzioni di una variabile

L'incognita è

$$u: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$

o talvolta

$$u: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Non parleremo: $\rightarrow$ funzionali per funzioni di più variabili

$\rightarrow$ problemi geometrici, ad esempio pbm. in cui l'incognita è un insieme, ad esempio

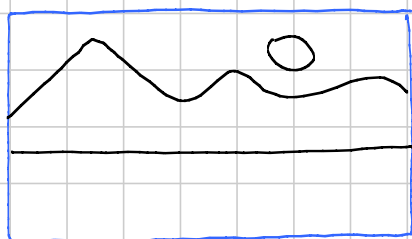
$$\min \{ \text{lunghezza}(\partial E) : E \subseteq \mathbb{R}^2, \text{Area}(E) = 7 \}$$

$\times$

$\rightarrow$ problemi con interazioni tra funzioni e insiemi, ad esempio

$$MS(u, k) := \int_{\Omega \setminus k} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega \setminus k} |u - f|^2 + \text{lunghezza}(k)$$

f è una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
 $k \subseteq \Omega$



f = fotografia "brutta"
 u = fotografia "bella"
 k = contorni delle figure

MUMFORD-SHAH 1989

Calc. Var.

—

LEZIONE 02

Note Title

26/09/2017

Variazione prima di un funzionale

(Derivata prima del funzionale)

Mega-generale: $\mathbb{X}$ insieme, $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 p.to di minimo $\delta > 0$ e $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{X}$ tale che $\gamma(0) = x_0$

Posso considerare la funzione composta

$$(-\delta, \delta) \ni t \rightarrow F(\gamma(t)) =: \varphi(t) \in \mathbb{R}$$

Allora $\varphi: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ e $t=0$ è un p.to di minimo.Pongo $\delta F(x_0, \gamma) := \varphi'(0)$ posto che esistavariazione
prima

Variazione prima del funzionale F nel p.to x_0 lungo la curva γ

la posso def. in ogni x_0 (anche non di min.) e per ogni curva γ con $\gamma(0) = x_0$ purché $\varphi'(0)$ esista.

Teorema

 Se $x_0 \in \text{argmin} \{ F(x) : x \in \mathbb{X} \}$, allora per ogni γ

$\delta F(x_0, \gamma) = 0$ quando esiste

— o — o —

Supponiamo ora che $\mathbb{X}$ sia uno spazio affine con spazio vettoriale di riferimento V .

In particolare

$$\forall u \in \mathbb{X}, \forall v \in V \text{ si ha che } u + v \in \mathbb{X}$$

In questo caso, dati $u_0 \in \mathbb{X}$ e $v \in V \setminus \{0\}$ posso considerare la curva

$$t \rightarrow u_0 + tv \quad (\text{retta per } u_0 \text{ con direz. } v)$$

e calcolare

$$\delta F(u_0, v) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u_0 + tv) - F(u_0)}{t}$$

$$= \varphi'(0) \text{ con } \varphi(t) = F(u_0 + tv)$$

"DERIVATA DIREZIONALE" o "ALLA GATEAUX"

— o — o —

$$F(u) = \int_a^b u(x)^2 dx$$

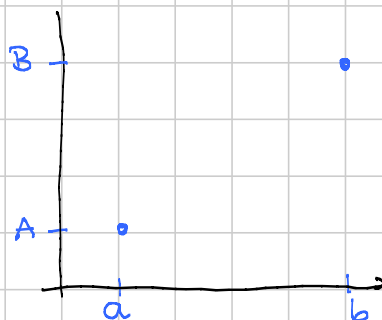
$$G(u) = \int_a^b |u(x)| dx$$

$$H(u) = \int_a^b |u(x)|^{1/2} dx$$

$$\mathbb{X} = \{ u \in C^1([a, b]) : u(a) = A, u(b) = B \}$$

Oss. $\mathbb{X}$ è uno spazio affine
con sp. vett. di riferimento

$$V := \{ v \in C^1([a, b]) : v(a) = v(b) = 0 \}$$



Prendiamo il primo funzionale, e calcoliamo $\delta F(u, v)$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= F(u + tv) = \int_a^b (\dot{u} + t\dot{v})^2 \\ &= \int_a^b \dot{u}^2 + 2t \int_a^b \dot{u}\dot{v} + t^2 \int_a^b \dot{v}^2\end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) := \varphi'(0) = \boxed{2 \int_a^b \dot{u}\dot{v}} \quad \begin{array}{l} 1^a \text{ forma integrale della} \\ \text{variazione prima} \end{array}$$

Posso integrare per parti e riscrivere come

$$2 [\dot{u}v]_a^b - 2 \int_a^b \ddot{u}v$$

$$2 (\underbrace{\dot{u}(b)}_{0} v(b) - \underbrace{\dot{u}(a)}_{0} v(a)) \quad , \quad \text{quindi}$$

$$\delta F(u, v) = \boxed{-2 \int_a^b \ddot{u}v} \quad \begin{array}{l} 2^a \text{ forma integrale della} \\ \text{variazione prima} \end{array}$$

Oss. Ho usato qui che $u \in C^2([a, b])$

Per quanto detto, se u_0 è un p.to di min. allora per forza

$$\boxed{\int_a^b \dot{u}_0 \dot{v} = 0 \quad \forall v \in V} \quad \begin{array}{l} 1^a \text{ forma int. di (ELE)} \end{array}$$

e se fosse pure C^2 allora

$$\boxed{\int_a^b \ddot{u}_0 v = 0 \quad \forall v \in V} \quad \begin{array}{l} 2^a \text{ forma integrale di (ELE)} \end{array}$$

Sembra ragionevole dedurre che $\ddot{u}_0(x) \equiv 0$, quindi $u_0(x)$ è la retta che congiunge i dati al bordo.

In bella copia forniamo la dim. rigorosa.

Sia $u_0(x)$ la retta. Sia $w(x)$ un qualunque altro elem. di $\mathbb{X}$. Allora

$$v = w - u_0 \in V \quad (\text{si annulla in } a \text{ e } b)$$

e

$$\begin{aligned} F(w) &= F(u_0 + v) = \int_a^b (\ddot{u}_0 + \ddot{v})^2 \\ &= \underbrace{\int_a^b \ddot{u}_0^2}_{F(u_0)} + 2 \underbrace{\int_a^b \ddot{u}_0 \ddot{v}}_{=0} + \underbrace{\int_a^b \ddot{v}^2}_{\geq 0} \geq F(u_0) \end{aligned}$$

$$\int \ddot{u}_0 \ddot{v} = \underbrace{[\ddot{u}_0 v]_a^b}_0 - \underbrace{\int_a^b \ddot{\ddot{u}}_0 v}_{=0} = 0$$

Ho dim. che $F(w) \geq F(u_0)$ e vale l'uguale $\Leftrightarrow \int_a^b \ddot{v}^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{v}(x) \equiv 0 \Leftrightarrow v(x) = \text{costante}$, ma è nulla in a e b
e quindi $\Leftrightarrow v(x) \equiv 0 \Leftrightarrow w(x) \equiv u_0(x)$

Quindi la retta è l'unico p.to di min.

$$\boxed{\ddot{u}_0(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]} \quad \text{Forma diff. di (ELE)}$$

ELE: eq. di Eulero - Lagrange.

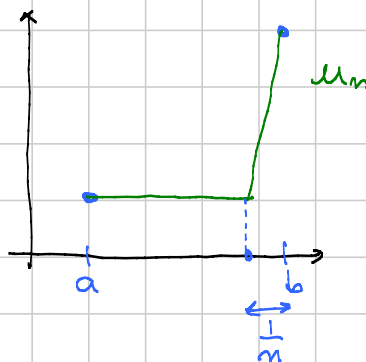
— o — o —

Passiamo ad $H(x)$. Dico che $\inf H = 0$ e non è minimo a meno del caso banale $A = B$

$$H(u_m) = \int_{b-\frac{1}{m}}^b |u_m(x)|^{1/2} dx$$

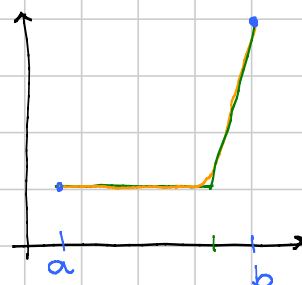
$$= \int_{b-\frac{1}{m}}^b |(B-A)m|^{1/2} dx$$

$$= |B-A|^{1/2} \sqrt{m} \cdot \frac{1}{m} \rightarrow 0$$



Non sarebbe C^1 , ma un piccolo raccordo costa davvero poco

Più in generale, fare l'inf.
in C^1 , C^{2+} , C^∞ o C^1 a
tratti viene sempre la stessa cosa



— o — o —

Con il funzionale $G(u)$ abbiamo che il minimo esiste ed i p.ti di minimo sono tutte le u monotone.

Supponiamo WLOG (without loss of generality) che $B > A$.
Allora

$$\int_a^b |u'(x)| dx \geq \left| \int_a^b u'(x) dx \right| = |u(b) - u(a)| = B - A$$

e vale il segno di uguale $\Leftrightarrow u'(x)$ ha segno costante.

Idea per il futuro

- Lagrangiana strett. convessa in q $\rightsquigarrow$ 😊
- " non convessa $\rightsquigarrow$ 😞 GUAI
- " convessa ma non strett $\rightsquigarrow$ 😞
grossi rischi
per unicità e
regolarità

— o — o —

Calc. Var.

LEZIONE 03

Note Title

29/09/2017

Lemma fondamentale del Calc. Var. (FLCV)Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0$$

$$\forall v \in C_c^\infty((a, b))$$

Allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$

$\uparrow$
 $\exists [c, d] \subseteq (a, b) \text{ t.c.}$
 $v(x) = 0$ fuori da $[c, d]$

Due famiglie di dim: $\rightarrow$ per assurdo $\rightarrow$ per approssimazione

Dim. per assurdo Supponiamo $f \not\equiv 0$. Allora wlog esiste
 $x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) > 0$.

Per continuit 

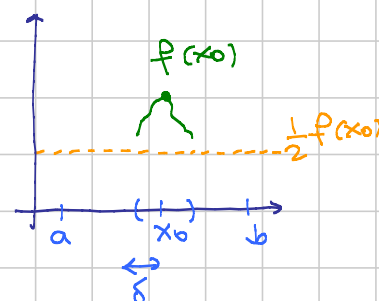
$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Ora basta prendere $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.c.

$$\bullet v(x) = 1 \text{ per ogni } x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}]$$

$$\bullet v(x) = 0 \text{ se } x \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$\bullet v(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$



Allora

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) v(x) dx \geq \int_{x_0 - \frac{\delta}{2}}^{x_0 + \frac{\delta}{2}} f(x) v(x) dx \geq \frac{1}{2} f(x_0) \cdot \delta > 0.$$

Dim. per approssimazione

Idea chiave

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \Rightarrow \int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C^0$$

A questo punto basta scegliere $v(x) \equiv f(x)$

Fatto di approssimazione: per ogni $v: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua esiste una suce. di funzioni $\{v_m\} \subseteq C_c^\infty(a,b)$ tali che

(i) $\exists M$ tale che $|v_m(x)| \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a,b]$

(ii) $v_m(x) \rightarrow v(x)$ unif. sui compatti $K \subseteq (a,b)$.

Questo basta per concludere che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b v_m(x) f(x) dx = \int_a^b v(x) f(x) dx$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e ho conv. degli integrali su $\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}$
 Gli integrali su $[a, a+\varepsilon]$ e $[b-\varepsilon, b]$ si
 stimano grazie all'equiuniformità.

— 0 — 0 —

Generalizzazioni Per quali classi di funzioni V vale il
 Lemma, cioè

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

- Oss. 1 - Se l'integrale è nullo per ogni $v \in V$, allora è nullo per ogni $v \in \text{Span}(V)$
- 2 - Se l'integrale è nullo per ogni $v \in V$, allora è nullo sulla chiusura di V rispetto alla conv. unif. sui cpt. contenuti in $[a,b] \setminus \{\text{numero finito di punti}\}$

Risposta: OK se la chiusura di $\text{Span}(V)$ è tutto C^0

— 0 — 0 —

LEMMA DI DU BOIS REYMOND (Lemma DBR)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(a, b) \text{ t.c. } \int_a^b v(x) dx = 0$$

Allora $f(x) \equiv \text{costante}$ in $[a, b]$.

Dim. abusiva

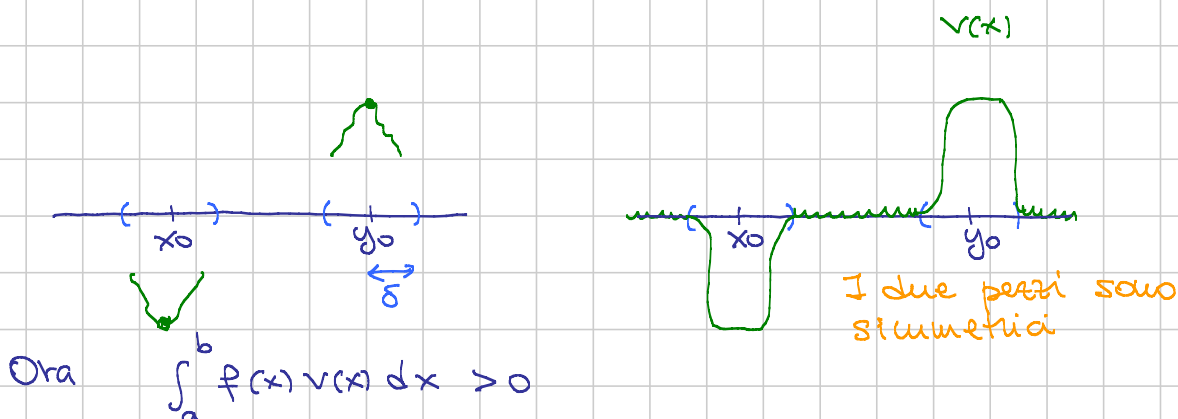
$$0 = \int_a^b f(x) v(x) dx = - \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per} \\ \text{parti}}}{f'(x)} V(x) dx \quad \begin{array}{l} \text{(non c'è il} \\ \text{termine di bordo} \\ \text{perché } V(a) = V(b) = 0) \end{array}$$

$$f' \equiv 0 \Rightarrow f \text{ costante}$$

Idea essenziale Se f soddisfa l'ipotesi, allora $f(x) + c$ verifica l'ipotesi per ogni $c \in \mathbb{R}$.
(qui uso che $v(x)$ ha media nulla)

Dim. per assurdo

Sia f non costante. Allora WLOG esistono $a < x_0 < y_0 < b$ t.c. $f(x_0) < f(y_0)$.
A meno di aggiungere un c opportuno posso assumere che $f(x_0) = -f(y_0)$.



Dim. per approssimazione

Si dimostra che ogni funzione $v \in C^0$ a media nulla si può appross. con funzioni $v \in C_c^\infty$ a media nulla e quindi

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \quad \text{con} \quad \int_a^b v(x) dx = 0$$

$\Downarrow$

$$\sim \quad \forall v \in C^0 \quad \sim$$

A questo scelgo $c \in \mathbb{R}$ t.c. $\int_a^b (f(x) + c) dx = 0$

e uso $v(x) = f(x) + c$. Ottengo che $f(x) + c \equiv 0$ e quindi la tesi.

— o — o —

Anche in questo caso posso usare classi più ristrette di funzioni

— o — o —

Esempio $\min \left\{ \int_0^2 u^2 dx : u(0)=0, u(2)=5, \int_0^2 u(x) dx = 7 \right\}$

$\times$

Osservo che $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con

$$V := \left\{ v \in C^1([0,2]) : v(0) = v(2) = 0, \int_0^2 v(x) dx = 0 \right\}$$

Data $u \in \mathbb{X}$ e $v \in V$ calcolo

$$F(u+tv) = F(u) + 2t \int_0^2 u v + t^2 \int_0^2 v^2$$

$$\delta F(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = 2 \int_0^2 u v$$

Integrando per parti (e supponendo $u \in C^2$) troviamo

$$\delta F(u, v) = -2 \int_0^2 \ddot{u} v$$

Quindi, se u è un pto di min, deve verificare

$$\int_0^2 \ddot{u}(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C^1([0, 2]) \quad \int_0^2 v(x) dx = 0$$

$$v(0) = v(2) = 0$$

Lemma DBR $\Rightarrow \ddot{u}(x) \equiv \text{cost.} \Rightarrow u(x) = ax^2 + bx + c$

Imponendo le 3 condizioni $u(0) = \dots$, $u(2) = \dots$, $\int_0^2 u = \dots$
trovo i valori a, b, c .

La vera dimostrazione si fa poi con la disuguaglianza

Lemma DBR (altro enunciato)

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a, b)) \Rightarrow f(x) \equiv \text{cost in } [a, b]$$

Dim. Basta osservare che le funzioni del tipo $v(x)$ con
 $v \in C_c^\infty$ sono tutte e sole le $w \in C_c^\infty$ a media nulla

Esercizi Cosa posso concludere se

$$\textcircled{1} \int_a^b f v = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \quad \text{t.c.} \quad \int_a^b v = 2017 \quad f \equiv 0$$

$$\textcircled{2} \int_a^b f \ddot{v} = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \quad f(x) = ax + b$$

Oss. Stiamo con questi lemmi cercando l'ortogonale in
 $L^2((a, b))$ di un certo sottospazio V .

Calc. Var.

LEZIONE 04

Note Title

29/09/2017

NASCITA DELLE CONDIZIONI AL BORDO (BC)

Esempio 1 $F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^2) dx$

$$\mathcal{X} = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = A, u(1) = B\}$$

$$\begin{aligned} F(u+v) &= \int_0^1 (\dot{u} + \dot{v})^2 + (u+v)^2 \\ &= \int_0^1 \dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{v} + \dot{v}^2 + u^2 + 2uv + v^2 \end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) = 2 \int_0^1 (\dot{u}\dot{v} + uv) \quad \text{1ª Forma int.}$$

$$\stackrel{\text{per parti}}{=} 2 \int_0^1 (-\ddot{u}v + uv) dx = 2 \int_0^1 (-\ddot{u} + u)v \quad \text{2ª Forma Int.}$$

(niente termini di bordo perché $v(0) = v(1) = 0$)

Se u è p.to di minimo, allora per FLCV

$$-\ddot{u} + u \equiv 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} = u \quad \text{(ELE)} \\ u(0) = A \\ u(1) = B \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{DBC} \\ \text{DIRICHLET boundary cond.} \end{array}$$

$$u(x) = a \cos R x + b \sin R x$$

Esempio 2 Stesso $F(u)$, ma $\mathcal{X} = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = A\}$
da cui

$$\mathcal{V} = \{v \in C^1([0,1]) : v(0) = 0\}$$

$$\delta F(u, v) = 2 \int_0^1 (\dot{u}\dot{v} + uv) dx \quad \text{1ª forma int.}$$

Integrando per parti diventa

$$\delta F(u, v) = 2 \int_0^1 (-\ddot{u} v + u \dot{v}) dx + 2 \left[\underbrace{\dot{u} v}_0^1 - \underbrace{\ddot{u} v}_0^1 \right]$$

La seconda forma integrale contiene un termine di bordo

$$\delta F(u, v) = 2 \int_0^1 (-\ddot{u} + u) v dx + 2 \dot{u}(1) v(1)$$

Se u è un p.to di min., allora questa è 0 per ogni $v \in V$
 Procedo in 2 Fasi

- Fase 1: mi limito a considerare le v che verificano anche $v(1) = 0$.

Otengo la stessa eq. del 1° esempio da cui deduco che $-\ddot{u} + u \equiv 0$.

- Fase 2: l'eq. è diventata $\delta F(u, v) = \dot{u}(1) v(1) = 0$ e quindi basta scegliere $v \in V$ con $v(1) \neq 0$ per ottenere che $\dot{u}(1) = 0$.

Alla fine ottengo

$$\begin{cases} \ddot{u} = u & \text{(ELE)} \\ u(0) = A & \text{(DBC) data all'inizio} \\ \dot{u}(1) = 0 & \text{(NBC) nata "on the road"} \\ & \text{NEUMANN BC.} \end{cases}$$

Eq. di ordine 2 con due condizioni al bordo.

Conclusione tramite disuguaglianza

Esempio 3 Stesso $F(u)$, $\mathbb{X} := \{u \in C^1([0,1])\}$

$$\leadsto \begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = 0 \quad (\text{NBC}) \\ \dot{u}(1) = 0 \quad (\text{NBC}) \end{cases}$$

Tutto uguale fino all'integrazione per parti, poi

$$\delta F(u, v) = 2 \int_0^1 (-\ddot{u} + u) v + 2\dot{u}(1)v(1) - 2\dot{u}(0)v(0)$$

• 1ª fase: mi limito alle v t.c. $v(0) = v(1) = 0$ e ottengo $-\ddot{u} + u \equiv 0$, cioè (ELE)

• 2ª fase: prendo v t.c. $v(0) = 0$ e $v(1) \neq 0 \leadsto \dot{u}(1) = 0$
 " " " $v(0) \neq 0$ e $v(1) = 0 \leadsto \dot{u}(0) = 0$.

Esempio 4 $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1)\}$

è anche uno spazio vettoriale, quindi $V = \mathbb{X}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta F(u, v) &= \int_0^1 (-\ddot{u} + u) v + \overbrace{\dot{u}(1)v(1) - \dot{u}(0)v(0)}^{\text{uguali}} \\ &= \int_0^1 (-\ddot{u} + u) v + (\dot{u}(1) - \dot{u}(0)) v(1) \end{aligned}$$

1ª fase : ... $\leadsto \ddot{u} = u$ (ELE)

2ª fase : prendendo v con $v(0) = v(1) \neq 0 \leadsto \dot{u}(1) = \dot{u}(0)$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ u(0) = u(1) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} \ddot{u} = u \\ u(0) = u(1) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \end{cases}} \right] \begin{matrix} \text{(PBC)} \\ \uparrow \\ \text{Periodic.} \end{matrix}$$

Esempio 5 $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) : u(1) = u(0) + 5\}$

$$V = \{v \in C^1 \dots : v(1) = v(0)\}$$

Stesso conto di prima $\leadsto \dot{u}(1) = \dot{u}(0)$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ u(1) = u(0) + 5 \\ \dot{u}(1) = \dot{u}(0) \end{cases} \quad (\text{NBC})$$

Esempio 6 $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) : u(\frac{1}{2}) = A\}$

$$V = \{v \in \dots : v(\frac{1}{2}) = 0\}$$

$$\frac{1}{2} \delta F(u, v) = \int (-\ddot{u} + u) v + \dot{u}(1) v(1) - \dot{u}(0) v(0)$$

• 1^a fase Uso v con $v(0) = v(1) = 0$ oltre a $v(\frac{1}{2}) = 0$
La classe di queste v è abbastanza ricca da concludere che $-\ddot{u} + u \equiv 0$

• 2^a fase Ottengo (NBC) $\dot{u}(1) = \dot{u}(0) = 0$.

Formalmente ottengo $\begin{cases} \ddot{u} = u \\ u(\frac{1}{2}) = A \\ \dot{u}(1) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$ Troppe condizioni 😞

Ho 2 casi

- Sono fortunato e c'è la soluzione $\leadsto$ con la disug. dim. che è effettivamente un minimo
- Le cond. sono incompatibili $\leadsto$ il min. non esiste
Chi è l'inf. ?

Risolve i 2 pbm. separatamente su $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ u(\frac{1}{2}) = A \end{cases}$$

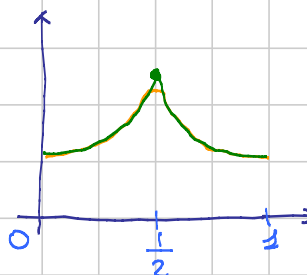
$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(1) = 0 \\ u(\frac{1}{2}) = A \end{cases}$$

Accade che in $\frac{1}{2}$
non si cucolano C^1

Il valore calcolato nell'unione
è l'inf. cercato

Dici

- da una parte sono le
solite disug.
- dall'altra parte basta approssimare



Osservazioni sparse

① $F(u) = \int \ddot{u}^2 + u^2 \rightsquigarrow$ (ELE) di ordine 4

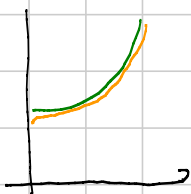
② Se per il pbm. dell'inizio metto $\dot{u}(0) = 3$

Come sempre ottengo $\ddot{u} = u$ (ELE) e poi ho

$$0 = \dot{u}(1)v(1) - \dot{u}(0)v(0), \text{ da cui } \dot{u}(1) = \dot{u}(0) = 0$$

Morale: se $F(u)$ dipende da u e $\ddot{u}$ NON POSSO METTERE
COND. su $\dot{u}$.

L'inf. è quello in cui non c'è la cond.



Calc. Var.

LEZIONE 05

Note Title

03/10/2017

EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

dove $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 x s p

Data $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e data $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $v(a) = v(b) = 0$ posso definire

$$\psi(t) := F(u+tv) = \int_a^b L(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) dx$$

e pone

$$\delta F(u, v) := \psi'(0)$$

Teorema (Integrali dipendenti da parametro)

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un interv., sia $\delta > 0$, sia

$$f : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 x t

Poniamo

$$\psi(t) := \int_a^b f(x, t) dx$$

Allora

(i) Se $f(x, t)$ è continua su $[a, b] \times (-\delta, \delta)$, allora $\psi(t)$ è cont. su $(-\delta, \delta)$.

(ii) Se $f_t(x, t)$ è cont. su $[a, b] \times (-\delta, \delta)$, allora ψ è derivab. e

$$\psi'(t) = \int_a^b f_t(x, t) dx$$

(La deriv. dell'integrale è
l'integrale della derivata)

Utilizzando il teorema otteniamo

$$\psi'(t) = \int_a^b [L_s(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v})v + L_p(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v})\dot{v}] dx$$

da cui

$$\delta F(u, v) = \psi'(0) = \int_a^b [L_s(x, u, \dot{u})v + L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}] dx$$

Prima forma integrale della variazione prima

Ipotesi utilizzate:

- $L \in C^1$ (almeno in s e p)
- $u \in C^1$
- $v \in C^1$

Non abbiamo usato che $v(a) = v(b) = 0$.

Integrando per parti il secondo termine troviamo

$$\int_a^b L_p(x, u, \dot{u})\dot{v} dx = [L_p(x, u, \dot{u})v]_a^b - \int_a^b [L_p(x, u, \dot{u})]'v dx$$

Se $v(a) = v(b) = 0$, allora il termine di bordo si annulla e otteniamo

$$\delta F(u, v) = \int_a^b [L_s(x, u, \dot{u}) - (L_p(x, u, \dot{u}))']v dx$$

Seconda forma integrale della variazione prima

Ipotesi utilizzate:

- $L \in C^2$
- $u \in C^2$
- $v \in C^1$ e $v(a) = v(b) = 0$.

Se u è un p.to di minimo (tra quelli che hanno lo stesso dato al bordo), allora $\delta F(u, v) = 0$ per ogni $v \in \dots$

In questo caso usando FLCV ricaviamo

$$\boxed{[L_p(x, u, \dot{u})]' = L_s(x, u, \dot{u})} \quad (\text{ELE}) \text{ in forma diff.}$$

Ipotesi utilizzate:

- $L \in C^2$
- $u \in C^2$
- u p.to di min./max per F .

Condizione di Neumann generale

$$u \in \arg\min \{ F(u) : \underbrace{u \in C^1([a, b]) : u(a) = A} \}$$

Se c'è abbastanza regolarità, usando solo v con $v(a) = v(b) = 0$ ritroviamo (ELE) come sopra

A quel punto integrando per parti la 1ª formula troviamo

$$0 = \delta F(u, v) = \int_a^b \underbrace{[(L_p(x, u, \dot{u}))' - L_s(x, u, \dot{u})]}_{\equiv 0 \text{ per (ELE)}} v \, dx$$

$$+ [L_p(x, u, \dot{u}) v]_a^b$$

$$\underbrace{L_p(b, u(b), \dot{u}(b)) v(b) - L_p(a, u(a), \dot{u}(a)) v(a)}$$

↓
deve essere 0
per forza

↑
può essere 1

0
per forza

$$\boxed{L_p(x, u, \dot{u}) = 0} \quad \text{nell'estremo considerato}$$

NBC generale

Oss. L'equazione (ELE)

$$(L_p(x, u, \dot{u}))' = L_s(x, u, \dot{u})$$

espansa diventa

$$L_{px}(x, u, \dot{u}) + L_{ps}(x, u, \dot{u}) \dot{u} + L_{pp}(x, u, \dot{u}) \ddot{u} = L_s(x, u, \dot{u})$$

Si può scrivere in forma normale (e quindi neutra nelle teorie classiche) se

$$L_{pp}(x, u(x), \dot{u}(x)) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

ELE in forma DBR

Scrivo la 1^a forma integrale, introduco la funzione

$$\hat{L}(x) := \int_a^x L_s(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$$

e osservo che

$$\int_a^b L_s(x, u, \dot{u}) v = \underbrace{[\hat{L}(x) v(x)]_a^b}_0 \text{ se } v(a) = v(b) = 0 - \int_a^b \hat{L}(x) \dot{v}(x) dx$$

da cui

$$\delta F(u, v) = \int_a^b [-\hat{L}(x) + L_p(x, u, \dot{u})] \dot{v} dx$$

Se u è p.to di $u_{\max}/u_{\min}$, allora dal lemma DBR otteniamo che

$$L_p(x, u, \dot{u}) = c + \int_a^x L_s(t, u(s), \dot{u}(s)) ds$$

ELE - DBR
(serve meno
reg. in $L_{\text{col}} u$)

ELE in forma ERDMANN

Consideriamo il caso speciale in cui L non dipende da x

$$(L_p(u, \dot{u}))' = L_s(u, \dot{u}) \quad \text{ELE - classica}$$

Moltiplico per $\ddot{u}$

$$(L_p(u, \dot{u}))' \ddot{u} = L_s(u, \dot{u}) \ddot{u}$$

$$" \\ (L_p(u, \dot{u}) \ddot{u})' = L_p(u, \dot{u}) \ddot{\ddot{u}}$$

da cui

$$(L_p(u, \dot{u}) \ddot{u})' = L_s(u, \dot{u}) \ddot{u} + L_p(u, \dot{u}) \ddot{\ddot{u}} = (L(u, \dot{u}))'$$

e quindi

$$L_p(u, \dot{u}) \ddot{u} = \text{cost} + L(u, \dot{u})$$

ELE - Erdmann

↑

Eq. Diff. di ordine 1

Oss. Comunque ci sono 2 costanti per sistemare i dati al bordo,

Oss. ELE classica ed Erdmann NON sono equivalenti, ma

- u soddisfa ELE $\Rightarrow u$ soddisfa ELE - Erdmann
- u soddisfa ELE - Erdmann $\Rightarrow u$ soddisfa ELE classica nei punti $x \in [a, b]$ t.c. $\ddot{u}(x) \neq 0$.

(basta fare pass. prec. al contrario)

Piccola generalizzazione: F dipende da n derivate succ.

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(k)}) dx$$

$$L(x, s, p_1, \dots, p_k)$$

$$\delta F(u, v) = \int_a^b L_s(\dots) v + L_{p_1}(\dots) \dot{v} + L_{p_2}(\dots) \ddot{v} + \dots + L_{p_k}(\dots) v^{(k)} dx$$

Integrando per parti e supponendo v abbastanza nulla al bordo

$$\delta F(u, v) = \int_a^b [L_s - (L_{p_1})' + (L_{p_2})'' - \dots] v dx$$

Quindi se u è p.to di max/min dal FLC v troviamo

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \frac{d^i}{dx^i} L_{p_i}(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(k)}) = L_s(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(k)})$$

ELE per dipendenza da più derivate

Esercizio Scrivere ELE per funzionali "con 2 variabili"

$$F(u, v) := \int_a^b L(x, \underbrace{u(x)}_0, \underbrace{v(x)}_0, \underbrace{\dot{u}(x)}_0, \underbrace{\dot{v}(x)}_0) dx$$

Calc. Var.

LEZIONE 06

Note Title

03/10/2017

Come dimostro che u è minimo di F ?

- ① via convessità
 - ② via Lemma trivial
 - ③ Calibrazioni
 - ④ Campi di Weierstrass
- } ora
- } seconda parte del corso

1 ConvessitàAnalisi 1 Sia $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.Sia $x_0 \in (c, d)$.Allora esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) \quad \forall x \in [c, d]$$

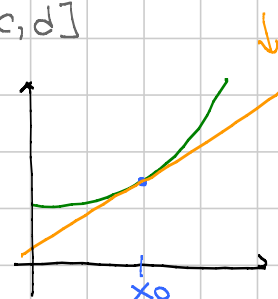
$$f(x_0) + m(x - x_0)$$

[Facile se $f \in C^2$, ma vero in generale, basta prendere

$$m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$$

↓ derivata dx e sx in x_0 :

vedi definizioni di Analisi 1]

Analisi 2 Sia $f(x, y)$ convessa, sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.Allora esistono $m_1 \in \mathbb{R}$ ed $m_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) \quad \forall (x, y) \in \text{zona di def.}$$

[Facile se $f \in C^2$, ma vero in generale].

Uso della convessità

Consideriamo $F(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x)) dx$ con DBC

Supponiamo che

(i) ci sia abbastanza regolarità ($L \in C^2$)

(ii) $u_0(x)$ sia soluzione di ELE con DBC

(iii) per ogni $x \in [a, b]$ la funzione $(s, p) \rightarrow L(x, s, p)$ è convessa (come funzione di due variabili)

Allora u_0 è p.to di min. per il pbm. con le DBC.

Dm. Prendo un qualunque altro competitor w e pongo $v(x) := w(x) - u_0(x)$.
 Osservo che $v(a) = v(b) = 0$.
 Scrivo

$$F(w) = F(u_0 + v) = \int_a^b L(x, u_0 + v, u'_0 + v') dx$$

Ora dalla convessità e regolarità di L ottengo la disug.

$$L(x, \underbrace{s+s_1}_{u_0+v}, \underbrace{p+p_1}_{u'_0+v'}) \geq L(x, \underbrace{s}_{u_0(x)}, \underbrace{p}_{u'_0(x)}) + \underbrace{L_s(x, u_0, u'_0)}_{v(x)} s_1 + \underbrace{L_p(x, u_0, u'_0)}_{v'(x)} p_1$$

da cui

$$F(w) \geq \int_a^b L(x, u_0, u'_0) + \underbrace{L_s(x, u_0, u'_0) v + L_p(x, u_0, u'_0) v'}_{\text{L'integrale di questo si annulla per la 1ª forma integrale di ELE}}$$

$$= \int_a^b L(x, u_0, u'_0) dx = F(u_0)$$

— o — o —

- Oss. (1) Abbiamo in realtà usato solo che u_0 risolve la 1ª forma integrale di ELE, che richiede meno reg. su L (basta C^1)
- (2) Se inoltre L è strett. convessa in (s,p) , allora la disug. di analisi 2 è stretta se $(x,y) \neq (x_0,y_0)$, da cui l'unico modo per avere uguaglianza è che v e $\dot{v}$ siano nulle, cioè $v(x) \equiv 0$.
Quindi $u_0(x)$ è l'unico p.to di min.

Esempio $F(u) = \int_0^1 (\dot{u}(x))^4 dx$

Minimizzo con $u(0)=0, u(1)=5$.

$$L(x,s,p) := p^4 \rightsquigarrow [L_p(x,u,\dot{u})]' = L_s(x,u,\dot{u})$$

$$(4\dot{u}^3)' = 0$$

$$\rightsquigarrow \dot{u}^3 = \text{costante} \rightsquigarrow \dot{u} = \text{costante} \rightsquigarrow u = \text{retta}.$$

Sappiamo per l'enunciato prec. che la retta è l'unico p.to di min. Senza pensare alla convessità è meno evidente

$$\begin{aligned} F(w) &= F(u+v) = \int_0^1 (\dot{u} + \dot{v})^4 \\ &= \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^4}_{F(u)} + \underbrace{4\dot{u}^3\dot{v}}_{=0 \text{ integrando per parti ed usando ELE}} + \underbrace{6\dot{u}^2\dot{v}^2 + 4\dot{u}\dot{v}^3 + \dot{v}^4}_{\geq 0 \text{ (vero ma non del tutto evidente)}} \end{aligned}$$

$$6\dot{u}^2\dot{v}^2 + 4\dot{u}\dot{v}^3 + \dot{v}^4 = \dot{v}^2 \underbrace{(6\dot{u}^2 + 4\dot{u}\dot{v} + \dot{v}^2)}_{\text{forma quadratica def. positiva.}}$$

② Lemma trivial Sia X un insieme, e siano $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni.

Supponiamo che

(i) $F(x) \geq G(x)$ per ogni $x \in X$,

(ii) $x_0 \in X$ è p.to di min. per G ,

(iii) $F(x_0) = G(x_0)$.

Allora x_0 è p.to di min. per F .

Dim Per ogni $x \in X$ vale

$$F(x) \geq G(x) \geq G(x_0) = F(x_0).$$

$\uparrow$ (i) $\uparrow$ (ii) $\uparrow$ (iii)

Esempio $F(u) = \int_0^2 (u^2 - 1)^2 dx$

$$X := \{u \in C^1([0,2]): u(0) = 1, u(2) = 7\}$$

Il guaio è che $L(x, s, p) = (p^2 - 1)^2$ non è convessa (doppio pozzo)

Congettura: la retta

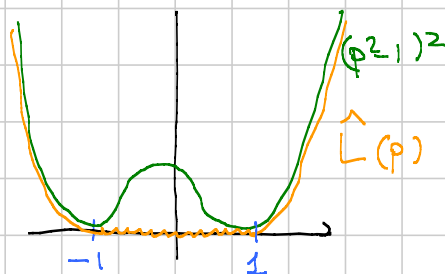
$$u_0(x) := 1 + 3x$$

è l'unico p.to di min.

Idea: trovare la $G(u)$ giusta. Considero

$$\hat{L}(p) := \begin{cases} L(p) & \text{se } |p| \geq 1 \\ 0 & \text{se } |p| \leq 1 \end{cases}$$

Osservo che $\hat{L}(p)$ è una funzione convessa e pongo



$$G(u) := \int_0^2 \hat{L}(\dot{u}) dx$$

Non mi resta che verificare (i) + (ii) + (iii)

(i) segue da $L \geq \hat{L}$

(ii) segue dal fatto che $\hat{L}$ è convessa, quindi u_0 è p.to di min per G

(iii) $F(u_0) = G(u_0)$ segue da $L(3) = \hat{L}(3)$.

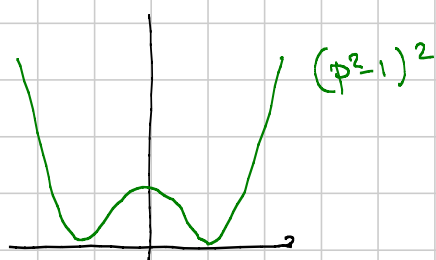
Da questo segue che $u_0(x)$ è p.to di min. per F .

In realtà è pure unico perché u_0 è l'unico p.to di min. di G in quanto $\hat{L}$ è strett. convessa in un intorno di $p=3$, quindi l'unico p.to di contatto con la retta tangente è $p=3$.

Cosa succede con lo stesso $F(u)$ se

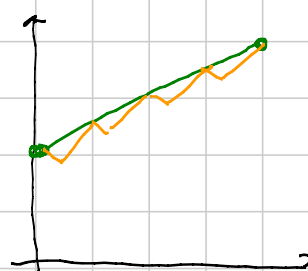
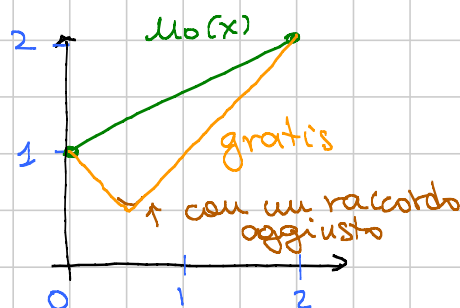
$$\mathbb{X} = \{u \in C^2([0,1]) : u(0)=1, u(2)=2\}$$

In questo caso $u_0(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ non è p.to di min, anzi il min. non esiste e l'inf. è 0.



$$F(u) = \int_0^2 \left[(\dot{u}^2 - 1)^2 + \left(u - 1 - \frac{1}{2}x\right)^2 \right] dx$$

L'inf. resta 0 !!!



Calc. Var.

LEZIONE 07

Note Title

10/10/2017

TRANSVERSALITY

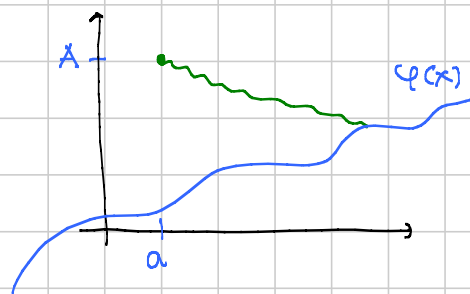
POINT-TO-CURVE PROBLEMS

Sia dato un p.to $(a, A) \in \mathbb{R}^2$

Sia data una funzione

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, u') dx$$

Voglio minimizzare $F(u)$ tra tutte le coppie (u, b) tali che

$$u \in C^1([a, b]), \quad u(a) = A, \quad u(b) = \varphi(b)$$

p.to terminale sta su grafico $\varphi(x)$.Può essere che b non sia la prima intersezione.

Obiettivo: trovare equazioni di Eulero-Lagrange in questo caso.

Si ottiene, sotto opportune ipotesi ($L \in C^2, \varphi \in C^1$) che, se (u_0, x_0) minimizza, allora

$$[L_p(x, u_0, u'_0)]' = L_s(x, u_0, u'_0) \quad \forall x \in (a, x_0) \quad \text{Solita ELE}$$

$$u_0(a) = A \quad \text{Solita DBC}$$

$$L_p(x_0, u_0(x_0), u'_0(x_0)) [u'_0(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)] = L(x_0, u_0(x_0), u'_0(x_0))$$

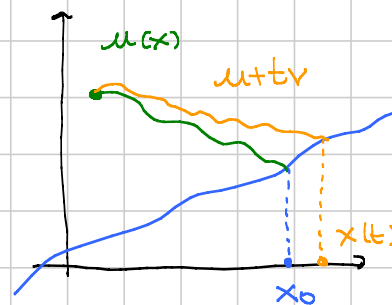
TRANSVERSALITY

$$u(x_0) = \varphi(x_0)$$

Oss. MOLTO brutale: se φ fosse una retta verticale, verrebbe
 " $\dot{\varphi}(x_0) = +\infty$ " da cui la classica
 NBC $L_p(x_0, u_0(x_0), u'_0(x_0)) = 0$.

Dim.

Passo 1 Considero $u+tv$ per una opportuna $v(x)$.
Sia $x(t)$ il punto in cui $u+tv$ incontra φ , cioè



$$u(x(t)) + t v(x(t)) = \varphi(x(t))$$

Esistenza / unicità di $x(t)$ è una questione di teo. funz. impl.
Cioè considero

$$\Phi(x, t) := u(x) + t v(x) - \varphi(x)$$

osservo che $\Phi(x_0, 0) = 0$ e spero che per $t \in (-\delta, \delta)$ io possa ricavare x in funzione di t .

$$\begin{aligned} \Phi_t(x, t) &= v(x) & \Phi_x(x, t) &= u'(x) + t v'(x) - \dot{\varphi}(x) \\ \Phi_x(x_0, 0) &= u'(x_0) - \dot{\varphi}(x_0). \end{aligned}$$

Se $u'(x_0) - \dot{\varphi}(x_0) \neq 0$, allora posso ricavare. A quel punto pongo

$$\psi(t) := \int_a^{x(t)} L(x, u+tv, u'+tv') dx \quad \leadsto \quad \psi'(0) = 0$$

$$\psi'(t) = \int_a^{x(t)} \dots \text{ solito } \dots + L(x(t), u(x(t))+tv(x(t)), \dots) \dot{x}(t)$$

$\uparrow$
 val. dip.
 da parametro

$$\begin{aligned} \psi'(0) &= \int_a^{x_0} [L_s(x, u, \ddot{u})v + L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}] dx + L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) \dot{x}(0) \\ &\quad - \int_a^{x_0} [L_s - L_p'] v + [L_p(x, u, \dot{u})v]_a^{x_0} + L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) \dot{x}(0) \end{aligned}$$

Dal teo. funz. cuspide ricaviamo

$$\dot{x}(t) = - \frac{\phi_t(x(t), t)}{\phi_x(x(t), t)} \quad \leadsto \quad \dot{x}(0) = - \frac{v(x_0)}{\bar{u}(x_0) - \bar{\varphi}(x_0)}$$

Sostituendo

$$\begin{aligned} \psi'(0) = \int_a^{x_0} [L_s - L_p'] v + L_p(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0)) v(x_0) \\ + L(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0)) \left(- \frac{v(x_0)}{\bar{u}(x_0) - \bar{\varphi}(x_0)} \right) \end{aligned}$$

- Uso funzioni v t.c. $v(x_0) = 0$ e da FLCV deduco ELE in (a, x_0)
- Scelgo v con $v(x_0) = 1$ e ottengo

$$L_p(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0)) = \frac{L(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0))}{\bar{u}(x_0) - \bar{\varphi}(x_0)}$$

Moltiplico e ho transversality.

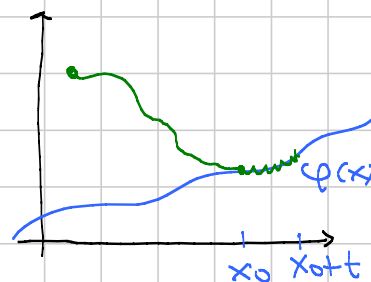
Passo 2 Supponiamo che $\bar{u}(x_0) = \bar{\varphi}(x_0)$

Uso come competitor φ a x_0 "allungata"

$$\psi(t) := \int_a^{x_0} L(x, u, \bar{u}) + \int_{x_0}^{x_0+t} L(x, \varphi, \bar{\varphi})$$

$$\psi'(t) = L(x_0+t, \varphi(x_0+t), \bar{\varphi}(x_0+t))$$

$$\psi'(0) = L(x_0, \varphi(x_0), \bar{\varphi}(x_0)) = L(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0))$$



Non posso dire che $\psi'(0) = 0$ perché ψ è definita solo per $t \geq 0$

Posso dire solo che $\psi'(0) \geq 0$ da cui $L(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0)) \geq 0$

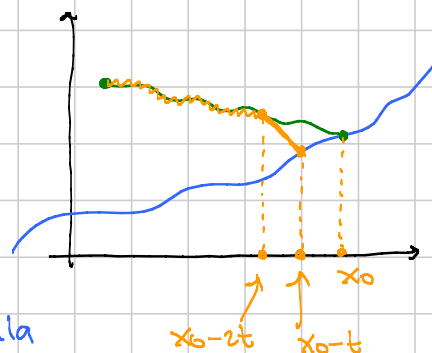
Passo 3 Sempre nelle ipotesi $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$ cerco di "accorciare la u "

$\psi(t)$ = funzionale calcolato sulla u "accorciata"

$$= \int_a^{x_0-t} L(x, u, \dot{u}) + \int_{x_0-t}^{x_0} L(x, \ell, \dot{\ell})$$

equazione della
retta di raccordo

$$= \int_a^{x_0} L(x, u, \dot{u}) - \int_{x_0-t}^{x_0} L(x, u, \dot{u}) + \int_{x_0-t}^{x_0} L(x, \ell, \dot{\ell})$$



Il primo termine è costante $\leadsto$ quando derivo sparisce.
La deriv. del 2° termine è

$$-2 L(x_0-t, u(x_0-t), \dot{u}(x_0-t))$$

Quando metto $t \rightarrow 0$ viene $-2 L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))$

Per derivare l'ultimo termine potrei scrivere l'eq. di ℓ (come retta passante per 2 punti) e fare i conti.

In alternativa, osservo che per la media integrale vale

$$\int_{x_0-t}^{x_0} L(x, \ell(x), \dot{\ell}(x)) = t L(x(t), \ell(x(t)), \dot{\ell}(x(t)))$$

Dividendo per t e passando al limite per $t \rightarrow 0$ trovo che la deriv. del terzo termine è

$$L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))$$

Ho usato che $x_0-t \leq x(t) \leq x_0$
e $\ell(x(t)) \in [u(x_0-t), u(x_0)]$

Per passare al limite

$\dot{\ell}(x(t)) \rightarrow \dot{u}(x_0)$ senza che
 $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$.

Conclusione:

$$\psi'(t) = -L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) \geq 0$$

$\uparrow$ definita solo per $t \geq 0$.

Questo completa la dim. anche nel caso $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$

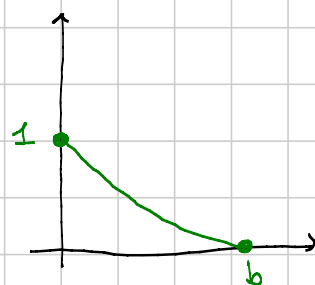
Oss. Controllare bene il passaggio $\dot{L}(x(t)) \rightarrow \dot{u}(x_0)$
(es. analisi 1).

Esempio $F(u, b) = \int_0^b (\dot{u}^2 + u^2) dx$

Prendiamo DBC $u(0) = 1$

e $\varphi(x) \equiv 0$.

Esiste il minimo?



$$(ELE) \rightsquigarrow (L_p)' = L_s \rightsquigarrow (2\dot{u})' = 2u \rightsquigarrow \ddot{u} = u$$

$$\rightsquigarrow u(x) = a \cosh x + b \sinh x$$

$$(DBC) u(0) = 1 \rightsquigarrow a = 1 \rightsquigarrow u(x) = \cosh x + b \sinh x$$

$$(Transversality) \quad L_p(x, u, \dot{u})(\dot{u} - \dot{\varphi}) = L(x, u, \dot{u}) \quad \text{in } x_0$$

$$2\dot{u}(\dot{u} - 0) = \dot{u}^2 + u^2$$

$$\dot{u}^2 = u^2 \quad \text{in } x_0$$

Nel contatto vale $u(x_0) = 0$, quindi deve essere $\dot{u}(x_0) = 0$.
La condizione diventa

$$\sinh x_0 + b \cosh x_0 = 0$$

$$\dot{u}(x_0) = 0$$

$$\cosh x_0 + b \sinh x_0 = 0$$

$$u(x_0) = 0$$

$$b = -\frac{\sinh x_0}{\cosh x_0} = -\frac{\cosh x_0}{\sinh x_0}$$

$$\rightsquigarrow \sinh^2 x_0 = \cosh^2 x_0$$

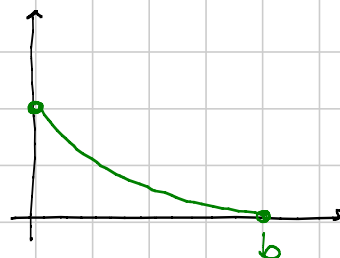
$\rightsquigarrow$ impossibile $\rightsquigarrow$ no sol. !!!

Esercizio Provare a vedere che succede con $c(x) \equiv c$ costante.

Cosa vuol dire che non c'è soluzione?

Se considero il minimo con

DBC $u(0) = 1$ e $u(b) = 0$,



questo ha soluzione. Sia $u(b)$ il minimo.

Il conto della transversality dovrebbe dire che

$u(b)$ è strett. monotona (positiva?)

e quindi in ogni caso il minimo si ottiene per $b \rightarrow 0^+$ o per $b \rightarrow +\infty$ a seconda della monotonia.

$u(b)$ sarà decrescente: calcolo $u'(b)$.

— 0 — 0 —

Calc. Variazioni

LEZIONE 08

Note Title

10/10/2017

ROAD MAP METODO INDIRETTO

- ① Determino condizioni necessarie : ELE + BC
- ② Spero di essere capace a risolvere
- ③ Spero di dim. che le soluzioni sono minimi
 - via convessità
 - via funzionale ausiliario.

In quale classe ambientare i problemi ?

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, u') dx$$

Sia L continua in (x, s, p) .

Supponiamo di avere DBC (ma poco cambia in altri casi).

Possibili ambientazioni:

- $u \in C^1$
- $u \in C^\infty$
- $u \in C^1$ a tratti ($u \in C^0([a, b])$)
 e inoltre esiste un numero finito di pti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ t.c. la ristretta a $[x_{i-1}, x_i]$ è di classe C^1 , quindi nei pti strani esistono derivata dx e sx)

Teorema L'inf di $F(u)$ nelle 3 classi è lo stesso.

La Dim è facile conseguenza di un Lemma di approssimazione del tipo

Ogni funzione in C^1 a tratti si può approssimare con una succ. fin di funzioni C^∞ , dove si intende che

- ① $u_m \rightarrow u$ unif. in $[a, b]$
- ② $\dot{u}_m \rightarrow \dot{u}$ unif sui cpt. contenuti in $[a, b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$
- ③ $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|\dot{u}_m(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall m \in \mathbb{N}$

A questo pto passare al limite nell'integrale è un esercizio di analisi 2.

— o — o —

Esempio 1 Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, risolvere

$$\min \left\{ \int_a^b \dot{u}^2 + (u-f)^2 : u \in C^1([a, b]) \right\}$$

$$(ELE) \quad (L_p)' = L_s \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{u} = u - f$$

$\rightsquigarrow$ per molte classi di f si sa risolvere esplicitamente.

In ogni caso, per ogni $f \in C^0$, esiste una famiglia a 2 parametri di soluz:

$$u(x) = a \cos R x + b \sin R x + \tilde{u}(x)$$

$\swarrow$ sol. qualunque equ. non omogenea

$$\text{Nascono (NBC)} \quad L_p = 0 \text{ al bordo} \quad \ddot{u}(a) = \ddot{u}(b) = 0$$

Facile verifica di algebra lineare: (ELE) + (NBC) ha sol. unica

L'unica soluz. è un pto di min. perché

$$L(x, s, p) = p^2 + (s - f(x))^2$$

è strutt. conv. nella coppia (s, p) (matrice Hessiana def. pos.)

Proprietà qualitativa della soluzione

$$\begin{aligned} \max \{u(x) : x \in [a,b]\} &\leq \max \{f(x) : x \in [a,b]\} \\ \min \{ \dots \} &\geq \min \{ \dots \} \end{aligned}$$

Dim. variazionale

Solito argomento di truncamento:
ad un minimo $u_0(x)$ non conviene andare sopra $f(x)$, perché se
trouco risparmio su u'^2 e su $(u-f)^2$.

Detto meglio: supp. esista $x_0 \in (a,b)$ t.c.

$$u(x_0) > \max f$$

Siano $x_1 < x_0 < x_2$ t.c. $u(x_1) = \max f$ e $u(x_2) = \max f$
allora

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{fuori da } [x_1, x_2] \\ \max f & \text{su } [x_1, x_2] \end{cases}$$

Allora $F(\bar{u}) < F(u)$

$\uparrow$ C^1 a tratti, quindi ammissibile

Se x_1 e x_2 in qualche modo non esistono, allora posso prendere
 $x_1 = a$ oppure $x_2 = b$.

Achtung! Prendere $\bar{u}(x) := \min \{u(x), \max f\}$ è pericoloso
perché non è detto che sia C^1 a tratti.

Dim usando equazione

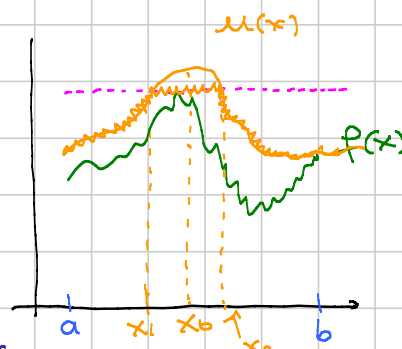
Sia x_0 il p.to di max di u .

Supponiamo che $u(x_0) > \max f$.

Guardo (ELE)

$$\underbrace{u''(x_0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{in un p.to} \\ \text{di max è } \leq 0}} = \underbrace{u(x_0) - f(x_0)}_{\text{ho appena supposto che sia } > 0}$$

E se x_0 è uno dei 2 p.ti di bordo?



Esempio 2

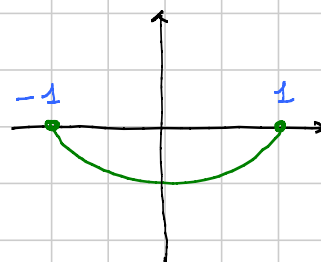
$$\min \left\{ \int_{-1}^1 \ddot{u}^4 + u : u(-1) = u(1) = 0 \right\}$$

$$(ELE) : (L_p)' = L_s$$

$$(4\ddot{u}^3)' = 1$$

$$12\ddot{u}^2 \ddot{u}' = 1$$

$$\ddot{u}' = \frac{1}{12} \frac{1}{\ddot{u}^2}$$



Volevamo si risolve ponendo $\ddot{u} = v$ e diventa autonoma del 2° ordine in v .

Alternativa: Lagrangiana autonoma $\leadsto$ (ELE) in forma Erdmann.

$$L_p(x, u, \ddot{u}) \ddot{u} = C + L(x, u, \ddot{u})$$

$$4\ddot{u}^3 \ddot{u} = C + \ddot{u}^4 + u$$

$$3\ddot{u}^4 = C + u$$

$$\leadsto \ddot{u}^4 = \frac{u}{3} + C \quad \leadsto \ddot{u} = \pm \sqrt[4]{\frac{u}{3} + C}$$

$$\int \frac{\ddot{u}}{\sqrt[4]{\frac{u}{3} + C}} = \int 1 \quad 4\left(\frac{u}{3} + C\right)^{\frac{3}{4}} = x + d$$

$$\left(\frac{u}{3} + C\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{x}{4} + d \quad \leadsto u = 3\left(\frac{x}{4} + d\right)^{\frac{4}{3}} - C$$

Cerco C e d in modo da soddisfare le DBC

$\leadsto$ verrai $d=0$ e C in modo da fare venire 0 in ± 1

$$u(x) = 3 \left| \frac{x}{4} \right|^{\frac{4}{3}} - C$$

Oss. Ho ottenuto $u(x)$ "facendo il furbo", ma posso diventare perfettamente rigoroso con le disug. finali.

Basta osservare che $\rightarrow u$ risolve (ELE) anche in una forma molto debole (1^a forma integrale)

$$\rightarrow L(x, s, p) = p^4 - s$$

è convessa nella coppia (s, p)
anche se non strettamente

Da questo segue che $u(x)$ è un p.to di minimo.

Facendo bene il conto della convessità, si vede che è unico grazie alle DBC.

Oss. Il minimo in questione

$\rightarrow$ è C^1 , ma non C^2

$\rightarrow$ risolve (ELE) nella forma $(4i^3)' = 1$
ma non nella forma $12i^2 i'' = 1$

Il colpevole della non regolarità è l'annullamento di L_{pp} .

— 0 — 0 —

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 09

Note Title

13/10/2017

METODO DIRETTO

→ Dimostrare l'esistenza del minimo
(poi si può cercare di trovarlo)

$$F: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$X \rightarrow$ insieme

→ Spazio con nozione di convergenza ←

→ Spazio topologico

→ Spazio metrico ←

→ Spazio di Banach

→ Spazio di Hilbert ←

→ $\mathbb{R}^n$

Def. Dato un insieme X , una nozione di conv. in X è
dichiarare le succ. conv. ed i relativi limiti.

Più formalmente, detto

$$\text{Seq}(X) = \{\text{succ. in } X\} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow X\}$$

Una nozione di conv. è un sottoinsieme qualunque di

$$\text{Seq}(X) \times X$$

$$"x_n \rightarrow x_\infty"$$

Oss. Il sottoinsieme può essere qualunque, tipo

→ succ. costanti che tendono ad altro

→ succ. che hanno infiniti limiti

→ succ. conv. con sottosucc. che convergono ad altro.

Def. Un sottoinsieme $K \subseteq X$ si dice compatto (per succ.) se ogni succ. a valori in K ammette una s.succ. che converge ad un elem. di K .

Def. Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- continua se per ogni succ. $x_n \rightarrow x_\infty$ in X vale $f(x_n) \rightarrow f(x_\infty)$
- semicontinua inferiormente se per ogni succ. $x_n \rightarrow x_\infty$ in X vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_\infty).$$

Analogamente si definiscono le semicont. sup.

Teorema (Weierstrass) Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo

- (i) X sia compatto
 - (ii) f sia SCI
- } rispetto alla stessa nozione di convergenza

Allora esiste

$$\min \{ f(x) : x \in X \}.$$

Dim. Poniamo $I := \inf \{ f(x) : x \in X \}$ (esiste per forza in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$)

Per un lemma classico esiste $\{y_n\} \subseteq f(X)$ t.c.

$$y_n \rightarrow I$$

Per def. di immagine, esiste $\{x_n\} \subseteq X$ t.c. $y_n = f(x_n)$.

Poiché X è compatto esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$. Allora

$$I \leq f(x_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = I$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 I è inf f è SCI def. di x_{n_k} perché y_n ha lim. def. di y_n

Quindi $I = f(x_\infty)$, e da questo momento sappiamo che $I \in \mathbb{R}$.

— o — o —

Oss. Le due richieste (i) e (ii) sono antitetiche, cioè

- se ho tante succ. conv., allora (i) facile e (ii) difficile
- se ho poche " " " (ii) facile e (i) difficile.

— o — o —

Def. Una $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice coerciva se

$$\exists K \subseteq X \text{ compatto t.c. } \sup\{f(x) : x \in K\} = \inf\{f(x) : x \in X\}$$

Corollario Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è coerciva e SCI, allora esiste min.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Dim.} & \inf_{x \in X} f(x) & = & \inf_{x \in K} f(x) & = & \min_{x \in K} f(x) \\ & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & \text{coerc.} & & \text{Weierstrass} \end{array}$$

Corollario Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è SCI ed esiste un sottolivello contenuto in un compatto e non vuoto, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \exists K \subseteq X \text{ compatto} : \emptyset \neq \{x \in X : f(x) \leq M\} \subseteq K$$

Allora esiste il minimo.

Dim. Uso corollario precedente con questo K .

Corollario (Analisi 2). Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ SCI e tale che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste il minimo.

Dim. Tutti i sottolivelli sono chiusi e limitati. $\square$

Fatti utili sugli spazi di Hilbert

Uno spazio di Hilbert H è

- uno spazio vettoriale
- uno spazio in cui c'è un prod. scalare definito pos.
 $\langle x, y \rangle$
- dal prodotto scalare deriva una norma

$$|x| = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

dalla norma deriva una distanza rispetto alla quale H diventa uno spazio metrico COMPLETO.

Oss. Dalla metrica segue una nozione di conv., cioè
 $x_n \rightarrow x_\infty$ se e solo se $\|x_n - x_\infty\| \rightarrow 0$
↑
come numeri.

Def. Uno sp. di Hilbert H si dice SEPARABILE se esiste
 $D \subseteq H$ denso e numerabile.

Def. Un sottoinsieme $\{e_n\} \subseteq H$ si dice BASE HILBERTIANA
 (o sistema ortonormale completo, o base ortonormale)
 se

$$\textcircled{1} \quad \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$\textcircled{2} \quad \text{Span}(\{e_n\})$ è denso in H
↑ insieme comb. lineari finite.

— o — o —

Teorema Se H è un Hilbert separabile, allora ammette almeno una (ma in realtà infinite) base Hilbertiana.

Def. Dato un vettore $v \in H$ ed una base Hilbertiana $\{e_n\}$, allora

$$v_k := \langle v, e_k \rangle$$

si dice componente di v rispetto ad e_k .

Prop. Sia H un Hilbert con base Hilbertiana $\{e_n\}$. Allora le componenti hanno le seguenti proprietà

$$\textcircled{1} \quad \|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_n \rangle^2 \quad (\text{Pitagorone})$$

$$\textcircled{2} \quad \langle v, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} v_n w_n$$

Fatto fondamentale Se H ammette una base Hilbertiana, allora c'è una corrispondenza biunivoca tra gli elem. $v \in H$ e le successioni $\{v_n\}$ di numeri reali "quadrato sommabili", cioè tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$$

(Ogni Hilbert separabile è come se fosse " $\mathbb{R}^\infty$ ").

Prop. (Serie negli Hilbert). Sia $\{e_n\}$ una base Hilbertiana in H , e sia $\{v_n\}$ una succ. di numeri reali.

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \text{ conv. in } H \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \text{ conv. in } \mathbb{R}$$

Dici. Sia $S_m := v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ (somma parziale)
 vettore $\nearrow$
 $\hat{S}_m := v_1^2 + \dots + v_n^2$ (")
 numeri $\nearrow$

Dati due interi $m > n$ vale

$$\|S_m - S_n\|^2 = \|v_{n+1} e_{n+1} + \dots + v_m e_m\|^2$$

(e_i sono ortonormali)

$$= v_{n+1}^2 + \dots + v_m^2$$

$$= \hat{S}_m - \hat{S}_n$$

Di conseguenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \text{ conv. in } H \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ è di Cauchy in } H$$

(oss. pre.) $\Leftrightarrow \{\hat{S}_n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \text{ conv. in } \mathbb{R}$$

— o — o —

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 10

Note Title

13/10/2017

Convergenza forte e debole negli HilbertDef. Sia H un Hilbert. Diciamo che

$$x_m \rightarrow x_\infty \quad (\text{conv. forte})$$

se

$$\|x_m - x_\infty\| \rightarrow 0.$$

Prop. La norma è continua risp. alla conv. forte, cioè

$$x_m \rightarrow x_\infty \quad \Rightarrow \quad \|x_m\| \rightarrow \|x_\infty\|$$

Dim Conseguenza della triangolare

$$|\|x_m\| - \|x_\infty\|| \leq \|x_m - x_\infty\|$$

Pessima notiziaSe H ha dimensione infinita, allora le palle chiuse non sono compatte.

Dim. Supponendo che esista una base Hilbertiana $\{e_n\}$, ovviamente infinita, osserviamo che $\{e_n\}$ è una succ. di vettori contenuti nella palla di centro 0 e raggio 1 e non ammette s.succ. conv. Infatti

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2} \quad \text{se } i \neq j$$

e quindi nessuna sottosucc. può essere di Cauchy

— $\circ$ — $\circ$ —

Troppo pochi compatti $\leadsto$ cambiamo la nozione di conv.

Def. Sia H un Hilbert. Diciamo che

$$x_n \rightarrow x_\infty \quad (\text{conv. debole})$$

se

$$\boxed{\langle v, x_n \rangle \rightarrow \langle v, x_\infty \rangle \quad \forall v \in H}$$

↑
limite di numeri

Fatto semplice 1 Se $x_n \rightarrow x_\infty$ e $y_n \rightarrow y_\infty$, allora

$$x_n + y_n \rightarrow x_\infty + y_\infty \quad \lambda x_n \rightarrow \lambda x_\infty$$

Dim. meno che esercizio

Fatto semplice 2 Se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora $x_n \rightarrow x_\infty$

Dim. $|\langle x_n, v \rangle - \langle x_\infty, v \rangle| = |\langle x_n - x_\infty, v \rangle|$

$$\leq \|x_n - x_\infty\| \cdot \|v\|$$

↓
per ipotesi

Fatto semplice 3 Se H ha dimensione infinita, allora esistono succ. che conv. deb. ma non fortemente.

Esempio: sia $\{e_n\}$ una base Hilbertiana. Dico che

$$e_n \rightarrow 0$$

Basta verificare che $\langle e_n, v \rangle \rightarrow 0$ per ogni $v \in H$

= v_n

e $v_n \rightarrow 0$ per cond. nec. sulla serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$

Fatto semplice 4 Se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora le componenti di x_n rispetto ad una base Hilbertiana convergono alle corrispondenti componenti di x_∞

$$(x_n)_k = \langle x_n, e_k \rangle \rightarrow \langle x_\infty, e_k \rangle = (x_\infty)_k$$

Notizia in apparenza brutta Se $x_n \rightarrow x_\infty$, non è detto che $\|x_n\| \rightarrow \|x_\infty\|$
(la norma non è deb. cont.)

Esempio: $e_n \rightarrow 0$, ma $\|e_n\| = 1 \not\rightarrow 0$.

Teorema (la norma è SCI) Se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \geq \|x_\infty\|$$

Dim.

$$\begin{aligned} \|x_n\|^2 &= \|(x_n - x_\infty) + x_\infty\|^2 \\ &= \|x_n - x_\infty\|^2 + \|x_\infty\|^2 + 2\langle x_n - x_\infty, x_\infty \rangle \\ &\geq \|x_\infty\|^2 + 2\langle x_n - x_\infty, x_\infty \rangle \\ &\quad \rightarrow 0 \text{ per def. di conv. debole} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \liminf \|x_n\|^2 &\geq \liminf (\|x_\infty\|^2 + 2\langle x_n - x_\infty, x_\infty \rangle) \\ &= \|x_\infty\|^2 \\ &\quad \text{--- 0 --- 0 ---} \end{aligned}$$

Achtung!

$$\begin{aligned} \|x_n\|^2 &= \langle x_n, e_1 \rangle^2 + \langle x_n, e_2 \rangle^2 + \dots + \langle x_n, e_k \rangle^2 + \dots \\ &\quad \downarrow \\ &= \langle x_\infty, e_1 \rangle^2 + \langle x_\infty, e_2 \rangle^2 + \dots + \langle x_\infty, e_k \rangle^2 + \dots \\ &= \|x_\infty\|^2 \end{aligned}$$

NO! Non si scambiano limiti e serie.

Buona notizia In un Hilbert (separabile) le palle chiuse sono debolmente compatte, cioè
 data una succ. $\{v_m\} \subseteq H$ t.c. $\|v_m\|^2 \leq M$
 allora esiste n_k di interi crescente ed
 esiste $v_\infty \in H$ t.c.

$$v_{n_k} \longrightarrow v_\infty$$

Dim. **Passo 1** Considero una base Hilbertiana $\{e_k\}$.
 Considero

$\langle v_m, e_1 \rangle$ ~ succ. di numeri limitata $|\langle v_m, e_1 \rangle| \leq \|v_m\| \leq M^{1/2}$
 Quindi ammette s.succ. conv. Siano N_1 gli indici di
 questa s.succ.

Considero $\langle v_m, e_2 \rangle$ con $m \in N_1$. È limitata, quindi
 ammette s.succ. conv. con indici $N_2 \subseteq N_1$

Considero $\langle v_m, e_3 \rangle$ e trovo $N_3 \subseteq N_2$ t.c. ...

Quindi ottengo insieme di indici $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$
 tali che indici in N_k vale

$$\langle v_m, e_k \rangle \longrightarrow d_k$$

Scegliendo una succ. n_k crescente di indici con $n_k \in N_k$
 otteniamo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle v_{n_k}, e_i \rangle = d_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

↑↑
 Procedim.
 diagonale

Passo 2 Sospetto che il limite debole sia il vettore v_∞ che ha gli α_i come componenti.

Devo accertarmi che

$$v_\infty := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \quad \text{ha senso, cioè che}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \quad \text{converge, cioè le sue somme parziali sono limitate}$$

$$\begin{aligned} M^2 &\geq \|v_m\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_m, e_i \rangle^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^k \langle v_m, e_i \rangle^2 \end{aligned}$$

Essendo una somma finita passo al limite, ottenendo

$$M^2 \geq \sum_{i=1}^k \alpha_i^2$$

Resta da dimostrare che $\langle v_{m_k}, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle$ per ogni $w \in H$.

Passo 3 La relazione precedente è vera se w è comb. lineare finita degli e_k .

Sia $w = w_1 e_1 + \dots + w_m e_m$. Allora

$$\begin{aligned} \langle v_{m_k}, w \rangle &= w_1 \langle v_{m_k}, e_1 \rangle + \dots + w_m \langle v_{m_k}, e_m \rangle \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &= w_1 \alpha_1 + \dots + w_m \alpha_m \\ &= \langle v_\infty, w \rangle \end{aligned}$$

(Sarebbe bello farlo anche quando ci sono ∞ componenti)

Passo 4 La relazione vale per un w qualunque.

Sia dato w qualunque. Fisso $\varepsilon > 0$. Esiste $w_\varepsilon \in H$ tale che

$\|w - w_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ e tale che w_ε ha solo un # finito di componenti
(basta troncare la serie che def. w)

Allora

$$|\langle v_{n_k}, w \rangle - \langle v_\infty, w \rangle| \leq |\langle v_{n_k}, w \rangle - \langle v_{n_k}, w_\varepsilon \rangle| \quad (1)$$

$$+ |\langle v_{n_k}, w_\varepsilon \rangle - \langle v_\infty, w_\varepsilon \rangle| \quad (2)$$

$$+ |\langle v_\infty, w_\varepsilon \rangle - \langle v_\infty, w \rangle| \quad (3)$$

$$(3) = |\langle v_\infty, w_\varepsilon - w \rangle| \leq \|v_\infty\| \cdot \varepsilon$$

$$(1) = |\langle v_{n_k}, w_\varepsilon - w \rangle| \leq \|v_{n_k}\| \cdot \varepsilon \leq \sqrt{n} \cdot \varepsilon$$

(2) $\rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ per via del passo 3, quindi è $\leq \varepsilon$ se k è abbastanza grande.

In conclusione: $\forall \varepsilon > 0$ se k è abbastanza grande vale

$$|\langle v_{n_k}, w \rangle - \langle v_\infty, w \rangle| \leq \varepsilon$$

che è proprio la def. di limite.

— 0 — 0 —

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 11

Note Title

17/10/2017

Setting: H spazio di Hilbert (separabile)

$$u_m \rightarrow u_\infty \text{ (forte) se } \|u_m - u_\infty\| \rightarrow 0$$

$$u_m \rightarrow u_\infty \text{ (debole) se } \langle u_m, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle \quad \forall w \in H$$

Domanda: sotto quali ipotesi $\langle u_m, w_m \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w_\infty \rangle$?Risposta 1: $u_m \rightarrow u_\infty$ e $w_m \rightarrow w_\infty$ non basta

Esempio $u_m = w_m = e_m \leftarrow$ base Hilbertiana
 $\langle u_m, w_m \rangle = 1 \quad u_\infty = w_\infty = 0$

Risposta 2 Se $u_m \rightarrow u_\infty$ e $w_m \rightarrow w_\infty$, allora OK
 (Una debole e una forte bastano)

Teorema Supponiamo che

(i) $u_m \rightarrow u_\infty$

(ii) $w_m \rightarrow w_\infty$

(iii) $\{u_m\}$ limitata, cioè $\exists M \in \mathbb{R}: \|u_m\| \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Allora $\langle u_m, w_m \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w_\infty \rangle$

Dim. $|\langle u_m, w_m \rangle - \langle u_\infty, w_\infty \rangle| \leq |\langle u_m, w_m \rangle - \langle u_m, w_\infty \rangle| + \quad \textcircled{1}$
 $|\langle u_m, w_\infty \rangle - \langle u_\infty, w_\infty \rangle| \quad \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} = |\langle u_m, w_m - w_\infty \rangle| \leq \|u_m\| \cdot \|w_m - w_\infty\| \leq M \cdot \|w_m - w_\infty\|$$

$\uparrow$ Hp (iii) $\downarrow$ 0 (Hp ii)

$$\textcircled{2} = |\langle u_m - u_\infty, w_\infty \rangle| \rightarrow 0 \text{ per Hp (i)}$$

— 0 — 0 —

Domanda: quando verifico che $u_n \rightarrow u_\infty$, posso limitarmi a verificare

$$\langle u_n, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle \quad \forall w \in W \subseteq H$$

Proposizione Sia $\{u_n\} \subseteq H$ una succ. Limitata
Sia $W \subseteq H$ un sottoinsieme tale che

$$\overline{\text{Span}(W)} \stackrel{\text{rispetto alla forte}}{=} H \quad (\text{span denso})$$

Supponiamo che $\langle u_n, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle \quad \forall w \in W. \quad (*)$
Allora

$$u_n \rightarrow u_\infty$$

Dim. (vedi passi dim. compattezza debole delle palle)

Se vale $(*)$, allora vale la stessa $\forall w \in \text{Span}(W)$. Quindi WLOG posso supporre che W sia s.sp. vettoriale.

Resta da dim.: se vale $(*) \forall w \in W$, allora vale $(*) \forall w \in \overline{W}$.

Sia $w \in \overline{W}$. Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0$ vale

$$|\langle u_n, w \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| \leq \varepsilon \quad \text{definitivamente in } n.$$

Scelgo $w_\varepsilon \in W$ t.c. $\|w - w_\varepsilon\| \leq \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{M} \leftarrow \text{Limitazione su } \|u_n\|$

Osservo che

$$\begin{aligned} |\langle u_n, w \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| &\leq |\langle u_n, w \rangle - \langle u_n, w_\varepsilon \rangle| + & (1) \\ &\quad + |\langle u_n, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle| & (2) \\ &\quad + |\langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| & (3) \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} = |\langle u_n, w - w_\varepsilon \rangle| \leq \|u_n\| \cdot \|w - w_\varepsilon\| = \frac{1}{3} \varepsilon$$

$$\leq M \leq \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\textcircled{3} \leq \|u_\infty\| \cdot \|w_\varepsilon - w\| \leq \frac{1}{3} \varepsilon$$

$$\leq M$$

[aggiunto dopo video: non serve che $\|u_\infty\| \leq M$, basta prendere $\|w_\varepsilon - w\| \leq \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{\|u\|_\infty}$]

$$\textcircled{2} = |\langle u_n - u_\infty, w_\varepsilon \rangle| \leq \frac{1}{3} \varepsilon \quad \text{per } n \text{ abbastanza grande}$$

perché $w_\varepsilon \in W$.

Perché $\|u_\infty\| \leq M$? Motivo complicato: per compattezza debole delle palle + SCI della norma.

(Se sapessi che $u_\infty \in W$ potrei scrivere $\langle u_n, u_\infty \rangle \rightarrow \langle u_\infty, u_\infty \rangle$
 $\leq M \cdot \|u_\infty\| \quad (\|u_\infty\|^2)$)

Altrimenti forse funziona un discorso di approssimazione:
 Prendo $u_\varepsilon \in W$ t.c. $\|u_\infty - u_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ e scrivo

$$\langle u_n, u_\infty \rangle = \langle u_n, u_\infty - u_\varepsilon \rangle + \langle u_n, u_\varepsilon \rangle$$

$$\leq M \varepsilon \quad \downarrow$$

$$\langle u_\infty, u_\varepsilon \rangle$$

$$\langle u_\infty, u_\infty \rangle = \langle u_\infty, u_\varepsilon \rangle + \langle u_\infty, u_\infty - u_\varepsilon \rangle$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u_n, u_\varepsilon \rangle + \langle u_\infty, u_\infty - u_\varepsilon \rangle$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u_n, u_\infty \rangle - \langle u_n, u_\infty - u_\varepsilon \rangle + \langle u_\infty, u_\infty - u_\varepsilon \rangle$$

$$\leq M \cdot \|u_\infty\|$$

$$\leq M \cdot \|u_\infty\| + M \varepsilon + \|u_\infty\| \cdot \varepsilon$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$ vale $\|u_\infty\|^2 \leq M \|u_\infty\| + M \varepsilon + \|u_\infty\| \varepsilon$

↑ Dimostra che $\|u_\infty\| \leq M$ senza passare dal teorema.

— 0 — 0 —

Cordario La convergenza debole di una successione **LIMITATA** basta testarla su una base Hilbertiana, cioè

$$\langle v_m, e_k \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle v_\infty, e_k \rangle \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dim Usa $W = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Oss. Sente che sia limitata

Esempio Pseudouno $v_m = m e_m$ (o anche $m! e_m$)

È chiaro che $\langle v_m, e_k \rangle = 0$ per ogni $m \geq k$, quindi tutte le componenti tendono a 0, ma $v_m \not\rightarrow 0$.

Basta prendere

$$w := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k \quad \text{così} \quad \langle v_m, w \rangle = 1$$

Ben definito
perché $\sum \frac{1}{k^2}$
converge.

$$\langle 0, w \rangle = 0$$

Conseguenza La conv. delle componenti garantisce la conv. debole se so già che la succ. è limitata.

— 0 — 0 —

Teorema (Vero, ma non servirà mai nel corso)

Se $v_m \rightarrow v_\infty$, allora v_m è limitata.

Dim **BAIRE POINT** Idea della dim.

Passo 1 Pongo $H_k := \{w \in H : |\langle v_m, w \rangle| \leq k \quad \forall m \in \mathbb{N}\}$

È facile che H_k è chiuso e

$$H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k \quad (\langle v_m, w \rangle \text{ è conv., dunque limit.})$$

Passo 2 (Baire) $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{Int}(H_{k_0}) \neq \emptyset$, diciamo

$$H_{k_0} \supseteq B_{r_0}(w_0)$$

Passo 3 $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $H_{k_1} \supseteq B_{r_0}(0)$

Prendo u con $\|u\| < r_0$ e osservo che

$$|\langle u_m, u \rangle| \leq \underbrace{|\langle u_m, w_0 \rangle|}_{\substack{\text{limitato per ché} \\ \text{succ. conv.} \\ \text{e la limitazione} \\ \text{non dipende da } u}} + \underbrace{|\langle u_m, w_0 + u \rangle|}_{\substack{\leq k_0 \\ \text{per ché } w_0 + u \in B_{r_0}(w_0)}}$$

Passo 4 $\exists k_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $H_{k_2} \supseteq B_1(0)$

(Omoteia dal caso precedente)

Passo 5 Sappiamo che $|\langle u_m, u \rangle| \leq k_2 \quad \forall u \in B_1(0)$.

Ora uso

$$u := \frac{u_m}{\|u_m\|} \quad \leadsto \quad \|u_m\| \leq k_2.$$

— 0 — 0 —

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 12

Note Title

17/10/2017

Tre teoremi di convergenza (la misura è quella di Lebesgue)

Teorema 1 (BEPPLO LEVI) Sia $f_n: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

- (i) $f_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) f_n misurabili secondo Lebesgue
- (iii) $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \quad \forall x \in (a,b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Allora

$$\int_a^b \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \right) dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(x) dx$$

teo. convergenza
monotona

Teorema 2 (LEMMA DI FATOU) Sia $f_n: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

- (i) $f_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) f_n misurabili secondo Lebesgue.

Allora

$$\int_a^b \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Teorema 3 (teo. CONVERGENZA DOMINATA di Lebesgue)

Sia $f_n: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- (i) f_n misurabili secondo Lebesgue
- (ii) $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \quad \forall x \in (a,b)$ (conv. puntuale)
- (iii) esiste $g: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile t.c. $|f_n(x)| \leq g(x)$
 $\forall x \in (a,b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

DOMINAZIONE

Allora

$$\int_a^b f_\infty(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

SPAZI DI LEBESGUEPer ogni $p \geq 1$ si pone

$$L^p(a,b) := \{f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ misur. t.c. } \int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

Proprietà Fissato $p \geq 1$ vale che

- $L^p(a,b)$ è uno sp. vettoriale
- La quantità

$$\|f\|_{L^p(a,b)} := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

è una norma

- Rispetto alla norma lo spazio L^p diventa metrico **COMPLETO**, quindi un Banach. (Qui servono tes. di passaggio al limite)
- Nel caso $p=2$ è un Hilbert con prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Disuguaglianza di Hölder

Versione base Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p \geq 1, q \geq 1$), $f \in L^p(a,b)$
 $g \in L^q(a,b)$

Allora $f \cdot g \in L^1(a,b)$ e vale

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

Idea: posso assumere che gli integrali al RHS siano 1. Uso disug di Young (che segue dalla convessità)
 $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$ con $f(x) = a$ e $g(x) = b$ e ho finito.

Versione a più specie

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = 1$$

$$f_i \in L^{p_i}$$

Allora

$$\|f_1 \cdots f_k\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}$$

Young a k termini

Altra versione

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$$

$$f_i \in L^{p_i}$$

Allora

$$\left\| \prod_{i=1}^k f_i \right\|_{L^r} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}}$$

Basta considerare $f_1^r, \dots, f_k^r$ Teorema di approssimazioneSia $p \geq 1$ e sia $f \in L^p(a,b)$.

Allora esiste una succ.

$$\{f_n\} \subseteq C^0(a,b)$$

ma anche $\{f_n\} \subseteq C_c^\infty(a,b)$

tale che

$$(1) f_n \rightarrow f \text{ in } L^p(a,b)$$

$$(2) f_n \rightarrow f \text{ in maniera puntuale dominata in } L^p$$

Teorema (FLCV, versione Lebesgue)Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $L^2(a,b)$.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0$$

$$\forall v \in C_c^\infty(a,b).$$

Allora $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in (a,b)$.Dim:Considero una successione $\{v_n\} \subseteq C_c^\infty(a,b)$ che approssima $f(x)$ come detto sopra.

Allora

$$\int_a^b f(x) \cdot u_m(x) dx = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\int_a^b f(x) \cdot f(x) dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Per passare al limite serve convergenza dominata.
Sappiamo che

$$u_m(x) \rightarrow f(x) \text{ puntualmente}$$

$$|u_m(x)| \leq g(x) \text{ con } g(x) \text{ in } L^2$$

Allora $|f(x) u_m(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \in L^1$
(per Hölder)

Quindi possiamo passare al limite.

FLCV rivisitato: L'ipotesi è equiv. a dire che nello sp.
di Hilbert L^2 la funzione f è
ortogonale ad un s.sp. vett. DENSO.

Fatto utile $L^2(a,b)$, così come anche gli altri L^p , è
SEPARABILE

Dim Un denso numerabile sono le comb. lin. finite
a coeff. in $\mathbb{Q}$ di funzioni caratteristiche di
intervalli con estremi in $\mathbb{Q}$.

Corollario $L^2(a,b)$ ammette (infinite) basi Hilbertiane

Ad esempio, in $L^2(0,\pi)$ una base Hilbertiana è

$$f_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(mx)$$

↑ serve ad avere norma 1 in L^2

Servono tre verifiche

- $\|f_m\| = 1$ (banale aggiustando la costante)
- $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ (facile esercizio di Analisi 1)
- generano un denso: segue (e non è banale)
 - o dai teoremi appositi sulle serie di Fourier
 - o da Stone - Weierstrass applicato ai pol. trigonometrici
 - o dal teorema spettrale applicato all'inverso della derivata seconda.

Conseguenza La successione $f_m(x) = \sin(mx)$ tende debolmente a 0 in $L^2((0, \pi))$

Dimostrazione con le mani: dovrai dimostrare che

$$\int_0^\pi \sin(mx) f(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall f \in L^2((a, b))$$

Basta che lo dimostri $\forall f \in W$ con $\text{Span}(W)$ denso in L^2 .

Prendo come W le caratteristiche di intervalli:

$$\int_a^b \sin(mx) dx \rightarrow 0 \quad \text{se } (a, b) \subseteq (0, \pi)$$

$$\left[-\frac{1}{m} \cos(mx) \right]_a^b \rightarrow 0.$$

— o — o —

Domanda: cosa succede se $f_m(x) = \sqrt{m} \sin(mx)$?

Questa non può convergere debole perché $\|f_m\|$ non è limitata.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 13

Note Title

20/10/2017

SPAZI DI SOBOLEV

→ Definizione W

→ Definizione H

Def. (W)

Sia $p \geq 1$ un numero reale. Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un interv. Si dice che $u \in W^{1,p}(a,b)$ e che v è la sua derivata debole se

$$u \in L^p(a,b), \quad v \in L^p(a,b)$$

e vale "la formula di integrazione per parti"

$$\int_a^b u(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

In questo caso si scrive $v = u'$.

Fatto 1

La derivata debole, se esiste, è unica.

Dim

Supponiamo che v_1 e v_2 vadano bene. Allora

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \dot{\varphi}(x) dx &= - \int_a^b v_1(x) \varphi(x) dx \\ &= - \int_a^b v_2(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$\leadsto \int_a^b (v_1(x) - v_2(x)) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

$\nexists$ LCV (variante Sobolev) $\Rightarrow v_1(x) \equiv v_2(x)$ (coincidono a meno di un insieme di misura nulla)

Fatto 2 $W^{1,p}(a,b)$ è uno spazio vettoriale e l'applic.

$$W^{1,p}(a,b) \ni u \mapsto u' \in L^p(a,b)$$

è lineare.

Dim. Esercizio immediato.

Fatto 3 Consistenza con il caso classico

3.1 Se $u \in C^1([a,b])$, allora $u \in W^{1,p}(a,b)$ e la derivata debole è proprio la derivata vera.

Dim. Formula di integrazione per parti

3.2 Se $u \in L^p(a,b)$ e $v \in C^0([a,b])$, allora davvero $u \in C^1$ e $v = u'$ (derivata vera).

Dim. Sia $U(x)$ la primitiva di $v(x)$. Per la formula classica di int. per parti

$$\int_a^b U(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx = \int_a^b u(x) \dot{\varphi}(x) dx$$

$\uparrow$ classica $\uparrow$ v è deriv. debole di u

$$\leadsto \int_a^b (U(x) - u(x)) \dot{\varphi}(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b)$$

$$\leadsto U(x) - u(x) = \text{costante} \quad \leadsto u(x) = U(x) + c$$

$\stackrel{?}{\subset} C^1$

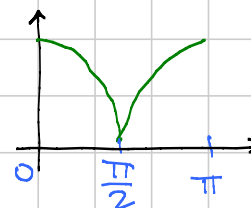
Fatto 4 Esistono funzioni $u \in W^{1,p}((a,b)) \setminus C^1((a,b))$.

Ad esempio

$$u(x) = |\cos x| \in W^{1,p}((0,\pi)) \quad \forall p \geq 1$$

e la sua deriv. debole è

$$v(x) = \begin{cases} -\sin x & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ +\sin x & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$



Dim. Data una qualunque $\varphi \in C_c^\infty((0,\pi))$ vale

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u(x) \varphi(x) dx &= \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \varphi(x) dx + \int_{\pi/2}^\pi (-\cos x) \cdot \varphi(x) dx \\ (\text{per parti}) \quad &= [\cos x \cdot \varphi(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin x) \varphi(x) dx \\ &\quad + [-\cos x \cdot \varphi(x)]_{\pi/2}^\pi - \int_{\pi/2}^\pi \sin x \cdot \varphi(x) dx \\ &= \underbrace{\cos \frac{\pi}{2} \cdot \varphi(\frac{\pi}{2}) - \cos(0) \cdot \varphi(0)}_{\substack{\text{se ne avrebbero anche se fosse} \\ u(x) = |\cos x| + 5}} \\ &\quad - \int_0^\pi v(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Oss. In modo del tutto analogo posso verificare che tutte le funzioni continue che sono C^1 a tratti sono in $W^{1,p}((a,b))$ per ogni $p \geq 1$ (reale).
Ce ne sarebbe anche altre.

Fatto 5 Esistono $u \in L^p((a,b)) \setminus W^{1,p}((a,b))$, ad esempio

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

Dim. Supponiamo che $H \in W^{1,p}((-1,1))$ e sia v la sua derivata debole. Allora

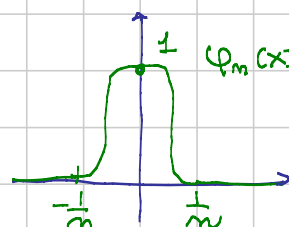
$$\begin{aligned} -\int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx &= \int_{-1}^1 H(x) \dot{\varphi}(x) dx \\ &= \int_0^1 \dot{\varphi}(x) dx = \varphi(1) - \varphi(0) = -\varphi(0) \end{aligned}$$

Quindi dovrebbe essere vero che

$$\int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((-1,1))$$

$$\int_{-1}^1 v(x) \varphi_n(x) dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↓
puntuale e dominata
da $|v(x)|$



Quindi LHS $\rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.
— 0 — 0 —

Def. (H) Sia $p \geq 1$ un reale e sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Siano

$$u \in L^p((a,b)) \quad v \in L^p((a,b))$$

Dico che $u \in H^{1,p}((a,b))$ e v è la sua deriv. debole se esiste una successione

$$\{u_n\} \subseteq C^1((a,b)) \quad (\text{o anche } C^\infty((a,b)))$$

(senza supp. compatto)

tale che

- $u_n \rightarrow u$ in $L^p((a,b))$
- $u_n' \rightarrow v$ in $L^p((a,b))$.

Variazione della def. (H). Consideriamo lo spazio $C^1(a,b)$ munito della metrica

$$\text{dist}(f,g) := \|f-g\|_{L^p(a,b)} + \|f'-g'\|_{L^p(a,b)}$$

Allora posso definire $H^{1,p}(a,b)$ come il completamento di $C^1(a,b)$ rispetto a questa distanza.

Idem partendo da $C^\infty(a,b)$.

— o — o —

Fatto 1 Unicità der. debole $\leadsto$ non sembra banale

Fatto 2 Linearità $\leadsto$ facile esercizio

Fatto 3 **3.1** $\leadsto$ Banale se uso approx C^1 , meno se lo voglio C^∞ .

3.2 $\leadsto$ non sembra evidente

Fatto 4 $u(x) = |\cos x| \in H^{1,p}((0,\pi))$

Dim. Basta porre $u_n(x) := \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{n}} \in C^\infty((0,\pi))$

$u_n(x) \rightarrow |\cos x|$ puntualmente con dominazione, quindi in $L^p((0,\pi))$ per ogni $p \geq 1$

$$u_n'(x) = \frac{x \cos x (-\sin x)}{x \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{\cos x}{|\cos x|} (-\sin x)$$

puntualmente per $x \in (0,\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ con dominazione, quindi in ogni L^p .

Fatto 5 $u(x) \notin H^{1,p}(-1,1)$ $\leadsto$ non evidente.

Teorema $H \subseteq W$

Dim Siano u_n le approx. come nella def. H.

Sia $v \in C_c^\infty(a,b)$.

Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\int_a^b u_n(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b \dot{u}_n(x) \varphi(x) dx \quad (\text{int. per parti classica})$$

$$\downarrow u_n \rightarrow u \text{ in } L^p \quad \downarrow \dot{u}_n \rightarrow \dot{u} \text{ in } L^p$$

$$\int_a^b u(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx$$

$\leadsto u \in W^{1,p}(a,b)$ e v è la derivata debole.

Oss. Questo sistema tutti i p.ti finora poco chiari.

Teorema (Caso $p=2$) Sia $\{u_n\} \subseteq W^{1,2}(a,b)$
Siano $\dot{u}_n$ le rispettive deriv. deboli.

Supponiamo che

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad (\text{debbole } L^2((a,b)))$$

$$\dot{u}_n \rightarrow v_\infty \quad (\quad \quad)$$

Allora $u_\infty \in W^{1,2}(a,b)$ e $v_\infty = \dot{u}_\infty$.

Dim

$$\int_a^b u_n(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b \dot{u}_n(x) \varphi(x) dx$$

$$\downarrow (\text{bastano le deb. } L^2) \quad \downarrow$$

$$\int_a^b u_\infty(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b v_\infty(x) \varphi(x) dx$$

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 14

Note Title

20/10/2017

Teorema (Le funzioni di Sobolev sono le primitive della loro derivata debole)

Sia $u \in W^{1,p}((a,b))$ e sia $v \in L^p((a,b))$ la deriv. debole.

Poniamo

$$U(x) := \int_a^x v(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

Allora $u(x) = U(x) + \text{costante}$ per q.o. $x \in (a,b)$.

Dcm. Sia $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$ una qualunque funzione test.

Allora

$$\int_a^b \dot{\varphi}(x) U(x) dx \stackrel{\text{def. } U}{=} \int_a^b \dot{\varphi}(x) \left(\int_a^x v(t) dt \right) dx$$

(T normale
risp. asse x)

$$= \iint_T \dot{\varphi}(x) v(t) dx dt$$

(T normale
risp. asse y)

$$= \int_a^b dt \int_t^b dx \dot{\varphi}(x) v(t)$$

Fubini - Tonelli)

$$= \int_a^b v(t) dt \underbrace{\int_t^b \dot{\varphi}(x) dx}_{\varphi(b) - \varphi(t) = -\varphi(t)}$$

$$= - \int_a^b v(t) \varphi(t) dt$$

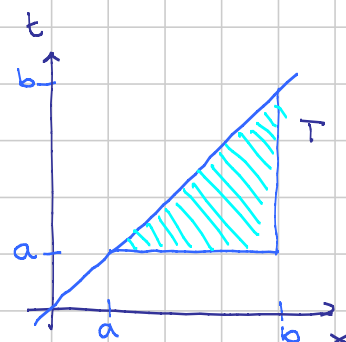
$$= - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx$$

($u \in W^{1,p}$
e $u' = v$)

$$= \int_a^b u(x) \dot{\varphi}(x) dx$$

Lemma DBR $\Rightarrow$ Tesi

— o — o —



Teorema $W \subseteq H$

Dim Prendo $u \in W^{1,p}(a,b)$ nel senso dell'integrazione per parti e faccio vedere che posso approssimarla nel senso (H) .

Sia $v \in L^p(a,b)$ la deriv. debole di u .

Approssimo v in L^p con funzioni $v_m \in C^\infty$ (volendo anche a supporto compatto) e pongo

$$u_m(x) := \int_a^x v_m(t) dt$$

Osservo che $u_m \in C^\infty(a,b)$ (non nec. a spt. cpt.)

$$u_m' = v_m \rightarrow v \quad \text{in } L^p(a,b) \text{ per ipotesi}$$

$$u_m \xrightarrow{L^p} \int_a^x v(t) dt \quad (\text{per convergenza dominata})$$

$$= u(x) + \text{costante} \quad (\text{per teorema precedente})$$

Quindi $u_m(x) - \text{costante}$ sono le approx. richieste.

Conseguenza

A seconda dei casi possiamo usare la def. più comoda.

Conseguenza 2

Si posso definire gli spazi di Sobolev come le primitive delle funzioni in $L^p(a,b)$.

— o — o —

TEOREMA (Hölderianità delle funzioni di Sobolev)
 (vale solo in dim. 1 ed è il motivo per cui in dim. maggiore le cose si complicano).

Sia $p > 1$, sia q l'esponente coniugato ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)
 e sia $u \in W^{1,p}(a,b)$.

Allora

$$u \in C^{1/q}(a,b) \quad (u \text{ è } \frac{1}{q}\text{-Hölderiana})$$

e vale

$$|u(y) - u(x)| \leq \| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deriv. debole}}}{u'} \|_{L^p(a,b)} \cdot |y-x|^{1/q} \quad \begin{matrix} \forall x \in (a,b) \\ \forall y \in (a,b) \end{matrix}$$

In particolare u è continua !!!

Dim Già sappiamo che u è la primitiva della sua derivata debole, quindi

$$\begin{aligned} |u(y) - u(x)| &= \left| \int_x^y u'(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^y |u'(t)| \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \in L^q}}{1} dt \\ &\leq \left(\int_x^y |u'(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_x^y 1^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_a^b |u'(t)|^p dt \right)^{1/p} |y-x|^{1/q} \\ &= \|u'\|_{L^p(a,b)} \cdot |y-x|^{1/q}. \end{aligned}$$

— o — o —

Teo. Ascoli - Arzelà Siano $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funs.

Supponiamo che

(i) (Equi-limitate)

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b]$$

(ii) (Equi-continuità)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y \in [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta) \text{ vale } |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

Allora esiste s.succ. che conv. unif., cioè $\exists n_k$ succ. cresc. di interi, ed esiste $f_\infty: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{array}{ccc} f_{n_k}(x) & \rightarrow & f_\infty(x) \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \text{ UNIFORM. in } [a, b].$$

Variante metrica Siano $f_n: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$
 $\uparrow \text{ metrici } \uparrow$

Ipotesi

(i) (compattezza a x fisso)

$$\forall x \in \mathbb{X} \quad \exists K_x \subseteq \mathbb{Y} \text{ cpt. t.c. } f_n(x) \in K_x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) (equi-continuità) esattamente come sopra

(iii) $\mathbb{X}$ compatto.

Allora esiste $f_{n_k}(x) \rightarrow f_\infty(x)$ unif. in $\mathbb{X}$.

(se non assumiamo $\mathbb{X}$ compatto, ma solo unione num. di cpt., allora la tesi diventa conv. unif. sui cpt.)

Oss. Torniamo al caso $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Se so che f_n sono equi α -Hölderiane, cioè

$$\exists \alpha \in (0, 1) \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |u_n(y) - u_n(x)| \leq M |y - x|^\alpha$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall (y, x) \in (a, b)^2$$

Allora è gratis l'equicontinuità.

Torniamo alla def. (H). Sappiamo che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^p$$

$$\tilde{u}_n \rightarrow v \quad \text{in } L^p$$

Deduciamo che esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|u_n\|_{L^p} \leq M$$

$$\|\tilde{u}_n\|_{L^p} \leq M$$

• Dalla seconda, deduciamo che $\{u_n\}$ sono equi $\frac{1}{p}$ -Hölder
(quindi ho equicontinuità $\leadsto$ controllo le oscillazioni)

• Dalla prima ho un controllo sulle funzioni in almeno un pto

$$\int_a^b |u_n(x)|^p dx \leq M^p$$

Quindi per il teo. della media integrale

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in (a, b) \text{ t.c. } |u_n(x_n)|^p \leq \frac{M^p}{b-a}$$

da cui $|u_n(x_n)| \leq M$,

- Mettendo insieme limitatezza in un pto + controllo della costante di Hölder deduco una limitatezza globale

$$|u_m(x)| \leq \underbrace{|u_m(x_m)|}_{\leq M_1} + \underbrace{|u_m(x) - u_m(x_m)|}_{\leq M|x-x_m|^{1/q} \leq M(b-a)^{1/q}}$$

Conseguenza: ho le ipotesi di Ascoli - Arzelà.

Quindi: se $u_m \rightarrow u$ in L^p
 $\dot{u}_m \rightarrow v$ in L^p

allora

$$u_{m_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{pure uniformemente}$$

Per ragioni quasi ovvie vale che $u_\infty = u$.

Per ragioni legg. meno ovvie (Lemma della sotto-sotto) uso solo una s.succ., ma tutta la succ. u_m tende ad u uniform.

Questo è un altro modo di concludere che il limite u è continuo (limite unif. di continue) e vale

$$|u_m(y) - u_m(x)| \leq \|\dot{u}_m\|_{L^p} |y-x|^{1/q}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ unif.

$$|u(y) - u(x)| \leq \underbrace{\|\dot{u}\|_{L^p}}_{=0} \underbrace{|y-x|^{1/q}}_{=0}$$

Altro modo di def. i Sobolev

Una funzione sta in $W^{1,p}$ se il rapporto incrementale

$$R_h(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

converge in L^p a qualcosa (il q.c. è la derivata debole).

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 14

Note Title

23/10/2017

METODO DIRETTO Per dimostrare che esiste $\min F(u)$ **ROAD MAP**

- ① FORMULAZIONE DEBOLE Estendere $F(u)$ ad un ambiente più grande dei soliti $C^1(a,b)$, $C^\infty(a,b)$ $\leadsto$ spazi di Sobolev
- ② COMPATTEZZA Dimostrare che i sottolivelli di $F(u)$ sono cpt. rispetto a qualche nozione di convergenza
- ③ SEMI CONTINUITÀ Dimostrare che F è sci rispetto alla stessa nozione di conv. $\leadsto$ esiste il minimo nell'ambiente più vasto
- ④ REGOLARITÀ Dim. che i pti di minimo in realtà stanno anche nell'ambiente originario.

Esempio $F(u) := \int_0^2 [\dot{u}^2 + \sin(u^5)] dx$

Voglio dim. che $F(u)$ ammette minimo in

$$\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 0, u(2) = 2017\}$$

③ Formulazione debole Consideriamo l'ambiente

$$\hat{\mathbb{X}} := \{u \in H^1((0,2)) : u(0) = 0, u(2) = 2017\}$$

Oss. 1 - $\int \dot{u}^2$ è ben definito in H^1 2 - $u(0)$ e $u(2)$ sono ben def. perché le funz. di H^1 sono cont.

Considero $\hat{F} : \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$\hat{F}(u) := \int_0^2 [\dot{u}^2 + \sin(u^5)] dx \quad \forall u \in H^1((0,2))$$

↑ derivata debole.

② Compattata Devo dimostrare questa proprietà.

Dato una succ. $\{u_n\} \subseteq H^1((0,2))$ f.c.

$$\exists M \in \mathbb{R} : \hat{F}(u_n) \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

u_n sta in un sottolivello

allora esiste una s.succ. $u_{n_k} \rightarrow u_0$ in qualche senso.

$$\int_0^2 \dot{u}_m^2 - 2 \leq \int_0^2 \dot{u}_m^2 + \sin(u_m^5) \leq M$$

Da qui ottengo che

$$\int_0^2 \dot{u}_m^2 \leq M+2$$

che è come dire $\| \dot{u}_m \|_{L^2} \leq (M+2)^{1/2}$

Per compattata debbe delle palle nell' Hilbert separabile $L^2((0,2))$ otteniamo una s.succ.

$$\dot{u}_{n_k} \rightarrow v_0 \quad (\text{debole in } L^2)$$

Per i discorsi visti la les. precedente le funzioni u_{n_k} sono

- $\frac{1}{2}$ -Hölder con una costante comune (per via della stima L^2 su $\dot{u}_{n_k}$)
- equilimitate per via dei dati al bordo e la stima equi $\frac{1}{2}$ -Hölder.

Quindi per Ascoli - Arzelà, a meno di ulteriori s.succ.,

$$u_{m_k} \longrightarrow u_\infty \quad (\text{uniform. in } [0, 2])$$

Mi piacerebbe tanto poter dire che $v_\infty = \dot{u}_\infty$, ma questo segue da

$$\int_0^2 \dot{u}_{m_k}(x) \varphi(x) dx = - \int_0^2 u_{m_k}(x) \dot{\varphi}(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, 2))$$

$\downarrow$ basta $\downarrow$ c'è pure conv. unif. delle u_{m_k}
 $\downarrow$ la debole

$$\int_0^2 v_\infty(x) \varphi(x) dx = - \int_0^2 u_\infty(x) \dot{\varphi}(x) dx$$

Questo ci dice che $v_\infty = \dot{u}_\infty$.

Conclusione: i sottolivelli di $\hat{F}$ sono compatti rispetto alla nozione di convergenza

$$u_m \rightharpoonup u_\infty \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{aligned} &u_m \longrightarrow u_\infty \text{ unif.} \\ &\dot{u}_m \longrightarrow \dot{u}_\infty \text{ debolm. in } L^2. \end{aligned}$$

③ Semicontinuità Devo dimostrare che per ogni successione con

$$\begin{aligned} u_m &\longrightarrow u_\infty \text{ unif.} \\ \dot{u}_m &\longrightarrow \dot{u}_\infty \end{aligned}$$

vale

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \hat{F}(u_m) \geq \hat{F}(u_\infty).$$

Esaminiamo separatamente i 2 pezzi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^2 \sin(u_m^5) dx = \int_0^2 \sin(u_\infty^5) dx \quad (\text{Analisi 2 per conv. unif.})$$

Per l'altro pezzo uso la semicontinuità della norma negli sp. di Hilbert

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 u_n^2 dx \geq \int_0^2 u_\infty^2 dx.$$

Mettendo insieme le 2 ho la tesi.

④ Regolarità Dai primi 3 pti sappiamo che $\hat{F}$ ammette minimo in H^1 , anzi in $\hat{X}$.

Avevi dovuto osservare che se $u_n \in \hat{X}$ e convergono risp. alla nozione di conv., allora anche $u_\infty \in \hat{X}$, cioè rispetta le Bcs.

Questo segue dalla conv. unif.

(Avere solo la L^2 , anche forte, sulle funzioni non basterebbe).

Vogliamo ora dim. che i pti di min. sono in realtà di classe C^1 , anzi C^∞ .

Sotto road map :

- 4.1 Equazione di Eulero debole
- 4.2 Guadagnare la prima derivata
- 4.3 BOOTSTRAP.

Sia $u_0 \in \hat{X}$ un pto di min. Sia $v \in V = C_c^\infty((0,2))$

$$\varphi(t) := \hat{F}(u_0 + tv) = \int_0^2 (u_0 + tv)^2 + \sin((u_0 + tv)^5)$$

$$\varphi'(t) = \int_0^2 2 u_0 v + 5 \cos((u_0 + tv)^5) (u_0 + tv)^4 v + 2t \int_0^2 v^2 dx$$

↑

modulo poter derivare sotto il segno di integrale

$$\varphi'(0) = \int_0^2 2 u_0 v + 5 \cos(u_0^5) u_0^4 v = 0$$

↑ se u_0 è pto di min

Riscrivo la relazione come

$$-\int_0^2 \underbrace{2\ddot{u}_0}_{\downarrow f} \underbrace{\dot{v}}_{\downarrow \dot{\varphi}} = \int_0^2 \underbrace{5\cos(u_0^5)u_0^4}_{\downarrow g} \underbrace{v}_{\downarrow \varphi}$$

Questa relazione ci dice che f è derivabile debolmente, e la sua derivata debole è g . Quindi $2\ddot{u}_0 \in H^1$ e

$$(2\ddot{u}_0)' = 5\cos(u_0^5)u_0^4 \quad \text{generalizzata in } L^2$$

Abbiamo già guadagnato una derivata: prima $\ddot{u}_0 \in L^2$ e ora già $\ddot{u}_0 \in H^1$.

Da qui parte il bootstrap:

$$\rightarrow u_0 \in H^1 \Rightarrow u_0 \text{ è continua} \Rightarrow 5\cos(u_0^5)u_0^4 \text{ è continua}$$

$$\Rightarrow 2\ddot{u}_0 \text{ ha derivata debole continua}$$

$$\Rightarrow 2\ddot{u}_0 \in C^1 \Rightarrow u_0 \in C^2 \quad (\text{è la primitiva della sua derivata debole})$$

Ora l'Equazione di Eulero è una vera equazione diff. con le derivate VERE

$$2\ddot{\ddot{u}}_0 = 5u_0^4 \cos(u_0^5).$$

Da qui parte il bootstrap vero

$$u_0 \in C^2 \Rightarrow \text{RHS} \in C^2 \Rightarrow u_0 \in C^4 \Rightarrow \text{RHS} \in C^4$$

e così via di 2 in 2 fino a C^∞ .

Calcolo delle Variazioni -

LEZIONE 16

Note Title

23/10/2017

Rivisitazione della compattezza

Supponiamo di avere $F(u) := \int_a^b [\dot{u}^2 + g(x, u)] dx$

Sotto quali ipotesi posso dedurre che

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ nel solito senso?}$$

Caso facile Se $g(x, u)$ è limitata dal basso, è facile

$$g(x, s) \geq -A \quad \text{per ogni } x \in [a, b], \forall s \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$M \geq \int_a^b \dot{u}_n^2 + g(x, u_n) \geq \int_a^b \dot{u}_n^2 - A(b-a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \dot{u}_n^2 \leq M + A(b-a)$$

$$\Rightarrow \text{limitazione norma } L^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_{n_k} \rightarrow v_\infty.$$

Per usare A.A. sulle funzioni serve qualcosa che limiti le funzioni, ad esempio

- una BC (limita in un p.to, da cui limitazione globale per equi-hölderianità)

- una convol. integrale del tipo $\int_a^b |u_n(x)|^p dx \leq M$

$$\leadsto \text{per la media integrale } \exists x_n \text{ t.c. } |u_n(x_n)|^p \leq \frac{M}{b-a}$$

Fatto generale Supponiamo che $u_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ siano

- equi α -hölderiane $|u_n(x) - u_n(y)| \leq M_1 |x - y|^\alpha$
↑
stessi per ogni n
- esiste x_n (anche dip. da n) t.c.

$$|u_n(x_n)| \leq M_2$$

↑
indip. da n

Allora possiamo usare Ascoli - Arzelà

Dim. L'equicontinuità segue dall'equi-hölder
 L'equilimitatezza globale segue da quella in un pto

$$|u_n(x)| \leq \underbrace{|u_n(x_n)|}_{\leq M_2} + \underbrace{|u_n(x) - u_n(x_n)|}_{\leq M_1 |x - x_n|^\alpha \leq M_1 |b - a|^\alpha}$$

— o — o —

Caso meno facile, ma non difficile

$$F(u) := \int_a^b u^2 - u$$

Così non ci sarebbe compattezza: prendo $u_n(x) := -n$
 e queste stanno in un s.livello qualunque.

Le cose cambiano se aggiungo una BC, tipo $u(a) = 7$

$$|u(x)| \leq \underbrace{|u(a)|}_7 + |u(x) - u(a)| \leq \|u\|_{L^2} |x - a|^{1/2} \leq \|u\|_{L^2} (b - a)^{1/2}$$

Quindi in ogni sottolivello $F(u) \leq M$ possiamo dedurre

$$\begin{aligned} M \geq F(u) &= \int_a^b \dot{u}^2 - u \geq \int_a^b \dot{u}^2 - \int_a^b \|\dot{u}\|_{L^2} (b-a)^{1/2} \\ &= \|\dot{u}\|_{L^2}^2 - \|\dot{u}\|_{L^2} (b-a)^{3/2} \end{aligned}$$

È una diseq. di 2° grado in $\|\dot{u}\|_{L^2}$

$$\|\dot{u}\|_{L^2}^2 - \text{cost} \|\dot{u}\|_{L^2} \leq M$$

che è verificata per "valori intermedi", quindi $\|\dot{u}\|_{L^2}$ non può essere troppo grande.

Da una stima $F(u_n) \leq M$, deduciamo $\|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M_1$,
 $\leadsto$ da qui come sopra.

Morale $F(u) = \int_a^b \dot{u}^2 + g(x, u)$

Se so che esistono A, B reali e $p < 2$ t.c.

$$g(x, s) \geq -A - B|s|^p \quad \forall (x, s) \in [a, b] \times \mathbb{R}$$

Allora, se ho anche una B_c , ho l'implicazione

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad \|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M_1$$

e questa è quella che serve per fare compattanza

Dim. Con il discorso di prima si arriva a

$$\|\dot{u}\|_{L^2}^2 + \text{cost} \cdot \|\dot{u}\|_{L^2}^p \leq M$$

Più in generale, per funzionali

$$\int_a^b |u|^p + g(x, u)$$

basta avere $g(x, s) \geq -A - B|s|^q$ con $q < p$.

Esempio $\min \left\{ \int_a^b u^2 + u^3 : u(a) = u(b) = 0 \right\}$ non esiste

Dim. Prendo una qualunque funzione $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che sia negativa in (a, b)

$$F(nu) = \int_a^b n^2 u^2 + n^3 u^3 = n^2 \int_a^b u^2 + n^3 \underbrace{\int_a^b u^3}_{< 0}$$

$\leadsto \inf = -\infty$.

Esempio $\min \left\{ \int_a^b u^2 + \underbrace{u^3 + u^4}_{g(u)} : u(a) = u(b) = 0 \right\}$ esiste

$g(u)$ è limitata dal basso $\leadsto$ metodo diretto standard

Esempio $\min \left\{ \int_a^b u^2 + \underbrace{u^3 + u^4}_{g(u)} \right\}$ SENZA Bcs

Il minimo esiste.

Come ottengo la compattezza?

$g(u)$ limitata dal basso, quindi $F(u_n) \leq M \Rightarrow \|u_n\|_2 \leq M_1$

Mi serve qualcosa che limiti le funzioni !!!

$$g(u) \geq \frac{1}{2} u^4 - A \quad \leadsto \quad F(u_n) \leq M \Rightarrow \int u_n^4 \leq M_1$$

$$u^2 + \frac{1}{2} u^4 \geq -A \quad \text{☺}$$

$$\Rightarrow \exists x_n \text{ b.c. } |u_n(x_n)| \leq M_2$$

Rivisitazione della SCI

- Parte dipendente da u . Se $u_n \rightarrow u_\infty$ unif., allora

$$\int_a^b g(x, u_n(x)) dx \rightarrow \int_a^b g(x, u_\infty(x)) dx$$

perché $g(x, s)$ sia almeno continua (analisi 2).

Oss. Se so che g è SCI in s e limitata dal basso, allora posso usare Fatou e dedurre che

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x, u_n(x)) dx &\geq \int_a^b \liminf_{n \rightarrow \infty} g(x, u_n(x)) dx \\ &\geq \int_a^b g(x, u_\infty(x)) dx \end{aligned}$$

- Parte dipendente da u : banale se si tratta di $\int_a^b u^2$

In generale, è una questione di convessità.

Teorema Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Sia $v_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funz. t.c.

$$v_n \rightarrow v_\infty$$

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_n(x)) dx \geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx$$

Dim. Barro e assumo $\psi \in C^1$. Allora vale

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + b \psi'(a) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \psi(v_m(x)) dx &= \int_a^b \psi \left(\underbrace{v_\infty(x)}_a + \underbrace{v_m(x) - v_\infty(x)}_b \right) dx \\
&\geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) + \psi'(v_\infty(x)) \cdot (v_m(x) - v_\infty(x)) \\
&= \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx + \underbrace{\int_a^b \psi'(v_\infty(x)) \cdot (v_m(x) - v_\infty(x)) dx}_0
\end{aligned}$$

Quando passo al liminf ho la tesi.

Ho barato anche nell'assumere $\psi'(v_\infty(x)) \in L^2$. Per questo sarebbe utile una stima del tipo

$$|\psi'(p)| \leq A + Bp^2 \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

Se voglio evitare di barare devo usare un lemma di approx.

Lemma Per ogni $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, esiste una famiglia di funzioni

$$\psi_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tali che

(i) sono convesse

(ii) sono di classe C^1

(iii) stanno sotto ψ , cioè $\psi(x) \geq \psi_\varepsilon(x)$

(iv) tendono a ψ crescendo (più ε è piccolo, più sono grandi)

(v) tutte le ψ_ε hanno derivata limitata (non equi)

Dato il lemma posso non barare più. Infatti

$$\int_a^b \psi(v_m) \geq \int_a^b \psi_\varepsilon(v_m) \quad \forall \varepsilon > 0$$

Quindi

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_\varepsilon(v_n) \\ &\geq \int_a^b \psi_\varepsilon(v_\infty) \end{aligned}$$

↑
tes. non baratto

Ora per Beppo Levi vale

$$\int_a^b \psi(v_\infty) = \sup_{\varepsilon > 0} \int_a^b \psi_\varepsilon(v_\infty)$$

— 0 — 0 —

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 17

Note Title

24/10/2017

REVERSE ENGINEERING Approccio variazionale alle eq. diff.

Esempio $\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 0 \\ u(2) = 3 \end{cases}$

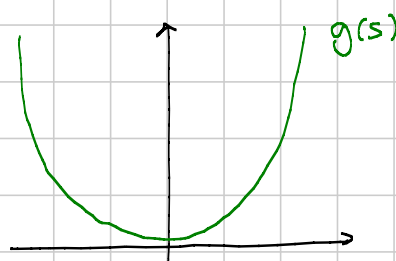
Obiettivo: studiare esistenza, unicità e neg. della soluzione

Oss. Teoremi di esistenza / unicità di Analisi 2 riguardano pbm. di Cauchy. Qui invece abbiamo DBC.

Idea: vedere il pbm. dato come (ELE) di un pbm. di minimo

$$\min \left\{ \int_0^2 \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) \right] dx : u(0) = 0, u(2) = 3 \right\}$$

dove $g(s) := \int_0^s \arctan t \, dt$



è una funzione

- non-negativa
- pari
- convessa strettamente
- C^∞ .

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 + g(s)$$

$$(L_p)' = L_s$$

$$(\ddot{u})' = \arctan u$$

Poniamo $F(u) := \int_0^2 \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) \right] dx$

e applichiamo il metodo diretto.

[1] Formulazione debole

$$\hat{F}(u) := \int_0^2 \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) \right] dx \quad u \in H^1((0,2))$$

↑
deriv. debole

Osservo che $\hat{F}(u)$ e le DBC sono ben definite in H^1

[2] Compattezza

Rispetto alla nozione di conv.

$$u_m \rightarrow u \quad \text{unif. in } [0,2]$$

$$\dot{u}_m \rightarrow \dot{u}$$

$$\hat{F}(u_m) \leq M \Rightarrow \int_0^2 \dot{u}_m^2 \leq 2M$$

↑
ho usato
 $g(s) \geq 0$

$$\leadsto \dot{u}_{m_k} \rightharpoonup v_\infty \quad \text{debole in } L^2((0,2))$$

Per lo stesso motivo le u_m sono equi $\frac{1}{2}$ -Hölder.

Grazie alle DBC (ne basterebbe una) sappiamo che $|u_m(x)|$ sono equilimitate.

Estraendo un'ulteriore s.succ. deduciamo che

$$u_{m_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{unif. in } [0,2].$$

Ragionando come sempre si deduce che $\dot{u}_\infty = v_\infty$.

[3] SCI Se $u_m \rightarrow u_\infty$ come nella nozione, allora

$$\liminf \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}_m^2 \geq \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}_\infty^2, \quad \int_0^2 g(u_m) \rightarrow \int_0^2 g(u_\infty)$$

↑
la norma è
SCI

↑
conv. unif.
+ continuità di g .

- 4 Il p.bu. di min. ammette almeno una soluz. in H^1 .
Voglio dim. che è C^∞ .

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= \hat{F}(u+tv) \\ &\quad \text{p.to min.} \quad \uparrow \in C_c^\infty((0,2)) \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2} (\dot{u}+t\dot{v})^2 + g(u+tv)\end{aligned}$$

Derivando sotto il segno di integrale

$$\varphi'(t) = \int_0^2 \underbrace{(\dot{u}+t\dot{v})\dot{v} + g'(u+tv)v}_{\psi(x,t)}$$

Oss. Per derivare sotto il segno di integrale serve come hp che

$$|\psi(x,t)| \leq \hat{\psi}(x) \quad \begin{array}{l} \forall x \in [0,2] \\ \forall t \in [-\delta, \delta] \end{array}$$

$\uparrow$
integrabile

Nel nostro caso

$$|\psi(x,t)| \leq \underbrace{(|\dot{u}(x)| + \delta |\dot{v}(x)|)}_{\substack{\in L^2, \text{ dunque} \\ \text{in particolare } \in L^1}} \underbrace{|\dot{v}(x)|}_{\text{limit.}} + \underbrace{\frac{\pi}{2} |\dot{N}(x)|}_{\text{limitato}}$$

Tornando alla formula di sopra, se u è p.to min, allora

$$\begin{aligned}0 = \varphi'(0) &= \int_0^2 \dot{u}\dot{v} + \arctan u \cdot v \\ -\int_0^2 \underbrace{\dot{u}}_f \underbrace{\dot{v}}_{\dot{\varphi}} &= \int_0^2 \underbrace{\arctan u}_g \cdot \underbrace{v}_{\varphi}\end{aligned}$$

Da qui deduciamo che $\dot{u} \in H^1$ e $(\dot{u})' = \arctan u$

Quindi u è soluzione in senso molto debole di

$$\underbrace{(u)'}_{\text{derivata debole di } u} = \arctan u$$

Passo iniziale della regolarità:

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \arctan u \in C^0 \Rightarrow (u)' \in C^0$$

$$\Rightarrow u' \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$$

$$\Rightarrow u \text{ risolve } u'' = \arctan u \text{ in senso classico.}$$

Bootstrap: $u \in C^2 \Rightarrow \arctan u \in C^2 \Rightarrow u'' \in C^2 \Rightarrow u \in C^4$
e così via fino a C^∞ .

FIN QUI ABBIAMO DIM. ESISTENZA E REGOLARITÀ.
— o — o —

UNICITÀ Dico che la soluzione è unica.

Per dimostrarlo ci sono due metodi.

Approccio variazionale (Guardo il funzionale!)

Osservo che $L(s, p) = \frac{1}{2} p^2 + g(s)$ è strett. conv. nella coppia (s, p)

Quindi ogni soluzione di Eulero è p.to di min. stretto, dunque anche unico.

Ogni soluzione di Eulero in che senso? Bastano soluzioni $u \in H^1$ che annullano la prima forma integrale. Basta fare il solito conto con $F(w) = F(u + \underbrace{(w-u)}_{\checkmark}) = \dots$

Approccio differenziale (Guardo l'equazione)

Sappiamo di avere 2 soluzioni

$$\ddot{u}_1 = \arctan(u_1)$$

$$\ddot{u}_2 = \arctan(u_2)$$

Sottraggo e pongo $w := u_1 - u_2$

$$\ddot{w} = \arctan(u_1) - \arctan(u_2)$$

Moltiplico LHS e RHS per $u_1 - u_2$:

$$(u_1 - u_2)(\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2) = \underbrace{(u_1 - u_2)(\arctan u_1 - \arctan u_2)}_{\geq 0}$$

sempre (segue dal fatto che $\arctan x$ è crescente)

Quindi

$$w\ddot{w} \geq 0 \quad \text{sempre}$$

$$0 \leq \int_0^2 w\ddot{w} = \underbrace{[w\dot{w}]_0^2}_0 - \int_0^2 \dot{w}^2 \leadsto \int_0^2 \dot{w}^2 \leq 0$$

$$\dot{w} \equiv 0$$

↓

$$w \text{ costante} \leadsto w \equiv 0$$

lo è al bordo!

Approfondimento: quale regolarità abbiamo veramente usato su u_1 e u_2 ?

— 0 — 0 —

Possibili varianti

Consideriamo sempre $\ddot{u} = \arctan u$
ma con diverse BC.

① $u(0) = 3, \dot{u}(2) = 0 \rightarrow$ considero lo stesso $F(u)$ ma
minimizzo con il solo vincolo
che $u(0) = 3$.
La NBC in 2 nasce strada
facendo

② $\dot{u}(0) = 0, \dot{u}(2) = 0 \rightarrow$ minimizzo $F(u)$ senza
ulteriori condizioni.
Le due NBC nascono on the
road

(teniamo presente che i valori puntuali non hanno senso
per funzioni L^2).

③ $\dot{u}(0) = 3, u(2) = 5$

Due possibili approcci

Modifico il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 - 3\dot{u} + g(u)$$

$$L(s, p) := \frac{1}{2} p^2 - 3p + g(s)$$

Le NBC che nascono sono
del tipo $L_p(u, \dot{u}) = 0$
cioè $\dot{u} - 3 = 0$, cioè $\dot{u} = 3$.
(Eulero resta la stessa)

Cambio variabile

$u(x) = v(x) + 3x$ e vedo cosa risolve v :

$$\ddot{v} = \ddot{u} = \arctan(u) = \arctan(v + 3x)$$

$$v(2) = -1$$

$$F(v) := \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{v}^2 + g(v + 3x) dx \rightarrow \text{nasce } \dot{v}(0) = 0 \text{ e quindi } \dot{u}(0) = 3.$$

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 18

Note Title

24/10/2017

Esempio classico di non unicità

$$\begin{cases} u'' = -\lambda \sin u \\ u(0) = 0 \\ u(2) = 0 \end{cases}$$

Per ogni valore di λ il pbm ha la soluzione $u(x) \equiv 0$.

Se λ è abbastanza grande, allora c'è almeno un'altra soluz.

Idea: considero il funzionale

$$F(u) := \int_0^2 \frac{1}{2} u'^2 + \lambda \cos u$$

che ha l'eq. data come (ELE) e dimostro che per λ grande il min. esiste e non è la funzione nulla.

Esistenza del minimo: metodo diretto standard (la cpt. segue dalla limitatezza superiore)

Il minimo non è $u_0(x) \equiv 0$ $F(u_0) = 2\lambda$

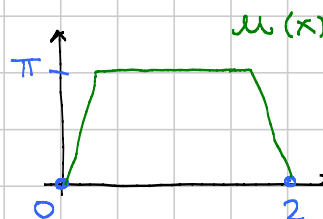
Basta trovare una u qualunque t.c. $F(u) < 2\lambda$

Prendo $u(x)$ come in figura e osservo che

$$\int_0^2 \cos(u(x)) < 0$$

Ora $\int_0^2 \frac{1}{2} u'^2 + \lambda \int_0^2 \cos u(x)$

può essere
lavorare, ma per λ grande la somma è < 0 , quindi $< 2\lambda$



Esempio Dimostrare che l'equazione

$$\ddot{u} = \arctan u + \sin x$$

ha almeno una soluzione periodica.

Sembra ragionevole cercare una soluzione di periodo 2π (non nec. minimo).

Considero il funzionale

$$F(u) := \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) + (\sin x) u$$

primitiva di $\arctan$

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 + g(s) + (\sin x) s \quad (L_p)' = L_s$$

L'equazione data è ELE del funzionale

Minimizzo $F(u)$ con BC $u(0) = u(2\pi)$.

Se ci riesce nasceranno BC $\dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi)$, quindi la soluzione si troverà in 2π nelle stesse cond. di Cauchy in cui si trova in $x=0$. Questo dice (per unicità del pbm. di Cauchy) che la soluzione continuata dopo 2π si ripete.

[Più formalmente $u(x)$ e $v(x) = u(x+2\pi)$ risolvono lo stesso pbm. di Cauchy].

Tutto sta a risolvere il pbm

$$\min \{ F(u) : u(0) = u(2\pi) \}$$

con il metodo diretto.

1 Formulazione debole in $H^1 \rightsquigarrow$ nessun pbm., basta osservare che $u(0) = u(\pi)$ ha senso in H^1

3 sc1 $\rightsquigarrow$ tutto tranquillo come sempre

2 Compattezza

☹ La parte $\psi(x, s) = g(s) - (\sin x) s$ non è limitata dal basso

😊 In realtà

$$\psi(x, s) \geq -s$$

e questo potrebbe bastare

☹ Non abbiamo BC che tengano basso il valore di u in un pto.

😊 $g(s)$ cresce a $\pm \infty$ come $\frac{\pi}{2}|s|$ e questo si mangia $(\sin x) u$.

Supponiamo di essere in un sottolivello, quindi

$$F(u_n) \leq M$$

Da questo deduco che $\int_0^{2\pi} g(u_n) + (\sin x) u_n \leq M$

Da questo deduco che esiste $x_n \in [0, 2\pi]$ t.c.

$$g(u_n(x_n)) + (\sin x_n) u_n(x_n) \leq \frac{M}{2\pi} \quad (\text{teo. media integrale})$$

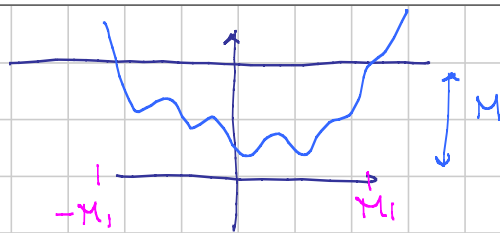
e a maggior ragione

$$g(u_n(x_n)) - |u_n(x_n)| \leq \frac{M}{2\pi}$$

Osservo che la funzione $g(s) - |s|$ tende a $+\infty$ per $s \rightarrow \pm \infty$ perché $g(s) \sim \frac{\pi}{2}|s|$ per $s \rightarrow \pm \infty$

Ne deduco che

$$|u_m(x_m)| \leq M_1$$



Ora al solito modo ottengo che

$$|u_m(x)| \leq |u_m(x_m)| + |u_m(x) - u_m(x_m)|$$

$$\leq M_1 + \|\dot{u}_m\|_{L^2} |x - x_m|^{1/2}$$

$$\leq M_1 + \|\dot{u}_m\|_{L^2} \sqrt{2\pi}$$

A questo punto posso stimare il funzionale come

$$M \geq F(u_m) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \dot{u}_m^2 + \underbrace{g(u_m)}_{\geq 0} + \underbrace{(\sin x) u_m}_{\geq -|u_m|}$$

$$\geq \frac{1}{2} \|\dot{u}_m\|_{L^2}^2 - \int_0^{2\pi} |u_m(x)| dx$$

$$= \frac{1}{2} \|\dot{u}_m\|_{L^2}^2 - (M_1 + \|\dot{u}_m\|_{L^2} \sqrt{2\pi}) \cdot 2\pi$$

$\uparrow$ grado 2 $\uparrow$ grado 1

Si tratta di equ. di 2° grado in $\|\dot{u}_m\|_{L^2}$, che è verificata per valori interni.

Da questo deduco che $\|\dot{u}_m\|_{L^2} \leq M_2$ 😊

Ora finalmente ho

• una equi-lim. su $\|\dot{u}_m\|_{L^2} \rightsquigarrow \dot{u}_{m_k} \rightarrow v_\infty$

• una equi-lim su $|u_m(x)| \xrightarrow{\text{A.A.}} u_{m_k} \rightarrow u_\infty$

④ Regolarità $\leadsto$ tranquilla come sempre.

Esempio $\int_0^{2\pi} (u^2 - u)$ $u(0) = u(2\pi)$

$\inf = -\infty$ e min N.E. (basta prendere $u_n(x) \equiv n$)

Esempio $\ddot{u} = \frac{\cos x \cdot u^3}{1 + \dot{u}^2}$ $u(0) = 2$
 $u(1) = 3$

$$\ddot{u} (1 + \dot{u}^2) = \cos x \cdot u^3$$

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{12} \dot{u}^4 + \frac{1}{4} \cos x \cdot u^4$$

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{12} p^4 + \frac{1}{4} \cos x \cdot s^4$$

$$(L_p)' = L_s \quad ; \quad (p + \frac{1}{3} p^3)' = \cos x \cdot s^3 \quad (\dot{u} + \frac{1}{3} \dot{u}^3)' = \cos x \cdot u^3 \quad \text{☺}$$

$$\min \{ F(u) : u(0) = 2, u(1) = 3 \}$$

① Formulazione debole in H^1 . Si intende che $F(u) = +\infty$ quando $u \notin W^{1,4}$

③ SCI $\leadsto$ facile come sempre : serve che $\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{12} p^4$ è convessa

② CPT ☺ $\cos x \geq 0$ in $[0, 1]$, quindi da $F(u_n) \leq M$
deduco $\|\dot{u}_n\|_2 \leq 2M$

Oss. Se fosse con l'integrale in $[0, 2]$ il minimo del funzionale non esisterebbe e anzi $\inf = -\infty$ (in realtà non è detto, perché potrebbe salvarci u^4 che ha lo stesso esponente).

4 Regolarità Ragionando come sempre si arriva a

$$-\int_0^1 (u + \frac{1}{3}u^3)' v = \int_0^1 \cos x \cdot u^3 \cdot v$$

Questa ci dice che $u + \frac{1}{3}u^3 \in H^1$ e la sua deriv. debole è $\cos x \cdot u^3$, da cui

$$(u + \frac{1}{3}u^3)' = \cos x \cdot u^3$$

in senso debole.

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \cos x \cdot u^3 \in C^0 \Rightarrow (u + \frac{1}{3}u^3)' \in C^0$$

$$\Rightarrow u + \frac{1}{3}u^3 \in C^1 \stackrel{?}{\Rightarrow} u \in C^1 \Rightarrow u \in C^2.$$

L'ultima è vera perché $\varphi(p) = p + \frac{1}{3}p^3$ è invertibile con inversa C^1 in quanto

$$\varphi'(p) = 1 + p^2 \geq 1$$

Ma allora $u = \varphi^{-1}(\cos x \cdot u^3) \in C^1$ perché composiz. di C^1 .

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 019

Note Title

27/10/2017

Prop. (caratterizzazione della SCI)Sia (X, d) uno sp. metrico, e sia $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti

(1) Per ogni $x \in X$ vale

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x)$$

(2) Per ogni succ. $x_n \rightarrow x_\infty$ vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_\infty)$$

(3) Per ogni $M \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\{x \in X : f(x) \leq M\}$$

è chiuso

(4) Si ha che l'epigrafico di f

$$\text{Epi}(f) := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$$

è chiuso in $X \times \mathbb{R}$.

— o — o —

In ciascuno di questi casi si dice che f è SCI in X .

Analoghe caratt. valgono per la semicont. sup. (esercizio).

— o — o —

Prop. (Sup di SCI è SCI) Sia (X, d) metrico e sia

$$f_i : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \quad \text{con } i \in I \leftarrow \text{insieme di indici}$$

una famiglia di funzioni SCI.

Allora

$$s(x) := \sup \{f_i(x) : i \in I\} \quad \text{è SCI.}$$

Dim 1 (Usando la def. per succ., vedi (2))

Sia $x_n \rightarrow x_\infty$ una qualunque succ.

Allora per ogni $i \in I$ vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} s(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_i(x_n) \geq f_i(x_\infty)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 se sup $f_i \in \text{SCI}$

Se faccio il sup in $i \in I$ ottengo la tesi.

$$\text{Dim 2} \quad \{x \in X : s(x) \leq M\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in X : f_i(x) \leq M\}$$

$\uparrow$
 fatto insiemeistico

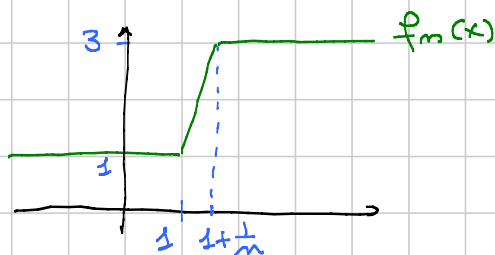
Intersezione qualunque di chiusi è chiusa

$$\text{Dim 3} \quad \text{Epi}(s) = \bigcap_{i \in I} \text{Epi}(f_i)$$

$\uparrow$
 fatto insiemeistico

La conclusione segue come sopra.

Oss. Il sup di una famiglia di funzioni continue in generale è solo SCI.



$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 3 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Def. (Inviluppo SCI)

Sia (X, d) metrico e sia $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una funzione, senza ulteriori ipotesi.

Si definisce inviluppo SCI di $f(x)$ la funzione

$$\hat{f}(x) := \sup \{ g(x) : g \text{ è SCI e } g(y) \leq f(y) \ \forall y \in X \}$$

Oss 1 L'inviluppo SCI è ben definito a meno di ammettere funzioni $g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ (così sono sicuro che almeno $g(x) \equiv -\infty$ contribuisce al sup).

Oss 2 L'inviluppo SCI $\hat{f}(x)$ è SCI (è sup di SCI)

Def. (Rilassamento di f).

Sia (X, d) metrico, e sia $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ qualunque.

Si dice rilassata di f la funzione

$$\bar{f}: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

definita da

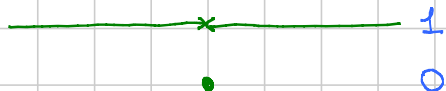
$$\bar{f}(x) := \inf \{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) : x_n \rightarrow x \}$$

↑
l'inf è fatto su tutte le succ. $x_n \rightarrow x$

Oss. Il rilassato non è definito come

$$\bar{f}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y) \quad \text{NO!!!}$$

Infatti nella definizione di $\bar{f}(x)$ è ammessa la succ. $x_n \equiv x$



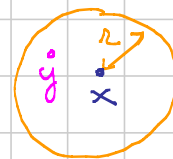
Il liminf nel pto strano è 1, ma il rilassato è 0.

Lemma fondamentale (X, d) e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ come sempre.

Allora

$\forall x \in X, \forall r > 0, \forall \varepsilon > 0 \exists y \in X$ tale che

$$d(x, y) \leq r \quad f(y) \leq \bar{f}(x) + \varepsilon$$



Dim. Dato $\varepsilon > 0$ per definizione di $\inf$ esiste $x_n \rightarrow x$ tale che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq \bar{f}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Per le proprietà del $\liminf$ si avrà che

$$f(x_n) \leq \bar{f}(x) + \varepsilon \quad \text{per infiniti indici } n$$

(se non fosse vera per ∞ indici, sarebbe vera $\geq$ definita, ma allora...)

Dico che ponendo $y := x_n$ per n abbastanza grande tra questi indici abbiamo la tesi

$$d(y, x) \leq r$$

$\uparrow$
vera per n
abbastanza grande
visto che $x_n \rightarrow x$

$$f(y) \leq \bar{f}(x) + \varepsilon$$

$\uparrow$
vera per
l'insieme di indici di sopra

— o — o —

Proprietà 1 di $\bar{f}$

$$\bar{f}(x) \leq f(x) \quad \text{per ogni } x \in X$$

Dim. Basta considerare la succ. costante $x_n := x$

$$\bar{f}(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x).$$

Proprietà 2 di $\bar{f}$ $\bar{f}(x) \geq \hat{f}(x)$ per ogni $x \in X$

Dim. Sia $x_n \rightarrow x$ una qualunque successione. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}(x_n) \geq \hat{f}(x)$$

$\uparrow$ uso che $\hat{f} \leq f$ $\uparrow$ uso che $\hat{f}$ è scl

Facendo l'inf. sulle s.succ. ho la tesi.

Proprietà 3 di $\bar{f}$ L'inf nella definizione è in realtà un min, cioè

$$\bar{f}(x) = \min \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) : x_n \rightarrow x \right\} \quad \forall x \in X.$$

Dim. Basta che trovi una successione $x_n \rightarrow x$ che realizza l'uguaglianza.

Uso il lemma fondamentale con $\alpha = \frac{1}{n}$ e $\varepsilon = \frac{1}{n}$.
Trovo un pto y_n t.c.

$$d(x, y_n) \leq \frac{1}{n}$$

$\downarrow$
 $y_n \rightarrow x$

$$f(y_n) \leq \bar{f}(x) + \frac{1}{n}$$

$\downarrow$

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\bar{f}(x) + \frac{1}{n} \right) \\ &= \bar{f}(x) \end{aligned}$$

D'altra parte è gratis che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \geq \bar{f}(x).$$

— o — o —

Def. (Recovery sequence) Siano (X, d) , f e $\bar{f}$ come sempre.
Si dice recovery sequence ogni succ. $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \bar{f}(x)$$

Oss. Abbiamo dim. sopra che esistono delle recovery per ogni p.to $x \in X$.

Dim. Prendo y_n come prima e ho che

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\bar{f}(x) + \frac{1}{n} \right) = \bar{f}(x). \end{aligned}$$

Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \bar{f}(x)$.

Proprietà 4 di $\bar{f}$ $\bar{f}$ è sc1

Dim. Sia $x_n \rightarrow x_\infty$ una succ. qualunque. Voglio che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \bar{f}(x_n) \geq \bar{f}(x_\infty)$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ uso il lemma con $x = x_n$, $r = \frac{1}{n}$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$.
Trovo y_n t.c.

$$d(y_n, x_n) \leq \frac{1}{n} \quad f(y_n) \leq \bar{f}(x_n) + \frac{1}{n}.$$

Dimo che $y_n \rightarrow x_\infty$. Facile perché

$$0 \leq \underbrace{d(y_n, x_\infty)}_{\downarrow 0} \leq \underbrace{d(y_n, x_n)}_{\downarrow 0} + \underbrace{d(x_n, x_\infty)}_{\downarrow 0}$$

Quindi y_n collabora alla def. di $\bar{f}(x_\infty)$, cioè

$$\begin{aligned} \bar{f}(x_\infty) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\bar{f}(x_n) + \frac{1}{n} \right) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad y_n \rightarrow x_\infty \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \bar{f}(x_n) \\ &\stackrel{(*)}{=} \end{aligned}$$

che è la tesi

Proprietà 5 di $\bar{f}$

$$\bar{f}(x) = \hat{f}(x) \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

Dim

$$\bar{f}(x) \geq \hat{f}(x)$$

Fatto prima

$$\bar{f}(x) \leq \hat{f}(x)$$

Basta osservare che $\bar{f}$ è scf e
 $\bar{f}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{X}$

La tesi segue dalla def. di $\hat{f}(x)$ come sup delle scf che stanno sotto.

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 20

Note Title

27/10/2017

Rapporti tra $\inf/\sup$ di f e $\inf/\sup$ di $\bar{f}$

Setting: (X, d) , $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ e $\bar{f}: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ come sempre.

Proprietà 6 di $\bar{f}$

$$\inf_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} \bar{f}(x)$$

Dim. $\supseteq$ Ovvio perché $f(x) \geq \bar{f}(x)$ per ogni $x \in X$.

$\leq$ Prendo una succ. x_n "infizzante", cioè t.c.

$$\bar{f}(x_n) \rightarrow \inf_{x \in X} \bar{f}(x)$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ applico il Lemma con $x = x_n$, $r = 2017$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$.
Trovo $y_n \in X$ t.c.

$$d(x_n, y_n) \leq 2017$$

$$f(y_n) \leq \bar{f}(x_n) + \frac{1}{n}$$

Ora

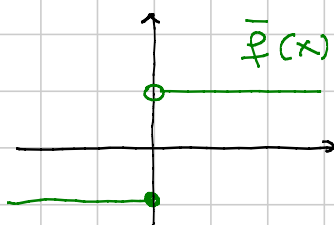
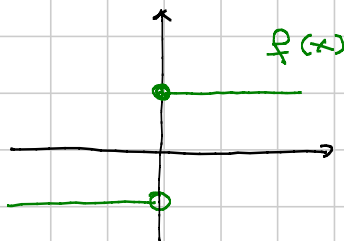
$$\begin{aligned} \inf_{x \in X} \bar{f}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}(x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{f}(x_n) \\ &\quad \uparrow \text{ovvia} \\ &\quad \inf \leq \bar{f}(x_n) \\ &\quad \lim = \liminf \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (f(y_n) - \frac{1}{n}) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \\ &\geq \inf_{x \in X} f(x). \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Oss. Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{X}$ vale la disug.

$$\sup_{x \in A} \bar{f}(x) \leq \sup_{x \in A} f(x) \quad (\text{perché } \bar{f} \leq f)$$

La disug. può essere stretta. Ad esempio $\mathbb{X} = \mathbb{R}, A = [0, +\infty)$



$$\sup \{ f(x) : x \geq 0 \} = 1$$

$$\sup \{ \bar{f}(x) : x \geq 0 \} = -1$$

Proprietà $\neq$ di $\bar{f}$

$$\sup_{x \in A} \bar{f}(x) = \sup_{x \in A} f(x) \quad \forall A \subseteq \mathbb{X} \text{ aperto}$$

Dim. Basta fare $\geq$. Come sopra prendiamo una x_n rifinante per il rilassato, cioè

$$\sup_{x \in A} \bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{f}(x_n).$$

Poiché A è aperto esiste $\{r_n\} \subseteq (0, +\infty)$ t.c. $B_{r_n}(x_n) \subseteq A$.

Uso il lemma con $x = x_n, r = r_n, \varepsilon = \frac{1}{n}$.

Trovo y_n t.c.

$$d(x_n, y_n) \leq r_n$$

$$f(y_n) \leq \bar{f}(x_n) + \frac{1}{n}$$

$\downarrow$

$$y_n \in B_{r_n}(x_n) \subseteq A$$

e concludo come prima

$$\sup_{x \in A} \bar{f}(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \bar{f}(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (f(y_n) - \frac{1}{n})$$

$$= \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \geq \sup_{x \in A} f(x)$$

— 0 — 0 —

Def. (Già data) Una funzione $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ si dice coerciva se

$$\exists K \subseteq X \text{ cpt. t.c. } \sup_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in K} f(x).$$

Proprietà 3 di $\bar{f}$ Se f è coerciva, allora $\bar{f}$ ha min. su X e

$$\inf_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} \bar{f}(x)$$

Dim. Il rilassato ammette min in K (è sci!). Devo solo dimostrare che

$$\min \{ \bar{f}(x) : x \in K \}$$

è in realtà il min su tutto X .

Prendo un qualunque p.to $y \in X$. Per una delle proprietà precedenti esiste una recovery per y , cioè una succ. $y_n \rightarrow y$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \bar{f}(y).$$

Allora

$$\begin{aligned} \bar{f}(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{recovery}}}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. sup}}}{\geq} \sup_{x \in X} f(x) \overset{\substack{\uparrow \\ f \text{ coerciva}}}{=} \sup_{x \in K} f(x) \\ &\geq \sup_{x \in K} \bar{f}(x) \overset{\substack{\uparrow \\ f \geq \bar{f}}}{=} \sup_{x \in K} \bar{f}(x) \overset{\substack{\uparrow \\ \bar{f} \text{ è sci.}}}{=} \min_{x \in K} \bar{f}(x). \end{aligned}$$

Per concludere basta osservare che

$$\sup_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} \bar{f}(x) = \min_{x \in X} \bar{f}(x), \quad \square$$

Proprietà 3 di $\bar{f}$ Sia x_n una successione infinita per f .
 Supponiamo che $x_n \rightarrow x_\infty$, cioè che sia convergente.
 Allora x_∞ è un pto di min. del rilassato.

Dim. Per ipotesi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \sup_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} \bar{f}(x)$

D'altra parte x_n collabora alla definizione di $\bar{f}(x_\infty)$, quindi

$$\begin{aligned} \inf_{x \in X} \bar{f}(x) &\leq \bar{f}(x_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \\ &\quad \uparrow \text{def. di inf} \quad \uparrow x_n \rightarrow x_\infty \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \sup_{x \in X} \bar{f}(x). \end{aligned}$$

Questo dimostra che $x_\infty \in \argmin \bar{f}$.

Corollario Supponiamo che f ammetta almeno un sottolivello non vuoto e contenuto in un compatto.

Allora tutte le succ. infinita per f hanno almeno una s.succ. che tende ad un pto di min di $\bar{f}$.

Dim. Ogni succ. infinita sta definita nel sottolivello, quindi nel compatto, quindi ammette s.succ. conv.

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty.$$

Per l'oss. prec. $x_\infty \in \argmin \bar{f}$

Oss. Qui ho usato sottolivello nel senso "aperto"

$$\emptyset \neq \{x \in X : f(x) < M\} \subseteq K$$

Corollario Se $\bar{f}$ ha un unico pto di min, ed f ha il sottolivello come sopra, allora tutte le succ. infinitanti tendono (senza bisogno di s.succ.) all'unico pto di min di $\bar{f}$.

Anzi, le succ. infinitanti di f sono tutte e sole le recovery del pto di min. di $\bar{f}$.

Come dimostro che una certa g è il rilassato di f ?

STRATEGIA 1 Mostro 2 cose:

① (liminf inequality) Per ogni $x_n \rightarrow x$ vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq g(x)$$

② (limsup inequality) Per ogni $x \in \mathbb{X}$ esiste $x_n \rightarrow x$ tale che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq g(x) \quad (\text{basterebbe il liminf}).$$

Dim. Dalla ① segue che $\bar{f}(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$

Dalla ② segue che su quella specifica $x_n \rightarrow x$ vale

$$\bar{f}(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq g(x)$$

Proposizione Se $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\overline{f + \varphi} = \bar{f} + \varphi$$

(in generale vale solo $\overline{f + \varphi} \geq \bar{f} + \bar{\varphi}$: esercizio)

Dim. Faccio vedere che $g(x) = \bar{f}(x) + \varphi(x)$ verifica (1) e (2)

(1) Per ogni $x_n \rightarrow x$ vale

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) + \varphi(x_n)) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) \\ &\stackrel{\text{proprietà liminf}}{\geq} \bar{f}(x) + \varphi(x) \end{aligned}$$

$\swarrow \varphi \text{ è continua}$

(2) Dato $x \in X$, prendo una recovery x_n per x e dico che va bene anche per $f + \varphi$. Infatti

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) + g(x_n)) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) + \limsup_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) \\ &\stackrel{\text{recovery}}{=} \bar{f}(x) + \varphi(x) \end{aligned}$$

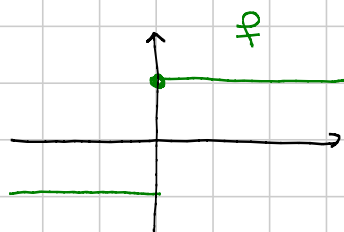
$\swarrow \varphi \text{ è continua.}$

— o — o —

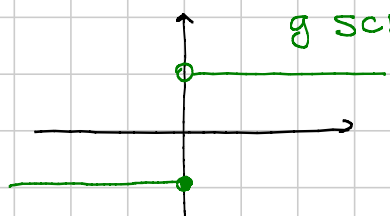
Oss. La proprietà precedente è detta stabilità rispetto alle perturbazioni continue.

Esercizio Quando vale $f(x) = \bar{f}(x)$?
Basta che $f(x)$ sia SCL.

Esempio Trovare f e g t.c. $\overline{f+g} > \bar{f} + \bar{g}$



$$\overline{f+g} \equiv 0$$



$$(\bar{f} + \bar{g})(0) = -2$$

— o — o —

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 21

Note Title

30/10/2017

Def. (Sottoinsieme denso in energia)Sia (X, d) metrico e sia $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.Un sottoinsieme $D \subseteq X$ si denso in energia per f se

$$\forall x \in X \quad \exists \{x_n\} \subseteq D \text{ t.c. } x_n \rightarrow x \text{ e } f(x_n) \rightarrow f(x)$$

Oss 1 Se f è continua, allora $D \subseteq X$ è denso in energia per f se e solo è denso e basta.Oss 2 Si ha che D è denso in energia se e solo se $\{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq X \times \bar{\mathbb{R}}$ è denso nel grafico rispetto alla topologia del prodotto.Lemma Sia (X, d) metrico, sia $\varphi: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, sia $\psi: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, e sia $D \subseteq X$.

Supponiamo che

- (i) $\varphi(x) \leq \psi(x)$ per ogni $x \in D$,
- (ii) D è denso in energia per ψ ,
- (iii) φ è SCL.

Allora

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in X.$$

Dim. Sia $x \in X$. Per la (ii) esiste $\{x_n\} \subseteq D$ t.c. $x_n \rightarrow x$ e $\psi(x_n) \rightarrow \psi(x)$.

Allora

$$\varphi(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(iii)}}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(i)}}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(ii)}}}{=} \psi(x).$$

STRATEGIA 2 (Per calcolare un rilassato)

Data $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Se sospetto che $g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sia il rilassato di f , allora mi basta verificare che

- (i) g è scl,
- (ii) $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$,
- (iii) esiste $D \subseteq X$ denso in energia per g tale che

$$\forall x \in D \exists x_n \rightarrow x \text{ t.c. } \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq g(x)$$

↑
(basterebbe $\liminf$)

Dim. $g \leq \bar{f}$ Sia $x_n \rightarrow x$ una qualunque succ.
Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) \geq g(x)$$

↑
(ii)

↑
(i)

Prendendo l'inf sulle succ. ottengo $\bar{f}(x) \geq g(x)$.

$\bar{f} \leq g$ Vorrei applicare il lemma con $\varphi := \bar{f}$, $\psi := g$.
Verifico le hp

- (i) $\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in D$ Questa è la condizione (ii) di ora
- (ii) D è denso in energia per ψ (che è g)
- (iii) φ è scl, ma $\bar{f}$ è scl.

— o — o —

In questa strategia l'esistenza della recovery va mostrata non per ogni $x \in X$, ma solo per ogni $x \in D$ che sia denso in energia per il presunto limite

— o — o —

ESTENSIONE PER RILASSAMENTO

È data $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Inoltre $X \subseteq \hat{X}$, dove $(\hat{X}, d)$ è uno spazio metrico.

Voglio trovare

$$\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

che in un certo senso estenda f .

Idea: penso f definita $+\infty$ fuori di X , cioè

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ +\infty & \text{se } x \in \hat{X} \setminus X \end{cases}$$

Pongo poi $\hat{f}(x) := \bar{f}(x)$.

Esempio $\hat{X} := L^2(a, b)$, $X := C^1([a, b])$
 $C^{1,7}([a, b])$
 $C^\infty(a, b)$

$$F(u) := \int_a^b u^2 dx \quad \forall u \in X$$

Chi è l'estensione di F a tutto L^2 ?

Sarà

$$\hat{F}(u) := \begin{cases} \int_a^b u^2 dx & \text{se } u \in H^1(a, b) \\ +\infty & \text{se } u \in L^2 \setminus H^1 \end{cases}$$

Dim (usando la strategia 2) Chiamata $\hat{F}$ come G , devo fare 3 verifiche

- (i) G è sc1 (visto tante volte)
 (ii) $G(u) \leq F(u)$ in L^2 (ovvio quando $u \in C^1$, e ancora più ovvio quando $u \notin C^1$)
 (iii) Devo trovare un sottoinsieme $D \subseteq L^2$ denso in energia per G tale che

$$\forall u \in D \exists u_n \rightarrow u \text{ con } \limsup_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \leq G(u)$$

Questa proprietà è ovvia (con $u_n \equiv u$) se $D = C^1$.
 Resta solo da verificare che D è denso in energia per G .
 Questo richiede verificare che

$$\forall u \in L^2 \exists \{u_n\} \subseteq C^1 \text{ t.c. } u_n \rightarrow u \text{ e } G(u_n) \rightarrow G(u)$$

Questa è esattamente la def. (H) degli spazi di Sobolev.

Oss. Volendo questo è un terzo modo di definire H^1 , cioè come il sottoinsieme di L^2 su cui il rilassato di F risulta finito.

Finestra sul futuro Problema di Dirichlet in $\mathbb{R}^2$

$$\min \{ \text{lunghe}(\partial E) : E \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ e } \text{meas}(E) = 1 \}$$

$\uparrow$ Lebesgue

Domande: che vuol dire lunghezza?

Possibile approccio: pongo $\mathbb{X} :=$ insieme E che sono unione di poligoni

$\mathbb{X}$: sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$ con distanza data dalla misura della diff. simmetrica, $\text{lunghe}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ è quella classica.

Per rilassamento posso estendere $\text{lunghe}: \mathbb{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Esempio 2

$$\min \left\{ \int_a^b [\cos(u) + (u - \cos x)^2] dx \right\}$$

Risposta: il min non esiste e $\mathcal{Q}'$ inf è $a-b$.

Sia $F(u)$ il funzionale che pensiamo ambientato in L^2 (vale $+\infty$ fuori da C^2 o C^{2*}).

Sappiamo che

$$\inf_{u \in L^2} F = \inf_{u \in L^2} \bar{F}$$

Per calcolare $\bar{F}$ basta calcolare il rilassato di

$$G(u) := \int_a^b \cos(u) dx$$

Infatti l'altro pezzo è continuo in L^2 e quindi per una nota proprietà "esce dal rilassato".

Dico che

$$\bar{G}(u) := \int_a^b -1 dx = a-b \quad \forall u \in L^2,$$

Per dimostrarlo devo fare 3 verifiche

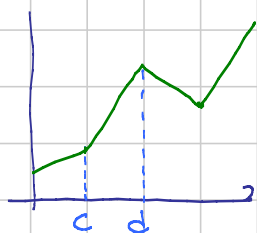
(i) $\bar{G}$ è sci (è costante 😊)

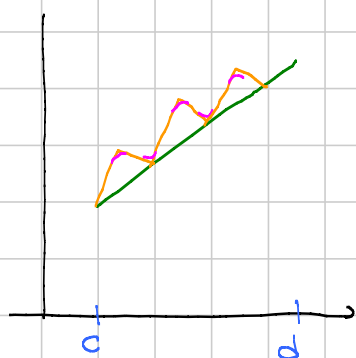
(ii) $\bar{G}(u) \leq G(u)$ (questo perché $\cos \geq -1$)

(iii) esistenza di una recovery sequence. Andrebbe fatta $\forall u \in L^2$, ma basta per ogni u è denso in energia (essendo $\bar{G}$ costante, basta un qualunque D denso)

Prendo come D le funzioni affini a tratti.

La verifica si riduce a farlo sulle rette





Basta approssimare la retta con
una spezzata vicina in norma L^2
e con coeff. angolari del tipo
 $(2k+1)\pi$

in modo che $\cos \varepsilon_n = -1$

Con dei piccoli raccordi possiamo
anche prendere le approx. C^1 .

— o — o —

Calcolo delle Variazioni —

LEZIONE 22

Note Title

30/10/2017

GAMMA CONVERGENZASetting generale: (X, d) metrico $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ succ. di funzioni

Def. Si dice che f_n gamma-converge ad una funzione $f_\infty: X \rightarrow \mathbb{R}$ se valgono le seguenti proprietà.

(1) LIMINF INEQUALITY Per ogni succ. $x_n \rightarrow x_\infty$ in X vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq f_\infty(x_\infty)$$

(2) LIMSUP INEQUALITY Per ogni $x \in X$ esiste $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq f_\infty(x).$$

Oss. Nella limsup ineq. vale in realtà il limite

Dim Basta osservare che

$$f_\infty(x_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq f_\infty(x_\infty).$$

$\uparrow$ $\liminf$ $\uparrow$ $\limsup$
 ineq. ovvio ineq.

Def. Le succ. $x_n \rightarrow x$ per cui vale la limsup ineq. si dicono RECOVERY SEQUENCE di x .

Esempio (solo in apparenza banale)

Supponiamo che $f_n(x) = f(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora $f_n \xrightarrow{\Gamma} \bar{f}$ (cioè il Gamma-lim. è il rilassato di f)

Dim. (È sostanzialmente la def. di rilassato)

Devo fare 2 verifiche

- Liminf: per ogni $x_n \rightarrow x_\infty$ vale

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq \bar{f}(x_\infty)$$

$\underset{f(x_n)}{f_n(x_n)}$

- Limsup: per ogni $x \in X$ esiste $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$\limsup f_n(x_n) \leq \bar{f}(x)$$

Anche qui basta prendere una recovery per il rilassato

— o — o —

Oss. La Gamma conv. non ha relazioni con la conv. puntuale o uniforme.

Prop. Supponiamo che

- (i) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui cpt. di X
- (ii) f_∞ è sci.

Allora

$$f_n \xrightarrow{\Gamma} f_\infty.$$

Dim. Devo fare le solite 2 verifiche

- Liminf: basta prendere $x_n := x$ e osservare che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x)$$

↑
basta la
puntuale

- liminf: devo prendere una qualunque $x_n \rightarrow x_\infty$.

Ossewo che

$$K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\infty\} \text{ è cpl. in } X$$

quindi

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } K.$$

Prendo $\varepsilon > 0$ e sono sicuro che definitivamente vale

$$f_n(x) \geq f_\infty(x) - \varepsilon \quad \forall x \in K$$

da cui

disug. sopra
↓

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_\infty(x_n) - \varepsilon$$

$$\geq f_\infty(x_\infty) - \varepsilon$$

↑
f è sc

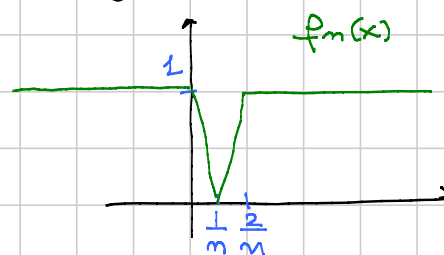
Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, ho la tesi.

Esempio 1 $X := \mathbb{R}$ $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ come in figura

Il limite puntuale è $\equiv 1$.

Il Gamma-limite è

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Facciamo le 2 verifiche

- limsup: $\forall x \in \mathbb{R}$ devo trovare $x_n \rightarrow x$ t.c. $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq f_\infty(x)$

* se $x \neq 0$ uso $x_n \equiv x$ e sfrutto la puntuale

* se $x = 0$ uso $x_n := \frac{1}{n}$

• Liminf $\forall x_n \rightarrow x_\infty$ devo verificare che $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq f_\infty(x_\infty)$

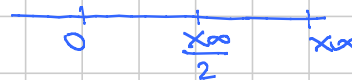
* se $x_\infty = 0$ è gratis

* se $x_\infty \neq 0$, allora supponiamo wlog $x_\infty > 0$, allora definitivamente $x_n \geq \frac{1}{2} x_\infty$ e quindi definitivamente

$$f_n(x_n) = 1$$

↑ appena

$$\frac{2}{n} \leq \frac{1}{2} x_\infty$$



Esempio 2 $f_n(x) := \arctan(nx)$.

Il limite puntuale è

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Il Gamma-Limite è

$$f_\infty(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Dim. La parte meno ovvia è la recovery per $x=0$.
Devo trovare $x_n \rightarrow 0$ t.c.

$$f(x_n) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad (\text{sarebbe limsup} \leq)$$

Basta prendere $x_n := -\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Il resto delle verifiche sono un facile esercizio
— o — o —

Prop. (Stabilità per perturbazioni continue)

Siano $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA.

Allora

$$T\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) + g(x)] = \left[T\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] + g(x)$$

Dim. Sia f_∞ il T-lim di f_n . Dico che $f_\infty + g$ è T-lim. di $f_n + g$.

• liminf Per ogni $x_n \rightarrow x_\infty$ vale

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n(x_n) + g(x_n)) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) + \liminf_{x_n \rightarrow x_\infty} g(x_n) \\ &\geq f_\infty(x_\infty) + g(x_\infty) \end{aligned}$$

• limsup. Per ogni $x \in X$ sia $x_n \rightarrow x$ recovery per f . Allora

$$\begin{aligned} \limsup (f_n(x_n) + g(x_n)) &\leq \limsup f_n(x_n) + \limsup g(x_n) \\ &\leq f_\infty(x) + g(x) \end{aligned}$$

Oss. ① Nel dim. la liminf ho usato g scs.
 " " " limsup " " " scs.

② Posso sostituire $g(x)$ fissa con una succ. di funzioni

$g_n \rightarrow g_\infty$ unif. sui cpt.
 con g_∞ continua.

Def. Sia $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ come sempre.

Possiamo sempre definire

$$\Gamma\text{-}\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) := \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\}$$

↑
l'inf. è al variare della succ. $x_n \rightarrow x$

$$\Gamma\text{-}\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) := \sup \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\}$$

Prop. È ovvio che esistono sempre e soddisfano

$$\Gamma\text{-}\liminf f_n(x) \leq \Gamma\text{-}\limsup f_n(x)$$

Inoltre coincidono se e solo se c'è il Γ -limite.

Dim. Sostanzialmente è la def. di Γ -conv.

Supponiamo che $f_n \xrightarrow{\Gamma} f_\infty$. Allora la $\liminf$ ineq. dice che

$$f_\infty(x) \leq \Gamma\text{-}\liminf f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

D'altra parte la $\limsup$ ineq. dice che

$$\Gamma\text{-}\limsup f_n(x_n) \leq f_\infty(x_\infty)$$

Mettendole insieme si ottiene quella non banale.

L'altra implicazione è analoga.

— o — o —

Tutta la verità ... quelli appena definiti sarebbero

$$\Gamma^- - \text{liminf} \quad \text{e} \quad \Gamma^- - \text{limsup}.$$

Analogamente ci sarebbero

$$\Gamma^+ - \text{liminf } f_n(x) := \sup \{ \text{liminf } f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \}$$

$$\Gamma^+ - \text{limsup } f_n(x) := \sup \{ \text{limsup } f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \}$$

che quando coincidono si definiscono Γ^+ -limite

Morale: "quelli con il + vanno bene per i pbm. di max"
 " " " - " " " " " min".

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 23

Note Title

31/10/2017

 (X, d) metrico, $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ succ. di funzioni

$$\Gamma\text{-}\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) := \inf \left\{ \liminf_{m \rightarrow +\infty} f_m(x_m) : x_m \rightarrow x \right\}$$

$$\Gamma\text{-}\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) := \inf \left\{ \limsup_{m \rightarrow +\infty} f_m(x_m) : x_m \rightarrow x \right\}$$

Programma ① Gli inf nelle def. sono dei min.② $\Gamma\text{-}\liminf$ e $\Gamma\text{-}\limsup$ sono sc.

③ Convergenza di minimi e p.ti di min.

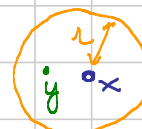
— o — o —

Indichiamo con $f_\infty(x)$ il $\Gamma\text{-}\liminf$ Lemma 1 $\forall x \in X \forall i \in \mathbb{N} \forall r > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists j \in \mathbb{N} \exists y \in X$ t.c.

$j > i$

$d(x, y) \leq r$

$f_j(y) \leq f_\infty(x) + \varepsilon$

Altro modo di enunciazione: $\forall x \in X, \forall r > 0, \forall \varepsilon > 0$ 

$$\inf \{ f_j(y) : y \in B_r(x) \} \leq f_\infty(x) + \varepsilon \quad \text{frequent.}$$

Dim Prendo $\varepsilon > 0$. Per defn. di $f_\infty(x)$ trovo succ. $x_m \rightarrow x$ t.c.

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} f_m(x_m) \leq f_\infty(x) + \frac{1}{2} \varepsilon$$

Per le proprietà del $\liminf$ questo implica che

$$f_m(x_m) \leq f_\infty(x) + \varepsilon \quad \text{frequentemente} \quad (*)$$

Basta prendere $y := x_m$ con m abbastanza grande per cui vale (*).

Lemma 2 Sia $k_n \rightarrow +\infty$ una succ. crescente di naturali
Sia $x_n \rightarrow x_\infty$.

Allora

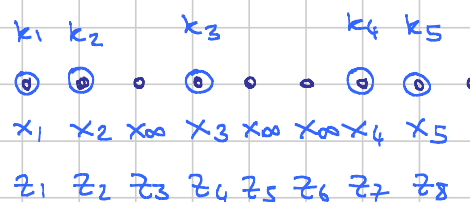
$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_{k_n}(x_n) \geq f_\infty(x_\infty)$$

(è come dire che il T -liminf di una sottosucc. è $\geq$)

Dim. "Riempire i buchi nella successione"

Definisco una succ. z_n
ponendo

$$z_i := \begin{cases} x_n & \text{se } i = k_n \text{ per qualche } n \\ x_\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$



È ancora vero che $z_n \rightarrow x_\infty$ e quindi

$$\begin{aligned} f_\infty(x_\infty) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(z_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_{k_n}(z_{k_n}) \\ &\quad \uparrow \text{def.} \quad \quad \quad \uparrow \text{s.succ.} \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_{k_n}(x_n). \end{aligned}$$

Prop. L'inf. nella def. di T -liminf è un minimo.

Dim. Dato $x \in \mathbb{X}$, devo trovare $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$f_\infty(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n)$$

Definisco $k_1 := 1$, x_1 a caso. Suppongo di aver definito $k_1, \dots, k_{n-1}$, $x_1, \dots, x_{n-1}$ e applico il Lemma 1 con

$$x := x \quad i := k_{n-1} \quad r := \frac{1}{n} \quad \varepsilon := \frac{1}{n}$$

Trovo un indice j (che chiamo k_n) e un pto y (che chiamo x_n) t.c.

$$k_n > k_{n-1}$$

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n}$$

$$f_{k_n}(x_n) \leq f_\infty(x) + \frac{1}{n}$$

Costruisco una z_n tappando i buchi come prima e ottengo che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(z_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(z_{k_n})$$

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_\infty(x) + \frac{1}{n})$$

$$= f_\infty(x).$$

Questa era la disug. non banale

— o — o —

Teorema 1 $f_\infty(x)$ è sci.

Dim. Presa una qualunque $x_n \rightarrow x_\infty$, devo dim. che

$$f_\infty(x_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_\infty(x_n)$$



x_∞

Costruisco k_n ed y_n ponendo

$k_1 := 1$, y_1 a caso

Se ho definito $k_1, \dots, k_{n-1}$, $y_1, \dots, y_{n-1}$

uso il lemma 1 con

$$x := x_n$$

$$i := k_{n-1}$$

$$r := \frac{1}{n}$$

$$\varepsilon := \frac{1}{n}$$

Otengo un intero j (che diventa k_n) e y (che diventa y_n) t.c.

$$\underbrace{k_n > k_{n-1}}_{k_n \rightarrow \infty}$$

$$\underbrace{d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}}_{y_n \rightarrow x_\infty}$$

$$f_{k_n}(y_n) \leq f_\infty(x_n) + \frac{1}{n}$$

Ora

$$f_\infty(x_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(f_\infty(x_n) + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow 0} \right)$$

$\uparrow$ lemma 2

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_\infty(x_n).$$

— 0 — 0 —

Prop. Sia $A \subseteq \mathbb{X}$ un aperto (quindi vale anche per $A = \mathbb{X}$)
Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in A} f_n(x) \right) \leq \inf_{x \in A} f_\infty(x)$$

facili esempi
mostrano che
< è possibile

Dim. Poniamo $I_n := \inf_{x \in A} f_n(x)$

Prendo una successione $\{x_n\} \subseteq A$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_\infty(x_n) = \inf_{x \in A} f_\infty(x) \quad (\text{succ. sufficiente})$$

Poiché $x_n \in A$ aperto, esiste $r_n > 0$ t.c. $B_{r_n}(x_n) \subseteq A$.

Ora costruisco k_n e y_n per induzione in questo modo:

$k_1 := 1$ y_1 a caso in A .

Supponendo di aver definito $k_1, \dots, k_{n-1}$, $y_1, \dots, y_{n-1}$, applico il lemma 1 con

$$x := x_n \quad i := k_{n-1} \quad r := r_n \quad \varepsilon := \frac{1}{n}.$$

Ottengo un indice j (che chiamo k_{n+1}) e p.to y ($\leadsto y_n$) t.c.

$$k_n > k_{n-1}$$

$$\underbrace{d(y_n, x_n) \leq \frac{1}{n}}_{y_n \in A}$$

$$f_{k_n}(y_n) \leq f_{\infty}(x_n) + \frac{1}{n}$$

A questo punto

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in A} f_n(x) \right) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in A} f_{k_n}(x) \right) \\ &\quad \uparrow \text{ s. succ.} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(y_n) \\ &\quad \uparrow y_n \in A \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(f_{\infty}(x_n) + \frac{1}{n} \right) \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow 0 \\ &= \inf_{x \in A} f_{\infty}(x). \end{aligned}$$

Prop. Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in K} f_n(x) \right) \geq \inf_{x \in K} f_{\infty}(x)$$

facili esempi
mostrano che
> è possibile

Dim. Poniamo I_n come prima. Scegliamo $k_n \rightarrow \infty$ t.c.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{k_n}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo un p.to di quasi minimo, cioè

$$f_n(x_n) \leq I_n + \frac{1}{n}.$$

Poiché K è opt., a meno di ulteriori s.succ., posso supporre che $x_{k_n} \rightarrow x_{\infty}$.

Quindi abbiamo supposto

$$x_{k_m} \rightarrow x_\infty \quad \text{e} \quad I_{k_m} \rightarrow \liminf I_m$$

Ora abbiamo che

$$f_\infty(x_\infty) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} f_{k_m}(x_{k_m}) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(I_{k_m} + \underbrace{\frac{1}{k_m}}_0 \right)$$

$\uparrow$ Lemma 2

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} I_{k_m}$$

$$= \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in K} f_m(x) \right)$$

(Oss.: è fondamentale aver scelto k_n sin dall'inizio)

— o — o —

Def. (Equicoercività) Una successione $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice equicoerciva se

$$\exists K \subseteq X \text{ compatto t.c. } \inf_{x \in X} f_n(x) = \inf_{x \in K} f_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\uparrow$
indipendente da n .

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 24

Note Title

31/10/2017

Teorema (convergenza dei min. e pti di min)Sia $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una succ. di funzioni.Sia $f_\infty: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ il Γ -liminf.Supponiamo che $\{f_n\}$ sia equicoeriva con compatto K .

Allora valgono i seguenti 3 fatti

(1) f_∞ ammette minimo su X

(2) vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in X} f_n(x) \right) = \min_{x \in X} f_\infty(x)$$

(3) se $\{x_n\} \subseteq X$ è una succ. di quasi-minimi, cioè

↑
 Anche (3)
 richiede
 che f_∞ è
 Γ -limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_n(x_n) - \inf_{x \in X} f_n(x) \right) = 0$$

e una sua s.succ. conv., diciamo $x_{k_n} \rightarrow x_\infty$, allora

$$x_\infty \in \arg\min \{ f_\infty(x) : x \in X \}$$

(4) Se f_∞ è pure Γ -limite, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in X} f_n(x) \right) = \min_{x \in X} f_\infty(x)$$

Dim. (1) Poiché K è cpt., per W f_∞ ammette minimo su K .
 Dico che è minimo globale. Prendo $y \in X$ qualunque.
 Per una prop. prec. sappiamo che esiste $y_n \rightarrow y$ t.c.

$$f_\infty(y) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n).$$

Allora

$$\begin{aligned}
 f_{\infty}(y) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in X} f_n(x) \right) \\
 &\quad \uparrow \text{recovery} \\
 &\quad \text{equicoerativit\`a} \nearrow = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in K} f_n(x) \right) \\
 &\quad \nearrow \geq \sup_{x \in K} f_{\infty}(x) \\
 &\quad \text{prop. prec.} \nearrow = \min_{x \in K} f_{\infty}(x).
 \end{aligned}$$

(2) Usando le prop. precedenti abbiamo che

$$\begin{aligned}
 \inf_{x \in X} f_{\infty}(x) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in X} f_n(x) \right) \\
 &\quad \uparrow X \text{ \u00e9 aperto} \\
 &\quad \text{equicoerativit\`a} \nearrow = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in K} f_n(x) \right) \\
 &\quad \nearrow \geq \sup_{x \in K} f_{\infty}(x) \\
 &\quad K \text{ \u00e9 cpt.} \nearrow = \min_{x \in K} f_{\infty}(x) \\
 &\quad \text{pto (1)} \nearrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad f_{\infty}(x_{\infty}) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x_{k_n}) \\
 &\quad \uparrow x_{k_n} \rightarrow x_{\infty} \\
 &\quad \text{e Lemma 2}
 \end{aligned}$$

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\underbrace{(f_{k_n}(x_{k_n}) - \inf_{x \in X} f_{k_n}(x))}_{\downarrow \text{ per hp}} + \inf_{x \in X} f_{k_n}(x) \right]$$

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in X} f_{k_n}(x) \right)$$

$$\begin{aligned}
 (?) \\
 &= \inf_{x \in X} f_{\infty}(x)
 \end{aligned}$$

OK se vale il pto (4)

(4) Supponiamo che f_∞ sia anche Γ -limite.
Devo solo mostrare che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in X} f_n(x) \right) \leq \inf_{x \in X} f_\infty(x)$$

Sia x_∞ un p.to di min. per $f_\infty(x)$. Sia $x_n \rightarrow x_\infty$
una sua recovery, cioè

$$f_n(x_n) \rightarrow f_\infty(x_\infty)$$

Ma allora

$$\inf_{x \in X} f_n(x) \leq f_n(x_n)$$

Prendendo $\limsup$ a dx e sx ho concluso.

Occhio (1) e (2) valgono con $f_\infty(x) = \Gamma\text{-Liminf}$
(3) e (4) richiedono $f_\infty(x) = \Gamma\text{-lim}$.

Questo completa la teoria con il Γ -liminf.

La teoria con il Γ -limsup (inf = min nella def. e sci)
si basa su un lemma diverso.

Lemma Sia $f_\infty^+(x)$ il Γ -limsup.
Allora

$$\forall x \in X \quad \forall r > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists i \in \mathbb{N} \quad \forall j \geq i \quad \exists y \in B_r(x) \text{ t.c.}$$

$$f_j(y) \leq f_\infty^+(x) + \varepsilon$$



È come dire che

$$\forall x \in X \quad \forall r > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{vale} \quad \sup_{y \in B_r(x)} f_j(y) \leq f_\infty^+(x) + \varepsilon$$

DEFINITIVAMENTE

Prop. L'inf. nella def. di T -Diusup è un min.

Dim. Costruisco induttivamente una succ. k_n come segue.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ applico il lemma con

$$x := x \quad r := \frac{1}{n} \quad \varepsilon := \frac{1}{n}$$

Trovo un i (che chiamo k_n e posso supporre $> k_{n-1}$)
tale che

$$\forall j \geq k_n \quad \exists y_{n,j} \in B_{\frac{1}{n}}(x) : f_j(y_{n,j}) \leq f_{\infty}^+(x) + \frac{1}{n}$$



In questo modo abbiamo definito x_n e i_n tali che

$$d(x, x_n) \leq \frac{1}{i_n} \quad f_{i_n}(x_n) \leq f_{\infty}^+(x) + \frac{1}{i_n}$$

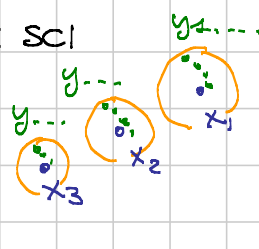
Queste bastano per concludere che $x_n \rightarrow x$ e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_{i_n}(x_n) \leq f_{\infty}^+(x)$$

come richiesto !!

Oss. Raggiungere $\limsup \leq$ qualcosa è molto più
difficile che realizzare $\liminf \leq$ qualcosa

Con la stessa idea si dimostra che f_∞^+ è sc1



Inserite qui dim. unott. di Lagrange via Γ -conv.
(vedi annate precedenti)

Esempio

$$M_n := \min \left\{ \int_0^1 [n u^2 + (u - \arctan x)^2] dx : u \in C^1([0,1]) \right\}$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

Poniamo $F_n(u) := \int_0^1 n u^2 + (u - \arctan x)^2$

e calcoliamo il Γ -limite, sperando magari nell'equicoercività

Per la stabilità rispetto alle perturb. continue basta calcolare il Γ -limite di

$$F_n(u) := n \int_0^1 u^2$$

Si intende Γ -limite in L^2 , con $F_n(u)$ esteso mettendo $+\infty$ fuori di $C^1([0,1])$.

Congetturiamo

$$F_\infty(u) := \begin{cases} 0 & \text{se } u \text{ è costante} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se fosse così, ed avessimo equicoercività, avremmo gratis

$$M_n \rightarrow \min \left\{ \int_0^1 (\lambda - \arctan x)^2 : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Per la T-conv. servono 2 verifiche

- (1) **LIMSUP** Per ogni $u \in L^2$ devo trovare una recovery
 → se u non è costante, non c'è nulla da dire.
 → se u è costante, basta prendere $u_n := u$.

- (2) **LIMINF** Presa $u_n \rightarrow u$ qualunque, devo verificare

$$F_\infty(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n)$$

→ se u è costante, è gratis.

→ altrimenti, suppongo $\liminf F_n(u_n) < +\infty$ (altrimenti è banale), quindi a meno di s.succ.

$$F_{n_k}(u_{n_k}) \leq M$$

cioè

$$\int_0^1 u_{n_k}^2 \leq \frac{M}{n_k}$$

e questo ci dice che le u_{n_k} sono hölder con costante che tende a 0.

Per Ascoli-Arzelà le u_{n_k} tendono ad una costante.
 Ma allora il limite u è costante.

La stessa stima ci dà l'equicoercività: il compatto comune è una palla di H^1 , cioè

$$\{u \in H^1 : \int_0^1 u^2 \leq 3\}.$$

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 025

Note Title

03/11/2017

VARIE TIPOLOGIE DI MINIMOSetting : funzionali integrali con DBC.

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, u') dx$$

$$u \in \mathbb{X} := \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = A, u(b) = B\}.$$

Def. Diciamo che $u_0 \in \mathbb{X}$ è

- p.to di min. globale (GM) se $F(u) \geq F(u_0)$ per ogni $u \in \mathbb{X}$
- p.to di min. loc. debole (WLM) se è un p.to di min. loc. rispetto alla metrica C^1 , cioè

 $\exists r > 0$ t.c. $F(u) \geq F(u_0)$ per ogni $u \in \mathbb{X}$ tale che

$$\|u - u_0\|_\infty + \|u' - u_0'\|_\infty \leq r$$

$$\uparrow$$

$$\sup \{|u(x) - u_0(x)| : x \in [a, b]\}$$

- p.to di min. loc. forte (SLM) se è come sopra risp. alla metrica C^0 , cioè

 $\exists r > 0$ t.c. $F(u) \geq F(u_0) \quad \forall u \in \mathbb{X} \text{ con } \|u - u_0\|_\infty \leq r.$

- p.to di min. direzionale (DML) se la funzione

$$\varphi(t) := F(u_0 + tv) \text{ ha min. loc. per } t=0 \text{ per ogni } v \in C^1 \text{ nulla al bordo.}$$

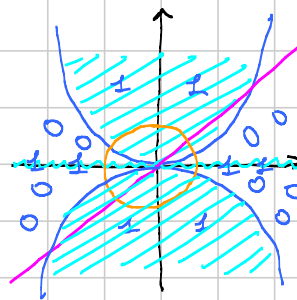
Oss. Valgono le implicazioni

$$GM \Rightarrow SLM \Rightarrow WLM \Rightarrow DLM$$

Le implicazioni inverse sono tutte false.

SLM $\Rightarrow$ GM Falso già ad Analisi 1

DLM $\Rightarrow$ WLM Falsa già ad Analisi 2
 $f(x,y) = 1$ sull'asse x e dentro la parabola, o altrove.



$(x,y) = (0,0)$ è un pto di min. direzionale,
 ma non è un pto di min. locale in nessun senso.

WLM $\Rightarrow$ SLM È falsa e l'esempio classico è il seguente

Esempio $F(u) := \int_0^1 u^3 dx$ $u(0) = 0, u(1) = 1.$

Dico che $u_0(x) = x$ è WLM ma non SLM.

Dim. che u_0 è WLM Considero

$$Y := \{u \in C^1([0,1]) : u(x) \geq 0 \text{ e } u \in \mathbb{X}\}$$

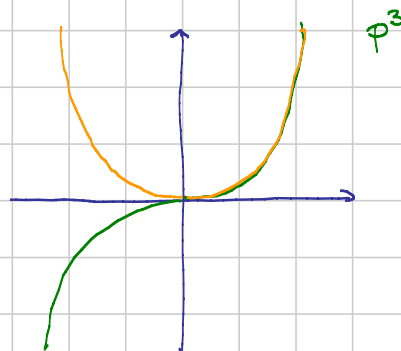
Questo è un intorno C^1 di $u_0(x)$, contiene quello della definizione con $r=1$.

Considero la Lagrangiana data

$$L(p) := p^3$$

e quella modificata

$$\hat{L}(p) := |p|^3$$



Per ogni $u \in \mathcal{Y}$ vale

$$L = \hat{L} \text{ per } p \geq 0$$

$$F(u_0) = \int_0^1 L(u_0) dx = \int_0^1 \hat{L}(u_0) \leq \int_0^1 \hat{L}(u) = F(u)$$

$$\uparrow$$

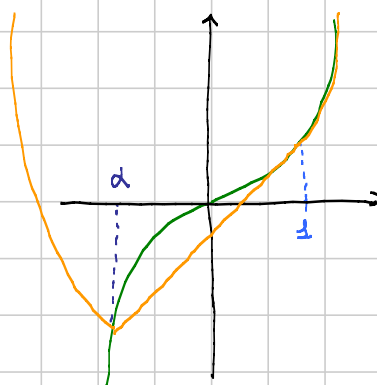
 $L(u) = \hat{L}(u)$

$\hat{L}$ è convessa,
quindi la retta
è l'unico p.to di
min.

Oss. Potrei anche considerare come $\mathcal{Y}$ un intorno più grande!

Tiro la tangente in 1 e vedo
dove incontra la cubica.

Modifico L come in figura
e osservo che per $u(x) \geq a$
vale il conto di sopra

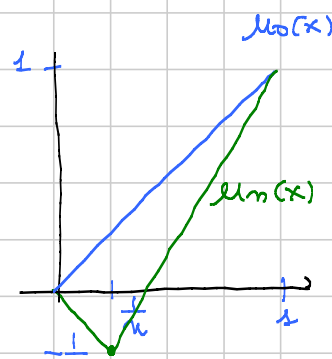


$$F(u_0) = \int_0^1 L(u_0) = \int_0^1 \hat{L}(u_0) \leq \int_0^1 \hat{L}(u) \leq \int_0^1 L(u) = F(u)$$

$\hat{L}$ è convessa

Dim che u_0 NON è SLM

Prendo la funzione $u_n(x)$ affine
a tratti t.c. $u_n(0) = 0$, $u_n(1) = 1$ e
 $u_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^a}$ per un opportuno a ,



$$F(u_n) = - \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n^{a-1}} \right)^3 + \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{1 + \frac{1}{n^a}}{1 - \frac{1}{n}} \right)^3$$

$\uparrow$
 $u_n(x)$
 $\downarrow$
 1

$$= - \frac{1}{n} \frac{1}{n^{3a-3}} = - \frac{1}{n^{3a-2}}$$

↑ Osservo che
 u_n è vicina ad
 u_0 in norma C^0
se $a > 0$. $\uparrow$ ma non
in C^1

Se $3a - 2 < 0$, cioè $a < \frac{2}{3}$
abbiamo che
 $F(u_n) \rightarrow -\infty$

VARIAZIONE SECONDA

Stesso setting di prima. Costruiamo

$$\psi(t) := F(u_0 + tv)$$

A suo tempo abbiamo definito

$$\delta F(u_0, v) := \psi'(0)$$

Ora definiamo

$$\delta^2 F(u_0, v) := \psi''(0)$$

Prop. Se u_0 è DLM, allora

$$\delta^2 F(u_0, v) \geq 0 \quad \forall v \in C^1 \text{ nulla al bordo}$$

↑
perché esista

Dim. Analisi 1.

Come calcolo la variazione seconda

$$\psi'(t) = \int_a^b L_s(x, u_0 + tv, \dot{u}_0 + t\dot{v}) v + L_p(x, u_0 + tv, \dot{u}_0 + t\dot{v}) \dot{v}$$

$$\psi''(t) = \int_a^b L_{ss}(x, u_0 + tv, \dot{u}_0 + t\dot{v}) v^2 + 2L_{sp}(\dots) v \dot{v} + L_{pp} \dot{v}^2$$

Quando poniamo $t=0$ troviamo

$$\delta^2 F(u_0, v) = \int_a^b L_{ss}(x, u_0, \dot{u}_0) v^2 + 2L_{sp}(\dots) v \dot{v} + L_{pp}(\dots) \dot{v}^2$$

↑ vale se L è C^2 rispetto alle variabili (s, p)

Dal passato

$$\delta F(u_0, v) = \int_a^b L_s(x, u_0, \dot{u}_0) v + L_p(x, u_0, \dot{u}_0) \dot{v}$$

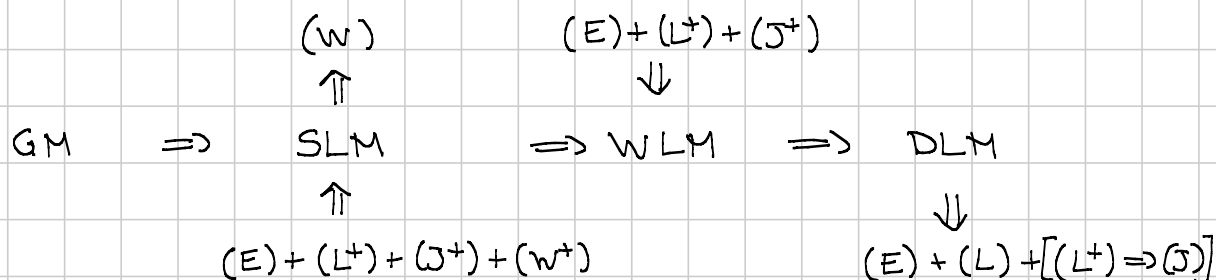
Fissato u_0

- $v \rightarrow \delta F(u_0, v)$ è lineare
- $v \rightarrow \delta^2 F(u_0, v)$ è quadratica.

↑ analoga alla forma quadratica
associata alla matrice Hessiana

— o — o —

Indice delle puntate successive



(E) : u_0 soddisfa (ELE)

— o — o —

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 26

Note Title

03/11/2017

Funzionali quadratici Sono funzionali del tipo

$$Q(v) = \int_a^b A(x) v^2 + 2B(x) v \dot{v} + C(x) \dot{v}^2$$

Sui coeff. $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ si possono fare varie hp

- $L^\infty((a,b))$ $\leadsto$ suff. per dare senso a $Q(v)$ per $v \in H^1$
- $C^0([a,b])$
- $C^1([a,b])$

Considereremo sempre funzioni v nulle al bordo.

Def. Un funzionale quadratico si dice NON NEGATIVO (semi-definito positivo) se

$$Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

Prop. Sono fatti equivalenti

- (i) $Q(v) \geq 0$ per ogni $v \in C_c^\infty((a,b))$
- (ii) $Q(v) \geq 0$ " " $v \in C^1([a,b])$ con $v(a)=v(b)=0$
- (iii) $Q(v) \geq 0$ " " $v \in C^1$ a tratti " " "
- (iv) $Q(v) \geq 0$ " " $v \in H^1((a,b))$ con $\underline{v(a)=v(b)=0}$
hanno senso in H^1

Dim. Soliti lemmi di approx.

— o — o —

Cond. nec. per essere non-NEG. : (L) e $[(L^+) \Rightarrow (J)]$

Cond. suff. " " " : $(L^+) + (J^+)$

— o — o —

CONDIZIONI DI LEGENDRE

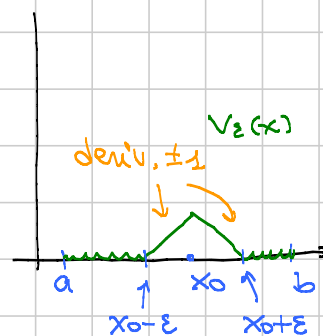
(L) $C(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$

(L⁺) $C(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$ (se $C(x)$ è continuo, questo implica che $C(x) \geq m > 0$)

Teorema Se i coeff. sono continui e $Q(v) \geq 0$ sempre, allora vale la condizione L.

Dim. Sia $x_0 \in (a, b)$ qualunque.

Per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo la funzione v_ε è nulla al bordo, quindi $Q(v_\varepsilon) \geq 0$.



$$Q(v_\varepsilon) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} A(x) v_\varepsilon^2 + 2B(x) v_\varepsilon \dot{v}_\varepsilon + C(x) \cdot 1 \quad \uparrow \dot{v}_\varepsilon^2$$

$$+ \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} A(x) v_\varepsilon^2 + 2B(x) v_\varepsilon \dot{v}_\varepsilon + C(x) \cdot 1 \geq 0$$

Divido per ε e uso il teorema della media integrale

$$\frac{Q(v_\varepsilon)}{\varepsilon} = \overset{\uparrow 0}{A(x_\varepsilon)} \overset{\uparrow 0}{v_\varepsilon(x_\varepsilon)^2} + 2 \overset{\uparrow 0}{B(x_\varepsilon)} \overset{\uparrow 0}{v_\varepsilon(x_\varepsilon)} \cdot 1 + C(x_\varepsilon) +$$

$$\underset{\downarrow 0}{A(y_\varepsilon)} \underset{\downarrow 0}{v_\varepsilon(y_\varepsilon)^2} + 2 \underset{\downarrow 0}{B(y_\varepsilon)} \underset{\downarrow 0}{v_\varepsilon(y_\varepsilon)} \cdot (-1) + C(y_\varepsilon)$$

per opportuni $x_\varepsilon \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ e $y_\varepsilon \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Facciamo tendere $\varepsilon \rightarrow 0$ troviamo

$$2C(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{Q(v_\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0$$

Essendo x_0 arbitrario abbiamo finito. $\square$

Oss. Abbiamo usato che $C(x)$ è continuo, ma solo la limitatezza di $A(x)$ e $B(x)$.

CONDIZIONI DI JACOBI Consideriamo l'eq. diff.

$$(C\dot{v} + Bv)' = Av + B\dot{v} \quad (\text{JDE})$$

Oss 1 Si tratta di (ELE) di $Q(n)$.

Oss 2 Se i coeff. sono di classe C^1 , posso fare il conto al LHS ottenendo

$$\dot{C}\dot{v} + C\ddot{v} + \dot{B}v + B\dot{v} = Av + B\dot{v}$$

Oss 3 Se inoltre vale (L^+) posso portare (JDE) in forma normale

$$\ddot{v} = -\frac{\dot{C}}{C}\dot{v} + \frac{A-B}{C}v$$

A questo p.to valgono tutti i tes. (esistenza, reg., unicità) di Analisi 2.

— o — o —

Def. Un p.to c si dice punto coniugato di a se la soluz. del pbm. di Cauchy ↑ $\exists$ almeno sx dell'cut.

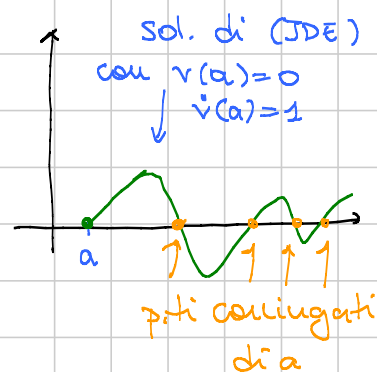
$$(\text{JDE}) \quad u(a) = 0 \quad u'(a) = 1$$

si annulla in c .

Oss. 4 La cond. $u'(a) = d \neq 0$ porterebbe alla stessa soluzione a meno di una costante, perché (JDE) è lineare. La def. di p.to coniugato non dipende dalla scelta di 1 .

(J) Non esistono pti coniugati di a nell'intervallo (a, b)

(J⁺) Non esistono pti coniugati di a nell'intervallo $(a, b]$



Oss 5 Allo stesso modo posso definire i pti coniugati di b risolvendo (JDE) con $v(b)=0$, $v'(b)=37$

Prop. Sono fatti equivalenti (SOTTO L'IPOTESI (L⁺))

- (i) vale (J)
- (ii) non esistono pti coniugati di b in (a, b)
- (iii) l'unica sol. di (JDE) che si annulla almeno 2 volte in (a, b) è quella $\equiv 0$.

Dam. Facile conseguenza del Lemma di oscillazione che prima o poi enuncio.

— o — o —

Teorema Sia $Q(r)$ un funzionale quadratico non negativo. Supponiamo che

(i) i coeff. sono di classe C^1

(ii) vale la condizione (L⁺)

Allora vale la condizione (J).

Dam. Supponiamo per assurdo che non valga (J).

Allora (JDE) ha una soluzione w che si annulla in a e in un altro pto $c \in (a, b)$ e non è la soluzione identicamente nulla

Considero la funzione

$$v(x) := \begin{cases} w(x) & \text{se } x \in [a, c] \\ 0 & \text{se } x \in [c, b] \end{cases}$$



Dico che $Q(v) = 0$.

Se fosse vero, avremmo che v è un p.to di min. per $Q(v)$, quindi v deve risolvere (ELE) di Q , che è (JDE).

Sotto l'ipotesi (L^+) si ha che (JDE) è un'eq. lin. in forma normale

$$\ddot{v} = \alpha(x) \dot{v} + \beta(x) v$$

e per Analisi 2 le soluzioni di questa sono di classe C^2 .

Invece v non è nemmeno di classe C^4 . Per questo occorre

osservare che $\dot{v}(c) \neq 0$ (se così non fosse avremmo

$w(c) = \dot{w}(c) = 0$, ma allora per unicità sarebbe $w(x) \equiv 0$)

Resta da dimostrare che $Q(v) = 0$, cioè che

$$Q(v) = \int_a^c A v^2 + 2B v \dot{v} + C \dot{v}^2 = \int_a^c A w^2 + 2B w \dot{w} + C \dot{w}^2$$

Partiamo da (JDE)

$$(C\dot{w} + Bw)' = Aw + B\dot{w}$$

Moltiplichiamo a dx e sx per w :

$$w(C\dot{w} + Bw)' = Aw^2 + Bw\dot{w}$$

Integriamo su $[a, c]$ e otteniamo

$$\int_a^c Aw^2 + Bw\dot{w} = \int_a^c w(C\dot{w} + Bw)' = \overbrace{\left[w(C\dot{w} + Bw) \right]_a^c}^0 - \int_a^c C\dot{w}^2 + Bw\dot{w}$$

perché $w(a) = w(c) = 0$

Riorganizzando i termini segue la tesi.

— o — o —

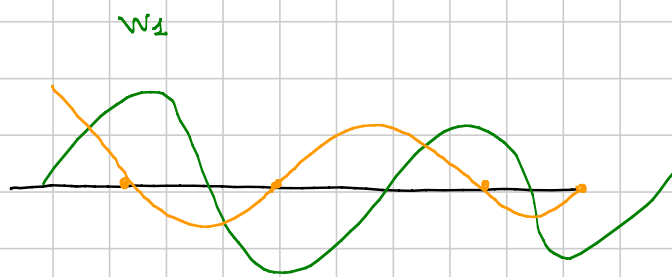
Lemma di oscillazione Consideriamo un'eq. lin. del tipo

$$\ddot{w} = \alpha(x) \dot{w} + \beta(x) w.$$

Sia $w_1(x)$ una soluzione non $\equiv 0$

Sia $w_2(x)$ " " " " e non multipla della prec.

Allora tra ogni coppia di zeri di $w_1(x)$ esiste uno zero (e quindi anche uno solo) di w_2 .



Dal lemma segue la Prop. con i fatti equiv.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 27

Note Title

07/11/2017

Funzionali quadratici

$$Q(v) = \int_a^b A(x) v^2 + 2B(x) v \dot{v} + C(x) \dot{v}^2$$

Condizioni necessarie

$$Q(x) \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(a,b) \quad \Rightarrow \quad (L) + [(L^+) \Rightarrow (J^+)]$$

Cond. sufficienti

$$(L^+) + (J^+) \quad \Rightarrow \quad Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(a,b)$$

$$(L) \quad C(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

$$(L^+) \quad C(x) > 0 \quad "$$

$$(JDE) \quad (C\dot{w} + Bw)' = B\dot{w} + Aw$$

(J) Nessun p.t.o. coniugato di a in (a,b)

(J^+) " " " " " (a,b]

Schema della dim. della cond. suff.:

$$(L^+) + (J^+) \xRightarrow{(1)} (J^{++}) \xRightarrow{(2)} (R) \xRightarrow{(3)} Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in \dots$$

(J^{++}) esiste sol. w di (JDE) t.c. w(x) > 0 per ogni x \in [a,b]

(R) esiste z: [a,b] \to \mathbb{R} di classe C^1 tale che

$$(RDE) \quad \dot{z} = \frac{[z+B]^2}{C} - A \quad \forall x \in [a,b]$$

Implicazione ① DIM 1 (Uso il lemma di oscillazione)

Sotto le ipotesi (L^+) e (J^+) esiste una soluzione w_1 di (JDE) t.c.

$$w_1(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in (a, b] \quad (\text{ma } w_1(a) = 0)$$

Interpretando a partire da b , esiste sol. w_2 di (JDE) t.c.

$$w_2(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in [a, b) \quad (\text{ma } w_2(b) = 0)$$

Ora $w(x) := w_1(x) + w_2(x)$ è la sol. richiesta

Oss. Abbiamo usato il lemma di oscill. per dire che esiste la $w_2(x)$.

Implicazione ② Osserviamo che non è ovvio che (RDE) abbia una sol. definita in tutto $[a, b]$ (il RHS è quadratico in $\dot{z}$ e quindi tutte le sol. potrebbero blow up in un tempo più breve di Dunge $[a, b]$).

Sia $w(x)$ come nella condizione (J^{++}) . Poniamo

$$z(x) := - \frac{C\dot{w} + Bw}{w} \quad \leftarrow \text{sta nella derivata del LHS della (JDE)}$$

Mostriamo che risolve (RDE).

$$\text{LHS} = \dot{z}(x) = - \frac{(C\dot{w} + Bw)'}{w} + \frac{C\dot{w} + Bw}{w^2} \dot{w}$$

$$(JDE) \Rightarrow - \frac{B\dot{w} + Aw}{w} + \frac{C\dot{w} + Bw}{w^2} \dot{w}$$

$$= - \cancel{B} \frac{\dot{w}}{w} - A + C \frac{\dot{w}^2}{w^2} + \cancel{B} \frac{\dot{w}}{w}$$

$$\text{RHS: Osservo che} \quad z(x) = -C \frac{\dot{w}}{w} - B$$

$$\frac{1}{C} [z + B]^2 - A = \frac{1}{C} \left[-C \frac{\dot{w}}{w} \right]^2 - A = C \frac{\dot{w}^2}{w^2} - A \quad \text{😊}$$

Quindi per ogni $v \in C_c^\infty(a,b)$ vale che

$$Q(v) = \hat{Q}(v) \geq 0.$$

Oss 1 R sta per RICCATI. Le equ. di Riccati sono eq. diff. del tipo

$$\ddot{z} = a(x)z^2 + b(x)z + c(x)$$

C'è un legame generale tra le equ. alla Riccati e le equ. lineari di ordine 2 del tipo

$$\ddot{w} = \alpha(x)\dot{w} + \beta(x)w$$

Il legame è dato dalla ricerca di sol. positive della seconda. le cerco del tipo

$$w(x) := e^{-v(x)}$$

Faccio i conti e viene

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\dot{v}e^{-v} \\ \ddot{w} &= -\ddot{v}e^{-v} + \dot{v}^2e^{-v}\end{aligned}$$

Sostituisco nella lineare e trovo

$$-\ddot{v}e^{-v} + \dot{v}^2e^{-v} = -\alpha(x)\dot{v}e^{-v} + \beta(x)e^{-v}$$

$$\ddot{v} = \dot{v}^2 + \alpha(x)\dot{v} + \beta(x) \quad \text{Ora } z(x) := \dot{v}(x) \text{ risolve una riccati}$$

$$\ddot{z} = z^2 + \alpha(x)z + \beta(x)$$

Come ottengo z a partire da w ?

$$w = e^{-v} \rightsquigarrow v = -\log w \rightsquigarrow z = \dot{v} = -\frac{\dot{w}}{w}$$

praticamente
è la sostituz.
di prima.

Implicazione ① DIM 1 (JDE) si può scrivere come

$$\ddot{w} = \alpha(x) \dot{w} + \beta(x) w \quad (\text{sew } (L^+))$$

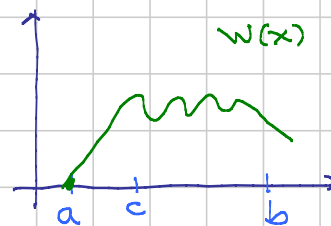
Per ipotesi sappiamo che la sol. di (JDE) con dati

$$w(a) = 0 \quad \dot{w}(a) = 1$$

non si annulla in $(a, b]$.

Provo a risolvere (JDE) con dati

$$w_\varepsilon(a) = \varepsilon \quad \dot{w}_\varepsilon(a) = 1$$



e spero che la soluz. w_ε sia > 0 su $[a, b]$ quando $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo.

- Per continuità di w e $\dot{w}$ sappiamo che esiste $c \in (a, b)$ t.c.

$$\dot{w}(x) \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [a, c]$$

$$w(x) \geq m_0 > 0 \quad \forall x \in [c, b]$$

- Per dipendenza continua dai dati iniziali sappiamo che

$$\begin{array}{lcl} \underbrace{w_\varepsilon \rightarrow w} & \text{e} & \underbrace{\dot{w}_\varepsilon \rightarrow \dot{w}} \text{ unif. in } [a, b] \\ \downarrow & & \downarrow \\ w_\varepsilon(x) \geq \frac{m_0}{2} \quad \forall x \in [c, b] & & \dot{w}_\varepsilon(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, c] \\ \text{se } \varepsilon \text{ è piccolo} & & \text{se } \varepsilon \text{ è piccolo} \end{array}$$

Questo ci dice che per ε piccolo vale $w_\varepsilon(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$ (su $[c, b]$ è già scritto, su $[a, c]$ segue dal fatto che $w_\varepsilon(a) > 0$ e $\dot{w}_\varepsilon(x) \geq 0$ dopo).

Dim. Lemma oscillazione Siano w_1 e w_2 due sol. lin. ind. di $\ddot{w} = \alpha(x)\ddot{w} + \beta(x)w$.

Supponiamo che w_1 si annulli in a e in b , con $a < b$.

Allora w_2 si annulla almeno una volta in (a, b) .

Posso supporre WLOG che a e b

siano 2 annullamenti consecutivi

e che $w_1(x) > 0$ in (a, b) .

Considero la matrice

$$\begin{pmatrix} w_1(x) & \dot{w}_1(x) \\ w_2(x) & \dot{w}_2(x) \end{pmatrix}$$

e chiamo $W(x)$ il suo determinante. Con un facile conto si vede che

$$\dot{W}(x) = \alpha(x) W(x)$$

da cui

$$W(x) = W(a) \cdot \exp(\text{primitiva di } \alpha(x))$$

e quindi il segno di $W(x)$ è costante.

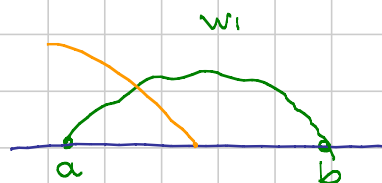
Ora in $x=a$

in $x=b$

$$W(a) = - \underbrace{\dot{w}_1(a)}_{+} w_2(a)$$

$$W(b) = - \underbrace{\dot{w}_1(b)}_{-} w_2(b)$$

Ma allora $w_2(a)$ e $w_2(b)$ devono avere segno opposto.



Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 28

Note Title

07/11/2017

Condizioni necessarie / sufficienti per WLM

$$F(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x)) dx \quad \text{con DBC}$$

Variazione seconda in u_0 risp. alla direzione v :

$$\begin{aligned} \delta^2 F(u_0, v) = & \int_a^b \underbrace{L_{ss}(x, u_0(x), u'_0(x))}_{A_0(x)} v^2(x) + \\ & + 2 \underbrace{L_{sp}(x, u_0(x), u'_0(x))}_{B_0(x)} v(x) \dot{v}(x) + \\ & + \underbrace{L_{pp}(x, u_0(x), u'_0(x))}_{C_0(x)} \dot{v}(x)^2 \end{aligned}$$

Cond. necessarie

$$u_0 \text{ WLM} \Rightarrow u_0 \text{ DLM} \Rightarrow \delta^2 F(u_0, v) \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(a, b)$$

$$\Rightarrow (L) + [(L^+) \Rightarrow (J)]$$

riguardano il segno di L_{pp} , cioè la convessità di L nella variabile p .

Cond. sufficienti

$$u_0 \text{ verifica } (E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow u_0 \text{ e WLM}$$

↑
equazione
di Eulero

↑ sul funzionale quadratico
con coeff. $A_0(x), B_0(x), C_0(x)$.

— o — o —

Lemma 1 (Stima dall'alto per un funzionale quadratico)

$$|Q(v)| \leq M \int_a^b \dot{v}^2(x) dx \quad \forall v \in C_c^\infty(a,b)$$

↑
M dipende dalle norme infinito di $A(x), B(x), C(x)$ e diventa piccolo a piacere quando le norme diventano piccole.

Dim
$$Q(v) \leq \int_a^b |A(x)| v^2 + 2 \int_a^b |B(x)| \cdot |v(x)| \cdot |\dot{v}(x)| + \int_a^b |C(x)| \cdot \dot{v}^2$$

Ora
$$\int_a^b |C(x)| \dot{v}^2(x) \leq \left\{ \max_{x \in [a,b]} C(x) \right\} \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx$$

D'altra parte $v(x)$ è $\frac{1}{2}$ -Hölder e

$$\begin{aligned} |v(x)| &= |v(x) - v(a)| \leq |x-a|^{1/2} \cdot \|\dot{v}\|_{L^2} \\ &\leq (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b \dot{v}(x)^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_a^b |A(x)| \cdot v^2(x) dx &\leq \max_{x \in [a,b]} |A(x)| \cdot \int_a^b (b-a) \cdot \|\dot{v}\|_{L^2}^2 \\ &= \underbrace{\max_{x \in [a,b]} |A(x)| \cdot (b-a)^2}_{\text{costante}} \left(\int_a^b \dot{v}(x)^2 dx \right) \end{aligned}$$

Per il termine centrale basta osservare che

$$2 |v(x)| \cdot |\dot{v}(x)| \leq |v(x)|^2 + |\dot{v}(x)|^2$$

e procedere come prima.

□

Lemma 2 (Stima dal basso per un funzionale quadratico)

Sia $Q(v)$ un funzionale quadratico che soddisfa (L^+) e (J^+) . Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$Q(v) \geq \varepsilon_0 \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx \quad \forall v \in C_c^\infty(a,b)$$

Dim. Considero il nuovo funzionale quadratico

$$\begin{aligned} \hat{Q}_\varepsilon(v) &:= Q(v) - \varepsilon \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx \\ &= \int_a^b A(x) v^2 + 2B(x) v \dot{v} + (C(x) - \varepsilon) \dot{v}^2 \end{aligned}$$

Se ε è abbastanza piccolo, allora $\hat{Q}_\varepsilon$ verifica ancora le cond. suff. per essere ≥ 0 .

(L^+) è gratis perché $C(x) \geq m_0 > 0$ in $[a,b]$. (basta $\varepsilon < m_0$)

Devo controllare solo (J^+) per $\hat{Q}_\varepsilon(x)$. Ora (JDE) per $\hat{Q}_\varepsilon$ sarà del tipo

$$\ddot{w} = \alpha_\varepsilon(x) \dot{w} + \beta_\varepsilon(x) w \quad (JDE_\varepsilon)$$

per opportuni coeff. α_ε e β_ε che tendono a quelli della forma Q quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Quindi le soluzioni $w_\varepsilon(x)$ di (JDE_ε) , per dipendenza continua dei coeff., con dati iniziali

$$w_\varepsilon(a) = 0 \quad \dot{w}_\varepsilon(a) = 1$$

tendono alla corrisp. soluzione di (JDE) per $Q(v)$ originario, nel senso che

$$w_\varepsilon \rightarrow w \quad \text{e} \quad \dot{w}_\varepsilon \rightarrow \dot{w} \quad \text{unif in } [a,b]$$

Sappiamo che $w(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$ e vogliamo dedurre lo stesso per $w_\varepsilon(x)$ quando ε è piccolo.

Questo si fa come alla lezione prec. introducendo il p.to c.

Lemma 3 Sia $Q_0(v)$ un funzionale quadratico con coeff. $A_0(x), B_0(x), C_0(x)$ che verificano (L^+) e (J^+) .

Sia $Q(v)$ un funzionale quadratico con coeff. $A(x), B(x), C(x)$.
Se

$\|A(x) - A_0(x)\|_{C^0}, \|B(x) - B_0(x)\|_{C^0}, \|C(x) - C_0(x)\|_{C^0}$
sono abbastanza piccole, allora $Q(v) \geq 0$ per ogni $v \in C_c^\infty$.

Dim. $Q(v) = Q_0(v) + \underbrace{[Q(v) - Q_0(v)]}_{\hat{Q}(v)}$

Per il lemma 2 sappiamo che esiste $\varepsilon_0 > 0$ t.c.

$$Q_0(v) \geq \varepsilon_0 \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx$$

Per il lemma 1 sappiamo che esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|\hat{Q}(v)| \leq M \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx$$

↑
diventa piccolo a piacere quando i
coeff. diventano piccoli in norma C^0 .

Quindi $Q(v) \geq \varepsilon_0 \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx - M \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx$

↑
posso fare in modo
che sia $\leq \varepsilon_0$.

— o — o —

Dim. cond. suff. per WLM Sia u_0 che verifica $(E) + (L^+) + (J^+)$.

Sia w un altro competitor. Poniamo $v := w - u_0$ e osserviamo che v è nulla al bordo.

Consideriamo come sempre

$$\varphi(t) := F(u_0 + tv)$$

Allora

Taylor-Lagrange

$$F(w) = \varphi(1) \stackrel{\downarrow}{=} \underbrace{\varphi(0)}_{F(u_0)} + \underbrace{\varphi'(0)}_{0 \text{ (ELE)}} \cdot 1 + \frac{1}{2} \varphi''(t_0) \cdot 1^2$$

$$= F(u_0) + \frac{1}{2} \varphi''(t_0)$$

$\uparrow$ misterioso in (91)

Mi basta dim. che $\varphi''(t_0) > 0$. Ora

$$\begin{aligned} \varphi''(t_0) &= \int_a^b L_{ss}(x, u_0(x) + t_0 v(x), \dot{u}_0(x) + t_0 \dot{v}(x)) v^2(x) \\ &\quad + 2L_{sp}(\dots) v(x) \dot{v}(x) + L_{pp}(\dots) \dot{v}(x)^2 \\ &= \int_a^b A_{t_0}(x) v^2 + 2B_{t_0}(x) v \dot{v} + C_{t_0}(x) \dot{v}^2 \end{aligned}$$

Se $v(x)$ è abbastanza piccola in norma C^1 , allora i termini $u_0 + t_0 v$ e $\dot{u}_0 + t_0 \dot{v}$ sono abbastanza vicini ai termini u_0 e $\dot{u}_0$, Quindi i coeff.

$A_{t_0}(x)$, $B_{t_0}(x)$, $C_{t_0}(x)$ sono vicini ai coeff. $A_0(x)$, $B_0(x)$, $C_0(x)$

in norma C^0 (sto supponendo L_{ss} , L_{sp} , L_{pp} almeno continue).

Grazie al Lemma 3 concludiamo che $\varphi''(t_0) \geq 0$ se v è piccola in norma C^1 . (c'è un C^1 di u_0 dove sta w).

L'ESEMPIO

$$Q(v) = \int_0^l \dot{v}^2 - v^2$$

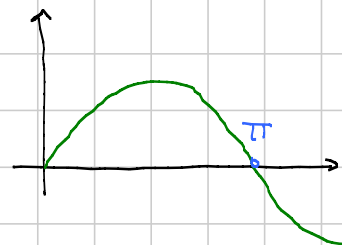
(L^+) è gratis

(JDE) diventa

$$\ddot{w} = -w$$

$$w(0) = 0$$

$$\dot{w}(0) = 1$$



La soluzione è

$$w(x) = \sin x$$

Quindi abbiamo 3 casi

- Se $l > \pi$, allora abbiamo pto coniugato su $(0, l)$
 $\Rightarrow$ NO cond. uec. $\Rightarrow Q$ non è ≥ 0 per ogni v
 $\Rightarrow \exists v_0$ nulla al bordo t.c. $Q(v_0) < 0$ e
 usando m.v.o. ottengo che $\inf = -\infty$
- Se $l < \pi$, allora abbiamo (J^+) $\Rightarrow$ cond. suff. Ok $\Rightarrow$
 $Q(v) \geq 0$ sempre.
- Resta il caso $l = \pi$ (cond. uec. Ok, ma suff. NO)
 Dico che anche qui $Q(v) \geq 0$ sempre.

Dim. Se così non fosse, troveremmo v_0 nulla al bordo tale che $Q(v_0) < 0$.

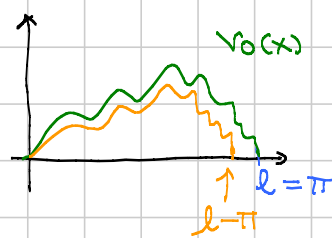
Ma allora troveremmo v_0 nulla al bordo t.c.

$$Q(v_0) < -2017$$

Ma allora con un riscalamento
 affine otterremmo $v_\varepsilon(x)$ t.c.

$$\int_0^{l-\varepsilon} \dot{v}_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2 < 0 \text{ e quindi}$$

avremmo negatività anche prima di $l = \pi$.



Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 29

Note Title

14/11/2017

"Un idiota da solo in mezzo ad una folla non lo nota nessuno;
un gruppo intero di idioti invece si riconosce subito"
[citazione libera da Ennio De Giorgi]

CALIBRAZIONI

Esempio motivazionale Considero il problema

$$\min \left\{ \int_0^1 u^2(x) dx : u(0)=0, u(1)=3, u \in C^1([0,1]) \right\}$$

Il min. è dato dalla retta, ma faccio finta di non saperlo.
Come lo dimostro?

1° modo Considero la disug. $p^2 \geq 6p-9$. Segue che

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x)^2 dx &\geq \int_0^1 (6u(x)-9) dx = 6 \int_0^1 u(x) dx - 9 \\ &= 6[u(x)]_0^1 - 9 = 18 - 9 = 9 = \int_0^1 u_0^2(x) dx \end{aligned}$$

dove $u_0(x) = 3x$.

Quindi la retta è p.to min. Inoltre vale il segno di = se e solo se vale per ogni x nella disug. $u^2 \geq 6u-9$, il che vale sse $u(x) \equiv 3$.

2° modo Fisso $m > 0$ e considero la disug.

$$p^2 \geq 2 \frac{s+3m}{x+m} p - \left(\frac{s+3m}{x+m} \right)^2 \quad \begin{matrix} \forall p \in \mathbb{R} & \forall s \in \mathbb{R} \\ \forall x > 0 \end{matrix}$$

La applico con $p = u(x)$ e $s = u(x)$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 u(x)^2 dx &\geq \int_0^1 2 \frac{u(x)+3m}{x+m} u(x) - \left(\frac{u(x)+3m}{x+m} \right)^2 dx \\
 (\text{miracolo!}) &= \int_0^1 \left[\frac{(u(x)+3m)^2}{x+m} \right]' dx \\
 &= \left[\frac{(u(x)+3m)^2}{x+m} \right]_0^1 = \frac{(3+3m)^2}{1+m} - \frac{(3m)^2}{m} \\
 &= 9(1+m) - 9m = 9 \quad \text{☺}
 \end{aligned}$$

Se vado a vedere quanto vale il segno di = trovo $\Leftrightarrow u(x) \equiv 3$.

Oss. La disug. del 1° modo è il limite di quella del 2° per $m \rightarrow \infty$.

3° modo Considero la disuguaglianza

$$p^2 \geq 2 \frac{s}{x} p - \left(\frac{s}{x} \right)^2 \quad \forall p \in \mathbb{R} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \forall x > 0$$

(è il limite per $m \rightarrow 0^+$ della precedente). Al solito modo

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \geq \int_0^1 2 \frac{u(x)}{x} u(x) - \left(\frac{u(x)}{x} \right)^2 dx \quad (\text{è un integrale improprio})$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{u(x)^2}{x} \right)' dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \left(\frac{u(x)^2}{x} \right)' dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{u(x)^2}{1} - \frac{u(a)^2}{a} \right] = 9 \quad \text{☺}$$

per l'Hôpital o perché
essendo $u \in C^1$ il num.
è almeno di ordine 2

NULL LAGRANGIAN Si tratta di Lagrangiane del tipo

$$\hat{L}(x, s, p) = A(x, s) p + B(x, s)$$

con la proprietà che A e B sono di classe C^1 e verificano

$$A_x(x, s) = B_s(x, s)$$

Per Analisi 2, sotto ipotesi di semplice connessione della zona di def., vale che esiste $V(x, s)$ t.c.

$$A(x, s) = V_s(x, s)$$

$$B(x, s) = V_x(x, s).$$

Teorema (Calibrazione via null Lagrangian)

Consideriamo un pbm. di min. per un funzionale integrale con DBC e Lagrangiana $L(x, s, p)$.

Sia $u_0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ un candidato p.to di min.

Supponiamo che esista

$$\hat{L}(x, s, p) = A(x, s) p + B(x, s)$$

tale che

(i) $A_x(x, s) = B_s(x, s)$ (cioè $\hat{L}$ è null Lagrangian)

(ii) vale la disug.

$$L(x, s, p) \geq \hat{L}(x, s, p) \quad \forall (x, s, p) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2$$

(iii) vale l'uguaglianza

$$L(x, u_0(x), u'_0(x)) = \hat{L}(x, u_0(x), u'_0(x)) \quad \forall x \in [a, b].$$

Allora $u_0(x)$ è p.to di min.

Dim. Come negli esempi per ogni u ammissibile vale

$$\int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx \geq \int_a^b \hat{L}(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

uso (ii)

$$= \int_a^b A(x, u(x)) \dot{u}(x) + B(x, u(x)) dx$$

defn. $\hat{L}$

$$= \int_a^b [V(x, u(x))] ' dx$$

V è il
potenziale

$$= [V(x, u(x))]_a^b$$

u e u_0
hanno stesse DBCs

$$= [V(x, u_0(x))]_a^b$$

defn. di $\hat{L}$

$$= \int_a^b \hat{L}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx$$

hp (iii)

$$= \int_a^b L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx$$

— o — o —

Oss. Questo non dimostra che $u_0(x)$ è l'unico p.to di min., ma in ogni caso ogni altro p.to di min. $v_0(x)$ deve verificare

$$L(x, v_0(x), \dot{v}_0(x)) = \hat{L}(x, v_0(x), \dot{v}_0(x)) \quad \forall x \in [a, b]$$

Anzi, i p.ti di min. sono tutte e sole le funzioni $v_0(x)$ che soddisfano l'uguaglianza precedente

— o — o —

Ritorno al passato 1

$$L(x, s, p) := A(x) s^2 + 2B(x)sp + C(x) p^2$$

$$\hat{L}(x, s, p) := \left[z(x) s^2 \right]_x = \underbrace{\dot{z}(x) s^2}_{B(x)} + \underbrace{2z(x) sp}_{A(x)}$$

Verifico le 3 ipotesi

$$(i) A_x = B_s : 2\dot{z}(x)s = \dot{z}(x) \cdot 2s \quad (\text{😊})$$

$$(ii) L \geq \hat{L} : \text{vero se } z(x) \text{ è soluzione di (RDE)} \\ (\text{vedi 2 les. precedenti})$$

$$(iii) \text{ vale } = \text{ con } u_0(x) \equiv 0 : \text{ banale}$$

Questo mostra che $u_0(x) \equiv 0$ è p.to di min. per il funzionale quadratico con Lagrangiana $L(x, s, p)$.

Ritorno al passato 2

Supponiamo $L(x, s, p)$ convessa nella coppia (s, p) e consid. la disug.

$$L(x, s, p) \geq L(x, u_0(x), u'_0(x)) + (s - u_0(x)) L_s(x, u_0(x), u'_0(x)) \\ + (p - u'_0(x)) L_p(x, u_0(x), u'_0(x)) \\ =: \hat{L}(x, u_0(x), u'_0(x))$$

Osservo che $\hat{L}$ è della forma voluta con

$$A(x, s) = L_p(x, u_0(x), u'_0(x)) \quad (\text{non dipende nemmeno da } s!)$$

$$B(x, s) = \text{ciò che rimane.}$$

Verifico le ipotesi

$$(iii) \text{ uguaglianza quando metto } u_0(x) \\ (\text{ovvia! si semplifica quasi tutto})$$

(ii) disug. quando uetto $u(x)$ generica
(ovvia dalla disug. di convessità)

(i) $Ax = Bs$ vale se e solo se

$$\frac{d}{dx} L_p(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) = L_s(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$$

cioè se e solo se $u_0(x)$ verifica (ELE).

— o — o —

Torniamo all'esempio iniziale anche fatto nel 1° modo, cioè con

$$p^2 \geq 6p - 9$$

$$A(x, s) \equiv 6 \quad B(x, s) \equiv -9$$

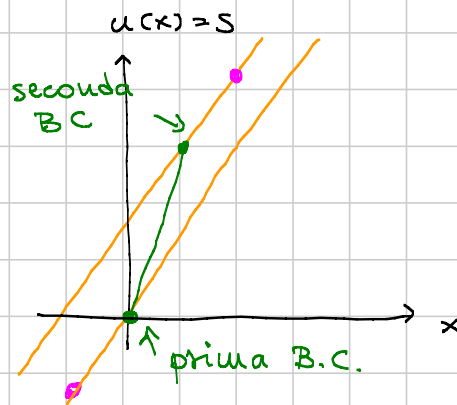
$$V(x, s) = 6s - 9x$$

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \geq \int_0^1 (6u(x) - 9) dx$$

$$= [V(x, u(x))]_0^1 = \text{diff. livelli in } a \text{ e } b.$$

Consideriamo le linee di livello di $V(x, s) : 6s - 9x = \text{cost.}$

Una qualunque altra soluzione
con diverse DBC sulle stesse rette
ha comunque $F(u) \geq 9$
(la differenza degli stessi livelli).



Quindi in realtà la retta $u_0(x) = 3x$
non solo è minimo con DBC

$$u(0) = 0 \text{ e } u(1) = 3,$$

ma lo è con $u(a) = A$ e $u(b) = B$ con (a, A) e (b, B)

che appartengono alle rette. Quindi è minimo per un pbn.
del tipo

curve-to-curve.

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 30

Note Title

14/11/2017

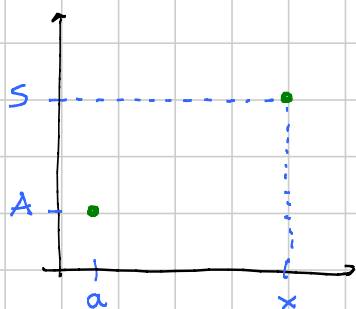
VALUE FUNCTION

Consideriamo il solito p'bm

$$\min \left\{ \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx : u(a) = A, u(b) = B, u \in C^1([a, b]) \right\}$$

Considero un p'bm. più generale, usando la seconda DBC come parametro

$$V(x, s) := \min \left\{ \int_a^x L(t, u(t), \dot{u}(t)) dt : u(a) = A, u(x) = s, u \in C^1([a, x]) \right\}$$



$V(b, B)$ è quello che voglio.

Teorema (Calibrazione via VALUE FUNCTION)

Supponiamo che la $V(x, s)$ definita sopra sia di classe C^1 (occhio: può venire NON C^1 anche se L è di classe C^∞).

Allora

$$\hat{L}(x, s, p) := V_s(x, s) p + V_x(x, s)$$

verifica le ipotesi del teo. di calibrazione.

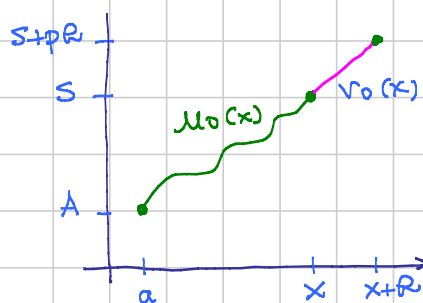
Dim. I coeff. $A(x, s)$ e $B(x, s)$ sono le derivate parziali della $V(x, s)$, quindi (i) è gratis.

(ii) Devo dimostrare che

$$L(x, s, p) \geq V_s(x, s) p + V_x(x, s) \quad \forall (x, s, p) \in \dots$$

Sia $u_0(x)$ il pto di min. relativo al pbm. con dati (x, s) , cioè

$$V(x, s) = \int_a^x L(t, u_0(t), \dot{u}_0(t)) dt$$



Chi realizza il min. con dati $(x+R, s+pR)$?

Un competitore naturale è $u_0(x) + \text{segmento}$

$$V(x+R, s+pR) \leq V(x, s) + \int_x^{x+R} L(t, v_0(t), \dot{v}_0(t)) dt$$

da cui

$$\frac{V(x+R, s+pR) - V(x, s)}{R} \leq \frac{1}{R} \int_x^{x+R} L(t, v_0(t), \underbrace{\dot{v}_0(t)}_{\equiv p}) dt$$

$$(\text{Teo. media integr.}) = L\left(t_0, v_0(t_0), \dot{v}_0(t_0)\right)$$

↑
composto tra x e $x+R$

Passo al limite per $R \rightarrow 0^+$.

$$\text{RHS} \rightarrow L(x, s, p)$$

$$\text{LHS} \rightarrow V_x(x, s) + V_s(x, s)p \quad (\text{derivata direzionale di } V)$$

$\text{LHS} \leq \text{RHS}$ è la disuguaglianza voluta.

(iii) Devo dimostrare che, se $u_0(x)$ realizza il minimo per un certo dato finale (x, s) , allora vale

$$L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) = V_x(x, u_0(x)) + V_s(x, u_0(x)) \dot{u}_0(x)$$

Consideriamo il dato finale

$$(x+R, u_0(x+R)) \quad R < 0.$$

Chi realizza il min. per questo dato finale?

La restrizione di $u_0(x)$!!!

Se ci fosse qualcosa di meglio tra a e $x+R$, potrei usarlo per migliorare il risultato fino a (x, s) !!!

Da qui deduciamo che

$$V(x+R, u_0(x+R)) = \int_a^{x+R} L(t, u_0(t), \dot{u}_0(t)) dt \quad \forall R < 0 \text{ piccolo}$$

Derivo LHS e RHS rispetto ad R , e poi pongo $R=0$

$$V_x(x, u_0(x)) + V_s(x, u_0(x)) \dot{u}_0(x) = L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$$

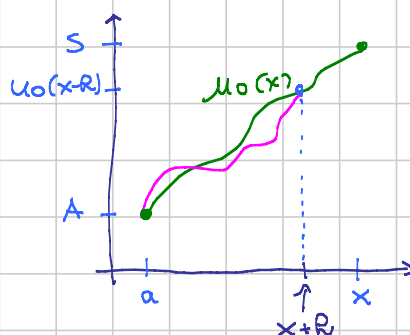
e questa è l'uguaglianza richiesta, che vale su tutta la traiettoria.

— o — o —

Dato $u_0(x)$ candidato min. con DBC $u(a)=A$ e $u(b)=B$, come dimostro che è p.to di min.?

Se mi sento fortunato, o molto bravo, al p.to di sapere trovare il p.to di min. per ogni condizione finale $u(x)=s$, allora calcolo quella che dovrebbe essere $V(x, s)$ e poi verifico a mano che soddisfa la disug. (ii) e l'uguaglianza (iii).

— o — o —



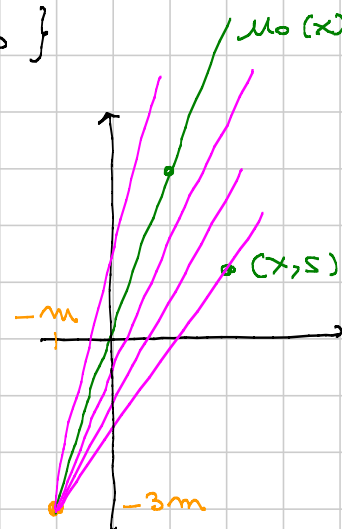
Esempio Solito pbm

$$\min \left\{ \int_0^1 u(x)^2 dx : u(0)=0, u(1)=3 \right\}$$

Considero diverse DBC

$$u(-m) = -3m \quad u(x) = S$$

Congetturo che il minimo sia dato dalla retta congiungente, e quindi



$$V(x, S) = \int_{-m}^x (\text{coeff. ang. retta})^2 dt = \frac{(S+3m)^2}{x+m}$$

$$\frac{(S+3m)^2}{(x+m)^2}$$

Usando questa come $V(x, S)$ trovo $A(x, S)$ e $B(x, S)$, quindi $\hat{L}(x, S, p)$ e faccio le verifiche come alla lezione precedente.

Oss. Se invece di usare come estremo fisso $(-m, -3m)$ usavo direttamente $(0, 0)$ ottengo la calibrazione del terzo modo.

Oss. Mandando $m \rightarrow +\infty$ ottengo il 1° modo che corrisponde alla famiglia di rette //

$$u(x) = 3x + c$$

— o — o —

ECESSO DI WEIERSTRASS Data una Lagrangiana $L(x, s, p)$ si definisce eccesso di W. la funzione di 4 variabili

$$E(x, s, p, q) := L(x, s, q) - L(x, s, p) - (q - p) L_p(x, s, p)$$

(è una specie di diff. tra L ed il suo sviluppo del 1° ordine nella variabile p).

Oss. Talvolta l'eccesso si scrive come

$$E(x, s, p, q) = L(x, s, p+q) - L(x, s, p) - q L_p(x, s, p)$$

(è la stessa cosa con $p+q$ al posto di q).

Condizioni di Weierstrass Sia $u_0(x)$ un candidato per qualcosa.

$$(W) \quad \underbrace{E(x, u_0(x), \dot{u}_0(x), q)}_{\text{dipende da 2 variabili}} \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall q \in \mathbb{R}$$

(W⁺) Esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\underbrace{E(x, s, p, q)}_{\text{dipende da 4 variabili}} \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\forall x \in [a, b], \quad \forall q \in \mathbb{R} \\ &\forall (s, p) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c.} \\ &\quad |s - u_0(x)| \leq \delta \\ &\quad |p - \dot{u}_0(x)| \leq \delta \end{aligned}$$

Condizioni di Weierstrass

già lo sapevamo perché
 $SLM \Rightarrow DLM$

• Necessaria : $u_0(x)$ è SLM $\Rightarrow (E) + (L) + [(L^+) \Rightarrow (J)] + (W)$

• Sufficiente : $(E) + (L^+) + (J^+) + (W^+) \Rightarrow u_0(x)$ è SLM.

Road map per la cond. sufficiente:

$$(E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow (F) \Rightarrow (WRF) \Rightarrow \mu_0 \text{ è SLM.}$$

$\uparrow$ *embedding theorem* $\uparrow$ *se vale (W⁺)*

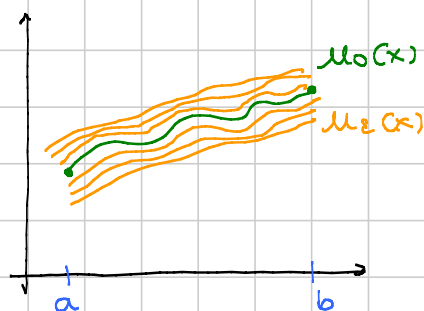
(WRF) Weierstrass representation formula

(F) Field: esistenza di un campo di Weierstrass.

Esiste $\varepsilon_0 > 0$ ed esiste una funzione

$$\mu: [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che



(i) $\mu(0, x) = \mu_0(x)$ per ogni $x \in [a, b]$

(ii) per ogni $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, la funzione $x \rightarrow \mu(\varepsilon, x)$ risolve (ELE)

(iii) per ogni $x \in [a, b]$, la funzione $\varepsilon \rightarrow \mu(\varepsilon, x)$ è strett. crescente.

Brutalmente: $\mu_0(x)$ è immersa in una famiglia di soluzioni di (ELE), ovviamente con DBC diverse.

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 31

Note Title

17/11/2017

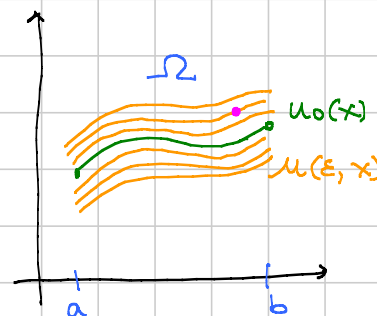
$$(F) \Rightarrow (WRF)$$

(F) esiste $\varepsilon_0 > 0$ ed esiste $u: [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
tale che

$$(i) \quad u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$(ii) \quad x \rightarrow u(\varepsilon, x) \text{ risolve (ELE)} \quad \forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$$

$$(iii) \quad u_\varepsilon(\varepsilon, x) > 0 \quad \forall (\varepsilon, x) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a, b]$$



Pongo $\Omega :=$ immagine di $u(\varepsilon, x)$

SLOPE FUNCTION $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$p(x, s)$ è definita prendendo $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ t.c. $u(\varepsilon, x) = s$
e poi pongo

$$p(x, s) := u_x(\varepsilon, x)$$

↑
dipende da (x, s)

Dalla definizione segue che

$$p(x, u(\varepsilon, x)) = u_x(\varepsilon, x) \quad \forall (\varepsilon, x) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a, b]$$

Oss. L'equazione precedente ci dice che se risolviamo $u' = p(x, u)$
troviamo proprio le funzioni $u(\varepsilon, x)$

Riscrittura di ELE in termini di slope function

$$\frac{d}{dx} L_p(x, u(\varepsilon, x), u_x(\varepsilon, x)) = L_s(x, u(\varepsilon, x), u_x(\varepsilon, x))$$

$$L_{px} + L_{ps} u_x + L_{pp} u_{xx} = L_s$$

Derivando la relazione fondamentale ottengo

$$p_x(x, u(E, x)) + p_s(x, u(E, x)) \underbrace{u_x(E, x)}_p = u_{xx}(E, x)$$

$$p_x + p_s p = u_{xx}$$

Andando a sostituire sopra trovo

$$L_{px} + L_{ps} p + L_{pp} p_x + L_{pp} p_s p = L_s$$

Esercizio Riscrivere le formule precisando gli argomenti delle funzioni e dove variano.

— o — o —

WRF Sia $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 con le stesse DBC di $u_0(x)$.

Allora

$$F(v) - F(u_0) = \int_a^b E(x, v(x), p(x, v(x)), \dot{v}(x)) dx$$

$$\text{dove } E(x, s, p, q) := L(x, s, q) - L(x, s, p) - (q - p) L_p(x, s, p)$$

Ci sono due dimostrazioni : $\rightarrow$ alla Hilbert

$\rightarrow$ alla Weierstrass

Dim alla Hilbert Riscriviamo LHS e RHS

$$F(v) - F(u_0) = \int_a^b L(x, v(x), \dot{v}(x)) dx - \int_a^b L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_a^b L(x, v(x), \dot{v}(x)) dx - \int_a^b L(x, v(x), p(x, v(x))) dx \\ &\quad - \int_a^b (\dot{v}(x) - p(x, v(x))) L_p(x, v(x), \dot{v}(x)) dx \end{aligned}$$

Quindi la tesi è equivalente a

$$\int_a^b L(x, v(x), p(x, v(x))) + (\dot{v}(x) - p(x, v(x))) L_p(x, v(x), p(x, v(x))) dx \\ = \int_a^b L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx \quad (\star)$$

Considero una nuova Lagrangiana

$$\hat{L}(x, s, \underline{p}) = L(x, s, p(x, s)) + (\underline{p} - p(x, s)) L_p(x, s, p(x, s))$$

Osservo che in quello che voglio dire, cioè la $(\star)$, abbiamo

$$\text{LHS} = \int_a^b \hat{L}(x, v(x), \dot{v}(x)) dx$$

$$\text{RHS} = \int_a^b \hat{L}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx \quad (\text{il secondo pezzo si cancella})$$

Per questo basta osservare che $p(x, u_0(x)) = \dot{u}_0(x)$

Osservo anche che

$$\hat{L}(x, s, p) = A(x, s)p + B(x, s), \quad \text{dove}$$

$$A(x, s) = L_p(x, s, p(x, s))$$

$$B(x, s) = L(x, s, p(x, s)) - p(x, s) L_p(x, s, p(x, s))$$

Ci basta dimostrare che $\hat{L}$ è un NULL LAGRANGIAN, cioè che

$$A_x(x, s) = B_s(x, s)$$

Calcolo le derivate

$$A_x = L_p x + L_{pp} p x$$

$$B_s = L_s + \cancel{L_p p_s} - \cancel{p_s L_p} - p L_{ps} - p L_{pp} p_s$$

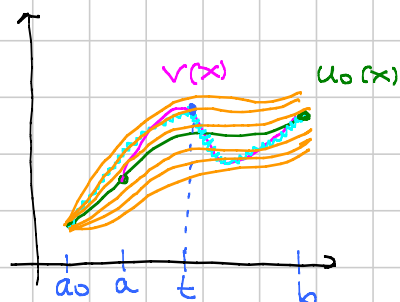
Mi resta da dim che

$$L_p x + L_{pp} p x + L_{ps} p + L_{pp} p p_s = L_s$$

e questa è proprio ELE riscritta in Ω .

Dim. alla Weierstrass

Prendiamo come ipotesi ulteriore che tutte le $u(\varepsilon, x)$ abbiano lo stesso valore per un qualche $a_0 < a$.



Sia $v(x)$ come nella WRF. Per ogni $t \in [a, b]$ considero

$$w: [a_0, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$w(x) = \begin{cases} u(\varepsilon(t), x) & \text{per } x \in [a_0, t] \\ v(x) & \text{per } x \in [t, b] \end{cases}$$

dove $\varepsilon(t)$ è definito in modo tale che

$$u(\varepsilon(t), t) = v(t).$$

Osservo che derivando rispetto a t trovo

$$u_\varepsilon(\varepsilon(t), t) \varepsilon_t(t) + u_x(\varepsilon(t), t) = \dot{v}(t)$$

Poniamo

$$\begin{aligned}\Phi(t) &:= \int_{a_0}^b L(x, w(x), \dot{w}(x)) dx \\ &= \int_{a_0}^t L(x, u(\varepsilon(t), x), u_x(\varepsilon(t), x)) dx \\ &\quad + \int_t^b L(x, v(x), \dot{v}(x)) dx\end{aligned}$$

Calcoliamo

$$\Phi(a) = \int_{a_0}^a L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx + \int_a^b L(x, v(x), \dot{v}(x)) dx$$

$$\Phi(b) = \quad \quad \quad + \int_a^b L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx$$

$$F(v) - F(u_0) = \Phi(a) - \Phi(b) = - \int_a^b \Phi'(t) dt$$

Quindi devo dim. che $\Phi'(t) = -E(t, v(t), p(t, v(t)), \dot{v}(t))$
cioè

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \underbrace{-L(t, v(t), \dot{v}(t))}_1 + \underbrace{L(t, v(t), p(t, v(t)))}_2 + \\ &\quad + \underbrace{(\dot{v}(t) - p(t, v(t))) L_p(t, v(t), p(t, v(t)))}_3\end{aligned}$$

Basta fare una derivata: La derivata di Φ ha 3 termini

→ 2° cut. derivato: $\underbrace{-L(t, v(t), \dot{v}(t))}_1$ ☺

→ 1° cut. risp. estremo: $\underbrace{L(t, u(\varepsilon(t), t), u_x(\varepsilon(t), t))}_2$ ☺
 $\quad \quad \quad \underbrace{v''(t) \quad p(t, v(t))}_{\quad}$

→ so integrale derivato dentro

$$\int_{a_0}^t (L_s u_\varepsilon \varepsilon_t + L_p \underset{''}{u_{x\varepsilon}} \varepsilon_t) dx$$

$\varepsilon_t L_p u_{xx} \leadsto$ integrale per parti

$$= \int_{a_0}^t \underbrace{L_s u_\varepsilon \varepsilon_t - \varepsilon_t (L_p)' u_\varepsilon}_{=0 \text{ per (ELE)}} + [\varepsilon_t L_p u_\varepsilon]_{a_0}^t$$

In $x=a_0$ si ha che $u_\varepsilon \equiv 0$ (tutte le soluzioni passano per lo stesso punto)

Quindi resta solo

$$L_p(\dots) \underbrace{\varepsilon_t u_\varepsilon}_{\substack{\uparrow \\ \text{calcolato} \\ \text{sopra}}} = L_p(\dots) (\dot{v}(t) - u_x(\varepsilon(t), t))$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{3} \\ \text{p}''(t, v(t))}}$

$$L_p(t, u(\varepsilon(t), t), u_x(\varepsilon(t), t))$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{v}''(t) \\ \text{p}''(t, v(t))}}$

— o — o —

Calcolo delle Variazioni —

LEZIONE 32

Note Title

17/11/2017

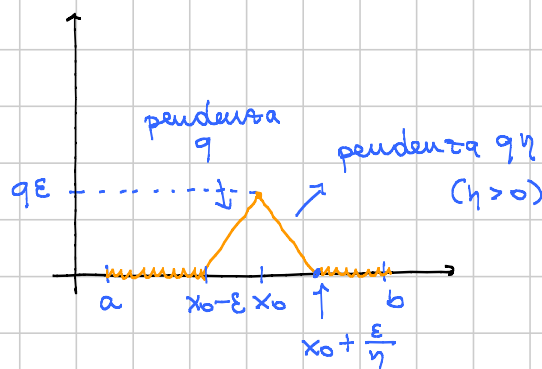
Condizione necessaria di W. per SLM

$$u_0(x) \text{ SLM} \Rightarrow E(x, u_0(x), u'_0(x), q) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall q \in \mathbb{R} \quad (W)$$

Dim. Considero la funzione v_ε come in figura.

Per ε piccolo è a spt. cpt. in $[a, b]$. Considero $u_0 + v_\varepsilon$

Per ε piccolo sta in un intorno C^0 di u_0 dove u_0 è p.to di min.



$$F(u_0 + v_\varepsilon) \geq F(u_0) \text{ e in particolare } \frac{1}{\varepsilon} (F(u_0 + v_\varepsilon) - F(u_0)) \geq 0$$

Vado a calcolare la differenza

$$F(u_0 + v_\varepsilon) - F(u_0) = \text{(gli integrali su 1^\circ \text{ e ultimo pezzo si semplificano)}}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} L(x, u_0(x) + v_\varepsilon(x), u'_0(x) + q) dx + \\ &+ \int_{x_0}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}} L(x, u_0(x) + v_\varepsilon(x), u'_0(x) + q\eta) dx \\ &- \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} L(x, u_0(x), u'_0(x)) dx - \int_{x_0}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}} L(x, u_0(x), u'_0(x)) dx \end{aligned}$$

Divido per ε , uso il teo. della media integrale, poi passo al limite

Il primo integrale diventa

$$L(x_\varepsilon, u_0(x_\varepsilon) + v_\varepsilon(x_\varepsilon), \dot{u}_0(x_\varepsilon) + q) \quad \text{für } x_\varepsilon \in [x_0 - \varepsilon, x_0]$$

Passando al limite viene $L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}(x_0) + q)$.

Trattando in modo analogo gli altri termini, il limite viene:

$$L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0) + q) - L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))$$

$$+ \frac{1}{\eta} L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0) + q\eta) - \frac{1}{\eta} L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))$$

Mettendoli insieme ② e ④ ottengo

$$\frac{L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0) + q\eta) - L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))}{\eta}$$

Passando al limite per $\eta \rightarrow 0^+$ ottengo

$$q \in L_p(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))$$

Considerando che è limite di roba ≥ 0 ottengo proprio (w).

Cond. suff. di Weierstrass per (SLY)

$$(E) + (L^+) + (J^+) + (W^+) \Rightarrow \text{iso}(x) \in \text{SLM}.$$

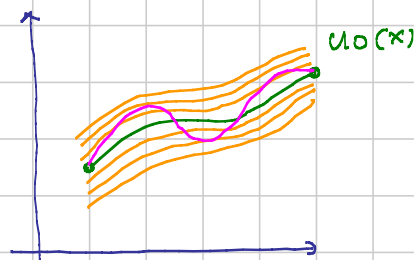
(w⁺) Esiste $\delta > 0$ t.c. $E(x, s, p, q) \geq 0$ per ogni $\uparrow$ totalmente libero

$$(x, s, p, q) \in [a, b] \times \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \begin{cases} |s - u_0(x)| \leq \delta \\ |p - \dot{u}_0(x)| \leq \delta \end{cases}$$

$(WRF) \Rightarrow u_0(x)$ è SLM se vale (W^+)

$$F(v) - F(u_0) =$$

$$= \int_a^b E(x, v(x), p(x, v(x)), \dot{v}(x)) dx$$



Se il campo è abbastanza stretto, cioè il famoso ε_0 è abbastanza piccolo, allora $|v(x) - u_0(x)| \leq \sigma$ e analogamente $|p(x, v(x)) - \dot{u}_0(x)| \leq \sigma$
 derivata della curva del campo che passa per quel punto

La condizione (W^+) ci assicura che l'eccesso è positivo.

— o — o —

Cond. suff. di W segue dalle implicazioni

$$(E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow (F) \quad (\text{EMBEDDING THEOREM}).$$

$$(F) \Rightarrow (WRF)$$

$$(WRF) + (W^+) \Rightarrow u_0 \text{ è SLM}$$

— o — o —

NON DIM. DELL'EMBEDDING THEOREM

Devo trovare famiglia di soluzioni di (ELE) che "circonda" $u_0(x)$.
 Idea: risolvo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (Lp)' = Ls & (ELE) \\ u(\varepsilon, a) = u_0(x) + \alpha \varepsilon \\ u_x(\varepsilon, a) = \dot{u}_0(x) + \beta \varepsilon \end{cases}$$

e spero che le soluzioni $u(\varepsilon, x)$ che ottengo vadano bene.
 L'unica richiesta da verificare è che

$$u_\varepsilon(\varepsilon, x) > 0 \quad \text{in } [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a, b].$$

Per fare questo basta che

$$u_\varepsilon(0, x) > 0 \quad \text{in } [a, b]$$

Si tratta di calcolare la derivata di una soluzione rispetto al dato iniziale.

Dimostrazione non rigorosa: mi aspetto che

$$u(\varepsilon, x) = u_0(x) + \varepsilon w(x) + o(\varepsilon)$$

dove $w(x) = u_\varepsilon(0, x)$. Sostituisco in (ELE) trascurando o piccolo.

$$[L_p(x, u(\varepsilon, x), u_x(\varepsilon, x))] = L_s(x, u(\varepsilon, x), u_x(\varepsilon, x))$$

$$[L_p(x, u_0(x) + \varepsilon w(x), \dot{u}_0(x) + \varepsilon \dot{w}(x))] =$$

$$L_s(x, u_0(x) + \varepsilon w(x), \dot{u}_0(x) + \varepsilon \dot{w}(x))$$

Sviluppo con Taylor in ε :

$$[L_p(x, u_0, \dot{u}_0) + L_{ps}(x, u_0, \dot{u}_0) \varepsilon w + L_{pp}(x, u_0, \dot{u}_0) \varepsilon \dot{w}] =$$

$$= L_s(x, u_0, \dot{u}_0) + L_{ss}(x, u_0, \dot{u}_0) \varepsilon w + L_{sp}(x, u_0, \dot{u}_0) \varepsilon \dot{w}$$

I termini senza ε sono uguali per (ELE). Quando impongo l'uguaglianza tra gli altri

$$[L_{ps}(x, u_0, \dot{u}_0) w + L_{pp}(x, u_0, \dot{u}_0) \dot{w}] = L_{ss}(x, u_0, \dot{u}_0) w + L_{sp}(x, u_0, \dot{u}_0) \dot{w}$$

$\underbrace{\quad}_{B_0''(x)} \quad \underbrace{\quad}_{C_0''(x)} \quad \underbrace{\quad}_{A_0''(x)} \quad \underbrace{\quad}_{B_0''(x)}$

Risultato : w risolve (JDE) per il funzionale quadratico i cui coeff. sono quelli di $\delta^2 F(u_0, r)$

Scoperta : $u_\varepsilon(0, x)$ è la soluzione di (JDE) con dati iniziali $w(a) = \alpha$ e $\dot{w}(a) = \beta$.

Quindi cercare $u_\varepsilon(0, x) > 0$ in $[a, b]$ è equivalente a cercare una soluzione di (JDE) che non si annulla mai in $[a, b]$.

Questa è la condizione (J^{++}) , e avevamo visto che era implicata da (L^+) e (J^+) .

— o — o —

Se volessi un campo con in più $u(\varepsilon, a_0)$ fisso per ogni $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Basterebbe risolvere

(ELE)

$u(\varepsilon, a_0) = u_0(a_0)$ ← suppongo di aver esteso $u_0(x)$ "indietro"

$u_x(\varepsilon, a_0) = \dot{u}_0(a_0) + \varepsilon$

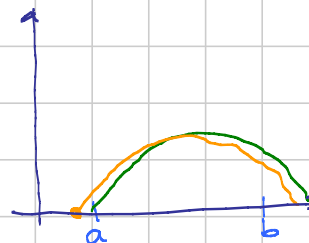
Quando calcolo $u_\varepsilon(0, x)$ questa viene la soluz. della (JDE) con dati $w(a_0) = 0$, $\dot{w}(a_0) = 1$, ma grazie a (L^+) e (J^+) sappiamo che per a_0 vicino ad a questa non si annulla in $[a, b]$.

— o — o —

Oss. Con gli stessi ragionamenti si ottiene la derivata di

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

rispetto al parametro α . (Vedi conti anni precedenti)



Esercizio Vedere che nell'esempio di WLM che non è SLM la cond. (w) e (w^+) falliscono.

IMPORTANTE Se L è convessa in p , allora

$$E(x, s, p, q) \geq 0 \quad \text{SEMPRE}$$

— o — o —

Calcolo delle Variazioni

-

LEZIONE 33

Note Title

21/11/2017

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGEAnalisi 2 Supponiamo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f: B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g: B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni date, diciamo di classe C^1 . Poniamo

$$V := \{ x \in B_r(x_0) : g(x) = g_0 \}$$

$\uparrow$ costante

e supponiamo $g(x_0) = g_0$ e x_0 sia p.to di min/max per f ristretta a V .

Allora accade almeno una delle seguenti 2 possibilità

$$(1) \nabla g(x_0) = 0,$$

$$(2) \text{ esiste } \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

Oss. La (2) è equivalente a dire che x_0 è p.to stazionario (non vincolato) per la funzione di $n+1$ variabili

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

 $\uparrow$ n var. $\uparrow$ 1 var.

— o — o —

Con i funzionali vale un risultato analogo.

Setting : problemi di minimo vincolato del tipo

$$\min \{ F(u) : u \in \text{certa classe con o senza BC e } G(u) = G_0 \}$$

 $\uparrow$
funzionale da
minimizzare $\uparrow$
vincolo che
coinvolge un
funzionale

$$\min \left\{ \int_0^1 u^2 dx : u(0) = 7, \int_0^1 u^4 dx = 8 \right\}$$

Teorema Sotto ipotesi ragionevoli (esistenza delle variazioni prime), se u_0 è un p.to di min., allora vale almeno una delle seguenti 2 possibilità:

- (1) $\delta G(u_0, v) = 0$ per ogni $v \in C_c^\infty$ (o comunque ammissibile)
 (2) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v) \quad \forall v \in C_c^\infty \quad (\dots)$$

è il moltiplicatore di Lagrange ed è lo stesso per ogni v ammissibile

Oss. La (2) è come dire che $\delta \Phi(u_0, v) = 0$ per ogni v ammissibile, dove

$$\Phi(u) = F(u) - \lambda G(u).$$

Lemma (trivial) Se u_0 è p.to stazionario per $\Phi(u)$ ed è un p.to di min. per $\Phi(u)$, allora u_0 è p.to di min. per il problema vincolato (COND. SUFF. MA NON NEC.)

Dim. Prendo una qualunque w che soddisfi il vincolo, cioè

$$G(w) = G_0 = G(u_0).$$

Allora

$$F(w) = \underbrace{\Phi(w)}_{\text{defn. di } \Phi(w)} + \underbrace{\lambda G(w)}_{\text{uguale}} \geq \underbrace{\Phi(u_0)}_{\substack{\Phi(w) \geq \Phi(u_0) \text{ perché } u_0 \text{ è} \\ \text{p.to di min}}} + \underbrace{\lambda G(u_0)}_{\substack{G(w) = G(u_0)}} = F(u_0)$$

— o — o —

Dim. mult. Lagrange: $\rightarrow$ via teo. funzione implicita
 $\rightarrow$ via teo. funzione inversa
 $\rightarrow$ via penalizzazione (vedi les. sulla Gamma-convergenza)

Dim. via funz. implicita Se $\delta G(u_0, v) = 0$ sempre, allora non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo allora che esista w ammissibile t.c.

$$\delta G(u_0, w) \neq 0.$$

Poniamo

$$\begin{aligned} f(t, s) &:= F(u_0 + tv + sw) \\ g(t, s) &:= G(u_0 + tv + sw) \end{aligned}$$

dove w è quella di sopra e v è una qualunque altra variazione ammissibile.

Osservo che

$$\begin{aligned} g(0, 0) &= G(u_0) = G_0 \\ g_s(0, 0) &= \delta G(u_0, w) \neq 0. \end{aligned}$$

Per il teo. delle funz. implicite posso ricavare s , cioè esiste

$$s: (-\delta_0, \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $s(0) = 0$ e $g(t, s(t)) = G_0$. Questo dice che $u_0 + tv + s(t)w$ è un competitor per ogni $t \in (-\delta_0, \delta_0)$ e quindi

$$\frac{d}{dt} F(u_0 + tv + s(t)w) = \frac{d}{dt} f(t, s(t)) = 0 \text{ per } t=0$$

Questa è

$$f_t(0, 0) + s'(0) f_s(0, 0)$$

$\begin{array}{ccc} \text{"} & & \text{"} \\ \delta F(u_0, v) & \uparrow & \delta F(u_0, w) \end{array}$

si calcola con teo. funz. implicite

$$s'(0) = - \frac{g_t(0,0)}{g_s(0,0)} = - \frac{\delta G(u_0, v)}{\delta G(u_0, w)}$$

Quindi

$$\delta F(u_0, v) - \frac{\delta G(u_0, v)}{\delta G(u_0, w)} \cdot \delta F(u_0, w) = 0$$

da cui

$$\delta F(u_0, v) = \boxed{\frac{\delta F(u_0, w)}{\delta G(u_0, w)}} \cdot \delta G(u_0, v)$$

"
λ involip.

da v.

— o — o —

Dim. via teo. funzione inversa

Come prima arriviamo a definire w , $f(t, s)$, $g(t, s)$

Costruisco la funzione

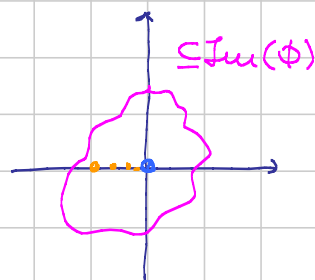
$$\Phi(t, s) := (f(t, s) - f(0, 0), g(t, s) - g_0)$$

Osservo che Φ è definita in un intorno di $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ ed è a valori in $\mathbb{R}^2$. Osservo anche

$$\Phi(0, 0) = (0, 0)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} J\Phi(0, 0) &= \begin{pmatrix} f_t(0, 0) & f_s(0, 0) \\ g_t(0, 0) & g_s(0, 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta F(u_0, v) & \delta F(u_0, w) \\ \delta G(u_0, v) & \delta G(u_0, w) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Supponiamo che $J\Phi(0,0)$ abbia rango 2. Allora è invertibile in un intorno dell'origine, ed in particolare l'immagine contiene un intorno di $(0,0)$.

In particolare esiste una successione $(t_n, s_n) \rightarrow (0,0)$ tale che

$$\Phi(t_n, s_n) = \left(-\frac{1}{n}, 0\right) \text{ definitivamente}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ g(t_n, s_n) = 0, \text{ cioè} \\ G(u_0 + t_n v + s_n w) = G_0 \end{array}$$

$$\Phi(t_n, s_n) = \Phi(0,0) - \frac{1}{n}$$

$$F(u_0 + t_n v + s_n w) = F(u_0) - \frac{1}{n}$$

e questo lega che u_0 sia p.to di min. locale ristretto al vincolo.

Allora $J\Phi(0,0)$ non può avere rango = 2, quindi ha $\det = 0$, e si ottiene la stessa relazione della dim. precedente.

— o — o —

Esercizio Estendere la dim. precedente al caso di più vincoli.

— o — o —

Esempio classico (legato ai funz. quadratici $\int_0^1 \dot{u}^2 - c \cdot u^2$)

$$\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2 dx}_{F(u)} : u(0) = u(1) = 0, \underbrace{\int_0^1 u^2 dx = 1}_{G(u)} \right\}$$

Volendo con un metodo diretto si vede che il minimo esiste, ma per ora diamolo per buono.

Esaminiamo le 2 possibilità. Sia u_0 un p.to di min.

$$\boxed{1} \quad \delta G(u_0, v) = 0 \text{ sempre}$$

(ELE) di G

$(2\ddot{u})' = 0$, cioè $\ddot{u} = 0$, cioè la retta. Date le BC l'unica retta compatibile è $u_0(x) \equiv 0$, che però non verifica il vincolo.

$$\boxed{2} \quad \delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v) \text{ per ogni } v \text{ ammissibile, o equivalentemente}$$

$$\delta(F - \lambda G)(u_0, v) = 0$$

(ELE) di $F - \lambda G$

$$(2\ddot{u})' = 2\lambda u \rightsquigarrow \ddot{u} = \lambda u$$

Ora devo trovare le soluzioni di

$$\begin{cases} \ddot{u} = \lambda u \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \\ \int_0^1 u^2(x) dx = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3 \text{ costanti da determinare e } 3 \\ \text{equazioni} \end{array}$$

Occorrerebbe sapere il segno di λ . Moltiplico la 1ª per u !

$$u \ddot{u} = \lambda u^2 \rightsquigarrow \text{per parti} \quad - \int_0^1 \underbrace{\ddot{u}^2}_{\text{BCs}} = \int_0^1 u \ddot{u} = \lambda \int_0^1 u^2$$

$\rightsquigarrow \lambda < 0 \rightsquigarrow$ le soluzioni sono del tipo

$$u(x) = \underbrace{c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} x)}_{0 \text{ per BC}} + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} x) \quad \sqrt{-\lambda} = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ (per BC)}$$

$u(x) = c_2 \sin(k\pi x)$ e si vede che quella che realizza il min. è quella con $k=1$.

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 34

Note Title

21/11/2017

Funzionali integrali con integrali multipli

$$F(u) = \int_{\Omega} \underbrace{(u_x^2 + u_y^2)}_{|\nabla u|^2} dx dy$$

↑
funzionale
di Dirichlet

dove $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ma $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

Ora DBC vuol dire assegnare i valori di u su tutta $\partial\Omega$.

Oss. In dim. > 1 i valori di u in p.ti singoli non vengono presi in considerazione dal funzionale.
Ad esempio, se consideriamo

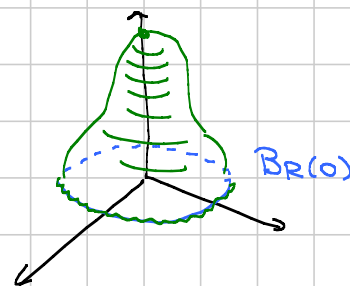
$$\min \{ F(u) : u \in C^1(B_R(0)) \text{ e } u(0,0) = 2017 \}$$

↑
quello di prima con
 $\Omega = \text{cerchio}$

$\text{e } u(x,y) = 0 \text{ su } \partial B_R(0)$

Quello che succede è che $\inf = 0$!!!

Esercizio: costruire una succ.
minimizzante, cioè t.c.
 $F(u_n) \rightarrow 0$.



Moralmente: le condizioni, per essere viste, devono essere assegnate su insiemi di dimensione almeno $n-1$.

— o — o —

Metodo indiretto per funzionali con integrali multipli

Nell'esempio di sopra, considero $\varphi(t) := F(u_0 + tv)$
con v nulla al bordo

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_{\Omega} |\nabla(u_0 + tv)|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_0 + t \nabla v|^2 \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 + 2t \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle + t^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2\end{aligned}$$

Derivo e sostituisco $t=0$ e trovo

$$\delta F(u_0, v) = 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle \quad \forall v \in \dots$$

1ª forma
integrale di
ELE

Analisi 2 : Gauss - Green

normale esterna a $\partial\Omega$

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle$$

dove f è una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

e $\vec{E}$ è una funzione vettoriale $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$

Applico Gauss-Green con $f := v$, $\vec{E} := \nabla u_0$. Ottengo

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle = \int_{\partial\Omega} \underbrace{v}_{=0} \langle \nabla u_0, \vec{n} \rangle d\sigma - \int_{\Omega} v \cdot \underbrace{\operatorname{div}(\nabla u_0)}_{\Delta u_0}$$

Quindi

$$\delta F(u_0, v) = -2 \int_{\Omega} \Delta u_0 v \, dx$$

2ª forma
integrale di
ELE

Applicando FLCV (stessa dim. in qualunque dimensione):

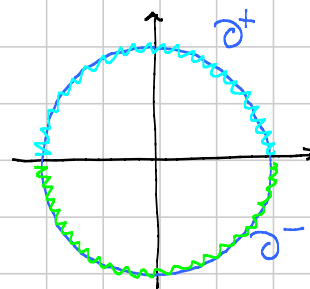
$$\delta F(u_0, v) = 0 \quad \forall v \in \dots \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u_0 = 0$$

In conclusione abbiamo trovato

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{in } \Omega & \text{(ELE) differenziale} \\ u_0(x) = \text{date} & \text{su } x \in \partial\Omega & \text{DBC} \end{cases}$$

1a variante Cosa accade se non metto DBC, o se ne metto solo un po'.

Esempio $\Omega = B_R(0,0)$



$$\min_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} u_x^2 + u_y^2 : u(x,y) = x^2 \text{ su } \partial^+ \right\}$$

Procediamo come prima e arriviamo a

$$\delta F(u_0, v) = 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle \quad \forall v \in C^\infty \text{ e nulla su } \partial^+$$

Integro per parti con G.G. e trovo

$$\delta F(u_0, v) = -2 \int_{\Omega} \Delta u_0 \cdot v + \int_{\partial\Omega} v \cdot \langle \nabla u_0, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Supponiamo u_0 p.to di min. Limitandoci alle $v \in C_c^\infty$ si annulla il termine di bordo e al solito modo si arriva a

$$\Delta u_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{(ELE) differenziale.}$$

Ora considerando le v più generali troviamo

$$\int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u_0, \vec{n} \rangle d\sigma = 0 \quad \forall v \in C^\infty \text{ e nulla su } \partial^+$$

Ora si applica una specie di FLCV su ∂^- e si deduce che

$$\langle \nabla u_0, \vec{n} \rangle = 0 \quad \text{su } \partial^-$$

$$\parallel \frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}}$$

(derivata direzionale di u_0 nella direzione $\vec{n}$)

Abbiamo quindi trovato le condizioni

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{in } \Omega & \text{ELE diff. dentro} \\ u_0 = x^2 & \text{su } \partial^+ & \text{DBC imposta all'inizio} \\ \frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{su } \partial^- & \text{NBC nota strada facendo} \\ & & \text{(derivata normale nulla dove non} \\ & & \text{avevamo imposto DBC)} \end{cases}$$

Oss. Ammesso di saper risolvere il pbm, posso dire al solito modo che si tratta di un p.to di min. (in realtà pure unico)

Sia w un altro competitore. Pongo $v := w - u_0$. Allora

$$F(w) = F(u_0 + v) = \underbrace{\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2}_{F(u_0)} + 2 \underbrace{\int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle}_0 + \underbrace{\int_{\Omega} |\nabla v|^2}_{\geq 0}$$

perché è la 1ª forma integrale di ELE

(nullo $\Leftrightarrow v \equiv 0$)

2ª variante

$$F(u) := \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

$\uparrow$ vettore $L(x, s, p_1, \dots, p_m)$

Come sempre pongo $\varphi(t) := F(u_0 + t v)$ e derivando trovo

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} L(x, u_0(x) + t v(x), \nabla u_0(x) + t \nabla v(x)) dx$$

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 35

Note Title

24/11/2017

Rivisitazione teoremi semicontinuità e compattezza

Parole chiave : $\rightarrow$ convergenza debole in $L^p((a,b))$
 $\rightarrow$ ipotesi di crescita

Esempio $\min \left\{ \int_0^7 u^4 + u^3 : u(0) = u(7) = 0 \right\}$

Oss. La funzione $u_0(x) \equiv 0$ non è p.to di minimo, anzi non è nemmeno WLM e nemmeno DLM.

Prendiamo qualunque v che si annulla in 0 e 7 e ≥ 0 altrove, ad esempio

$$v(x) = x(7-x)$$

Allora

$$F(-tv) = t^4 \int_0^7 v^4 dx - t^3 \int_0^7 v^3 dx$$

$\uparrow$
costante

per $t > 0$ piccoli $F(-tv) < 0$.

Proviamo ad impostare il metodo diretto.

Speranza : da $F(u) \leq M_1$ dedurre $\int_0^7 u^4 \leq M_2$

Al solito modo, se controllo $\|u\|_{L^4}$, allora controllo la costante di $\frac{3}{4}$ -Hölder di u ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_{L^4} |x - y|^{3/4}$$

Grazie alle BC deduciamo $|u(x)| \leq 7^{3/4} \|u\|_{L^4}$

da cui

$$\left| \int_0^7 u^3(x) dx \right| \leq 7^{\frac{9}{4}} \cdot 7 \|u\|_{L^4}^3$$

Da qui si conclude al solito modo

$$\begin{aligned} M \geq F(u) &= \|u\|_{L^4}^4 + \int_0^7 u^3(x) dx \\ &\geq \|u\|_{L^4}^4 - 7 \cdot 7^{\frac{9}{4}} \|u\|_{L^4}^3 \end{aligned}$$

Basta osservare che $\varphi(s) = s^4 - \text{cost } s^3$ tende a $+\infty$ per $s \rightarrow \pm\infty$, quindi da una stima su $\varphi(s)$ deduco una stima s .

$$F(u) \leq M \quad \Rightarrow \quad \|u\|_{L^4} \leq M_2$$

— o — o —

Da una stima L^4 posso dedurre una stima L^2

Dim. $x^2 \leq x^4 + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (senza entrambi)

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \int_a^b (f(x)^4 + 1)$$

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^4}^4 + (b-a)$$

$$\leadsto \|u\|_{L^2} \leq M_3$$

Quindi per compattezza debole abbiamo

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_k \rightarrow v_0 \text{ in } L^2$$

Usando Ascoli - Arzelà come sempre arriviamo a, eventualmente passando ancora a S. succ.,

$$\mu_{m_k} \rightarrow \mu_\infty \quad \text{unif. in } [a,b]$$

$$\mu_{m_k} \rightarrow \mu_\infty \quad \text{debole in } L^2$$

Domande: ① $\mu_\infty \in L^4((0, \pi))$?

$$\text{② vale la sci: } \liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \mu_{m_k}^4 \geq \int_0^\pi \mu_\infty^4 ?$$

Cowvergenza debole in $L^p(a,b)$

Def Sia $f_m \in L^p(a,b)$ una succ. e sia $f_\infty \in L^p(a,b)$ un'altra funzione.

Si dice che

$$f_m \rightarrow f_\infty \quad \text{in } L^p(a,b)$$

se

$$\int_a^b f_m(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_a^b f_\infty(x) \varphi(x) dx$$

per ogni $\varphi \in L^q(a,b)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Oss. Vale anche se $p=1$ e $q=+\infty$.

Oss. Più aumento p , più diminuisco q , quindi aumento le funzioni test ammissibili, quindi convergere debolmente diventa più difficile.

ERGO: la conv. più debole di tutte è la debole L^1
(ha solo funzioni test L^∞)

— o — o —

Teorema Supponiamo che

$$v_n \longrightarrow v_\infty \quad \text{debole in } L^1(a,b)$$

Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi(v_n(x)) dx \geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx.$$

Dim. in un caso speciale Supponiamo in aggiunta $\psi \in C^1$ e $\psi'(p)$ limitata.

Uso la disuguaglianza

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a)b \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b \psi(v_n(x)) dx = \int_a^b \psi(v_\infty(x) + \underbrace{v_n(x) - v_\infty(x)}_b) dx$$

$$\geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx + \int_a^b \underbrace{\psi'(v_\infty(x))}_{\substack{\uparrow \\ \text{funzione test} \\ L^\infty}} \underbrace{(v_n(x) - v_\infty(x))}_{\substack{\uparrow \\ \text{tende a 0} \\ \text{debole in } L^1}} dx$$

Passando al limite ho
la tesi.

— o — o —

Dim. caso generale Approssimo ψ dal basso con una famiglia di funzioni ψ_ε convesse, C^1 , con derivata limitata

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi(v_n(x)) dx &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_\varepsilon(v_n(x)) dx \\ &\geq \int_a^b \psi_\varepsilon(v_\infty(x)) dx \end{aligned}$$

Concludo con Beppo Levi se $\psi_\varepsilon \nearrow \psi$ crescendo.

Tornando all'esempio, ora sappiamo che

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_a^b e_{i_{n_k}}(x)^4 dx \geq \int_a^b e_{i_\infty}(x)^4 dx$$

Questo risponde alle 2 domande.
— o — o —

Domanda: è vero che $e_{i_{n_k}} \rightarrow e_{i_\infty}$ in $L^4((0, \pi))$?

Prop. Sia f_n una successione e sia f_∞ una funzione.

Supponiamo che

(i) $\|f_n\|_p \leq M$ (limitate in L^p)

(ii) $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^1 (conv. debole L^1)

Allora $f_\infty \in L^p$ e $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^p .

Dim. L'appartenenza ad L^p è conseguenza del tes. prec. con $\psi(x) = |x|^p$.

Per verificare la conv. debole L^p , prendo una funzione test $\varphi \in L^q$.

Approssimo φ in L^q con una funzione $\varphi_\varepsilon \in L^\infty$.

Vediamo cosa succede

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n(x) \varphi(x) &= \int_a^b f_n(x) \varphi_\varepsilon(x) + \underbrace{\int_a^b f_n(x) (\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x))}_{\text{in valore assoluto } \leq} \\ &\leq \|f_n\|_{L^p} \cdot \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \\ &\leq M \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \end{aligned}$$

Allo stesso modo ottengo

$$\int_a^b (f_n - f_\infty) \varphi = \int_a^b (f_n - f_\infty) \varphi_\varepsilon + \underbrace{\int_a^b (f_n - f_\infty) (\varphi - \varphi_\varepsilon)}_{\substack{\downarrow \\ \text{perché } \varphi_\varepsilon \in L^\infty}} \leq \|f_n - f_\infty\|_{L^p} \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \leq 2M \cdot \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q}$$

$$\text{Ho usato che } \|f_n - f_\infty\|_{L^p} \leq \|f_n\|_{L^p} + \|f_\infty\|_{L^p} \leq M + M = 2M$$

segue dal ko. precedente

La conclusione è standard:

• dato $\varepsilon > 0$, scelgo φ_ε in modo tale che $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \leq \varepsilon$

• poi scelgo n abbastanza grande in modo che

$$\left| \int_a^b (f_n - f_\infty) \varphi_\varepsilon \right| \leq \varepsilon$$

$$\text{Per questi } n \text{ vale } \underbrace{|LHS|}_{\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}} \leq \varepsilon + 2M\varepsilon.$$

Con il senno di poi

$$(a+b)^4 \geq a^4 + 4a^3b \quad (\text{solita convessità})$$

$$\begin{aligned} \int_a^b u_n(x)^4 &= \int_a^b \overbrace{(u_\infty + u_n - u_\infty)}^{\substack{a \quad b}}^4 \\ &\geq \int_a^b u_\infty^4 + 4 \int_a^b \underbrace{u_\infty^3}_{\uparrow} \cdot \underbrace{(u_n - u_\infty)}_{\substack{\uparrow \\ \text{tende a 0 debole } L^4}} \end{aligned}$$

per puro caso 😊 questo sta in $L^{4/3}$ e quindi tutto questo integrale tende a 0.

Occhio! Questa dimostrazione usa già di sapere che $\ell_\infty \in L^4$, cosa che abbiamo dimostrato passando attraverso l'approx. dal basso con le convergenze con derivata limitata.

— o — o —

Oss. finale Abbiamo dimostrato (basandosi su L^2) che ogni succ. f_n limitata in L^p con $p \geq 2$ ha una s.succ. che converge debole L^2 , ma anche debole L^p , ad una certa f_∞ .

— o — o —

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 36

Note Title

24/11/2017

I POTESI DI CRESCITA

Def. Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che

- ψ ha crescita superlineare se

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\psi(p)}{p} = \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{\psi(p)}{|p|} = +\infty$$

- ψ ha crescita almeno quadratica se

$$\liminf_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{\psi(p)}{p^2} > 0$$

Oss. Si ha che ψ ha crescita almeno quadratica se e solo se esistono A e B reali t.c. $A > 0$ e

$$\psi(p) \geq Ap^2 - B \quad \forall p \in \mathbb{R} \quad (\text{c'è una parabola sotto})$$

Fatto vero (una cosa banale) Se ψ ha crescita superlineare e

$$\int_a^b \psi(f_n(x)) dx \leq M$$

allora f_n ammette almeno una s.succ. che converge debolmente in $L^1((a,b))$.

Fatto vero (una più semplice) Lo stesso supponendo crescita almeno quadratica (ci si basa su L^2 e si ottiene L^2 debole)

Oss. $\psi(p) = |p| \log(1+|p|)$ è superlineare.

Torniamo all'esempio

$$\min \left\{ \int_0^{\tau} (u^4 + u^3) dx : u(0) = u(\tau) = 0 \right\}$$

Ora sappiamo che esiste almeno un p.to di min

$$u_0 \in W^{1,4}((0,\tau)).$$

Possiamo ottenere più regolarità? C^∞ ?

Ricaviamo (ELE) in forma debole

$$\varphi(t) := F(u+tv) \quad \text{e calcoliamo } \varphi'(t)$$

Possiamo derivare sotto il segno di integrale?

$$\varphi(t) = \int_0^{\tau} (u+tv)^4 + (u+tv)^3$$

$$\leadsto \varphi'(t) = \int_0^{\tau} 4(u+tv)^3 v + 3(u+tv)^2 v$$

In generale questo è vero se si ha una dominazione sulla derivata. Sulla ponte con u e v non ci sono pbm. perché è tutto C^0 .

Ammettendo di prendere $v \in C^\infty$, basta saper controllare

$$\int_0^{\tau} |u|^3 \quad \text{e questo si controlla con } \int_0^{\tau} u^4$$

grazie alla solita $|x|^3 \leq x^4 + 1.$

$$\delta F(u, v) = \int_0^{\tau} 4u^3 v + 3u^2 v = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((0,\tau))$$

Questo è come dire che

$$(4u^3)' = -3u^2$$

Da qui segue che il RHS è continuo, quindi $4u^3$ ha la derivata continua, quindi è C^1 , e quindi

$$4u^3 \in C^1$$

In particolare $4u^3 \in C^0$ e quindi $u \in C^0$ e quindi $u \in C^1$

Achtung! Se $f^3 \in C^1$, possiamo dedurre che $f \in C^0$,
ma non che $f \in C^1$.

Possiamo però dire che $f \in C^1$ nell'aperto in cui non si annulla

$$f^3 = g \in C^1 \quad A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

Allora $f \in C^1(A)$ (composizione di funzioni C^1)

Nel nostro caso $u \in C^2$ (della zona in cui $u \neq 0$).
Lì posso derivare e ottengo

$$(4u^3)' = 3u^2 \quad \leadsto \quad 12u^2 u' = 3u^2 \quad \leadsto \quad u' = \frac{u^2}{4u^2}$$

$\leadsto$ per bootstrap si conclude che $u \in C^\infty$ dove la sua derivata non si annulla.

Tuttavia, un pto in cui u si annulla esiste!!!

Lemma (analisi 1) Se $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $|f(x)|^\alpha$ è Lipschitziana per un qualche $\alpha > 1$, allora f è $\frac{1}{\alpha}$ -Hölder.

Nel nostro caso abbiamo dim. che $(4u^3)' = 3u^2$

$\leadsto u \in C^0 \leadsto u$ è lip $\leadsto 3u^2$ è lip $\leadsto$
 la sua primitiva lo è a maggior ragione $\leadsto 4u^3$ è
 lip $\leadsto u$ è $\frac{1}{3}$ -Hölder.

$\leadsto u \in C^{1, \frac{1}{3}}([0, \pi])$ (C^1 con derivata $\frac{1}{3}$ -Hölder)

Si potrebbe dimostrare che questa è la regolarità ottimale, cioè

$$u \notin C^{1, \alpha}([0, \pi]) \quad \forall \alpha > \frac{1}{3}.$$

La perdita di regolarità è dovuta ad avere L_{pp} che si può annullare. Se $L_{pp} > 0$ sempre, allora il bootstrap ci porta fin dove si può

$$[L_p(x, u, u)]' = L_s(x, u, u)$$

$$L_{px}(x, u, u) + L_{ps}(x, u, u)u' + L_{pp}(x, u, u)u'' = L_s(x, u, u)$$

Se $L_{pp} > 0$ sempre, allora posso ricavare u'' in funzione del resto, ed è fatta.

I passi iniziali sono i soliti

- $u \in L^2 \leadsto u \in C^0 \leadsto \text{RHS} \in L^2 \leadsto L_p(x, u, u) \in C^0$
 $\leadsto$ (se $L_{pp} > 0$) posso ricavare $u' \in C^0 \leadsto \text{RHS} \in C^0$
 $\leadsto \text{LHS} \in C^1 \leadsto$ posso ricavare $u \in C^1 \leadsto \text{RHS} \in C^1$
 e così via.

— o — o —

Esempio

$$\min \left\{ \int_0^{\pi} (1+u^4) u'^2 + \sin u : u(0)=u(\pi)=0 \right\}$$

① $u_0(x) \equiv 0$ è minimo?

NO! Non risolve nemmeno (ELE)

② Esiste il minimo?

Sì! Metodo diretto

La compattatezza è quasi gratis

$$M \geq F(u) \geq \int_0^{\pi} u'^2 - 1 \geq \int_0^{\pi} u'^2 - \pi$$

$$\leadsto F(u) \leq M \Rightarrow \|u\|_{L^2}^2 \leq M + \pi$$

La SCI è più delicata. Sul $\sin u$ è banale. Mi serve che

$$\liminf \int_0^{\pi} (1+u_n^4) u_n'^2 \geq \int_0^{\pi} (1+u_\infty^4) u_\infty'^2$$

$$(1+u_n^4) u_n'^2 = (1+u_\infty^4) u_\infty'^2 + (u_n^4 - u_\infty^4) u_n'^2$$

Il secondo termine, quando integrato, tende a 0.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} (u_n^4 - u_\infty^4) u_n'^2 \right| &\leq \int_0^{\pi} |u_n^4 - u_\infty^4| \cdot |u_n'|^2 \\ &\leq \underbrace{\|u_n^4 - u_\infty^4\|_{L^\infty}}_{\downarrow 0} \underbrace{\int_0^{\pi} |u_n'|^2}_{\text{limitato}} \end{aligned}$$

L'altro termine lo riscivo con la solita stima

$$\begin{aligned} \int_0^T (1+u_\infty^4) \dot{u}_m^2 &= \int_0^T (1+u_\infty^4) (\dot{u}_\infty + \dot{u}_m - \dot{u}_\infty)^2 \\ &\geq \int_0^T (1+u_\infty^4) \dot{u}_\infty^4 + \int_0^T \underbrace{(1+u_\infty^4) \dot{u}_\infty}_{\substack{\downarrow \\ \text{se questo è fisso} \\ \text{in } L^2, \text{ allora ok, e} \\ \text{lo è essendo prodotto di} \\ \text{roba continua per } L^2}} (\dot{u}_m - \dot{u}_\infty) \end{aligned}$$

Oss. Questo andava bene per

$$\int_a^b f(x, u(x)) |u|^\rho$$

purché $\rho > 1$ (superlineare) e f continua e ≥ 0 .

— o — o —

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 37

Note Title

27/11/2017

Estensione per rilassamento

$$F(u) := \int_a^b \psi(u) dx \quad \begin{array}{l} \forall u \in C^1([a,b]) \\ \forall u \in C^\infty([a,b]) \end{array}$$

Obiettivo: estendere F a tutto L^2 per rilassamento. L'estensione sotto certe ipotesi è

$$\hat{F}(u) := \begin{cases} \int_a^b \psi(u) dx & \text{se } u \text{ è spazio di Sobolev} \\ & \text{opportuno} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\uparrow$
deriv. debole

Teorema Supponiamo $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia

- (i) convessa (quindi in particolare continua)
- (ii) superlineare, cioè

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{\psi(p)}{|p|} = +\infty$$

Allora $\hat{F}(u)$ è il rilassato di $F(u)$ rispetto, ad esempio, alla metrica di $L^2(a,b)$ (ma non sarebbe diverso in $L^{2.5}$).

In dim. si può fare totalmente elementare se ψ è almeno quadratico, cioè esistono $A > 0$ e B t.c.

$$\psi(p) \geq Ap^2 - B \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

Dim. Se voglio che $\hat{F}$ sia il rilassato di F , mi basta fare 3 verifiche (vedi les. precedenti):

- ① $\hat{F}(u) \leq F(u)$
- ② $\hat{F}$ è SCI
- ③ esistenza di una recovery sequence per ogni $u \in D$ che sia denso in energia per $\hat{F}$.

Verifica di ① Ovvio

Verifica di ② Devo dimostrare che, se $u_n \rightarrow u_\infty$ in L^2 , allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{F}(u_n) \geq \hat{F}(u_\infty)$$

Se il LHS è $+\infty$, allora è banale. Quindi, a meno di s.succ., posso assumere che

$$\hat{F}(u_n) \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Grazie alla crescita quadratica deduco che

$$\int_a^b (A u_n^2 - B) dx \leq \hat{F}(u_n) \leq M$$

e quindi
$$\int_a^b u_n^2 dx \leq \frac{M + B(b-a)}{A}$$

Da qui in poi è il solito discorso, cioè a meno di s.succ.

$$u_n \xrightarrow[\text{debole } L^2]{\quad} v_\infty, \text{ che poi è } u_\infty$$

Dalla debole L^2 + convessità ottengo quello che volevo (uso il teo. che dice debole L^2 + γ convessa $\Rightarrow$ SCI.)

Oss. Se ho sdo crescita superlineare, un teo. misterioso garantisce comunque

$$u_n \rightarrow v_\infty = u_\infty \quad \text{debole } L^1,$$

e questo sappiamo che basta per concludere.

Verifica di ③ Quali sono ragionevoli $D \subseteq L^2$ che sono densi in energia per $\hat{F}$?

Risposte possibili :
 $\rightarrow$ funzioni C^1
 $\rightarrow$ funzioni C^∞
 $\rightarrow$ funzioni affini a tratti

Lemma Le funzioni affini a tratti sono dense in energia per $\hat{F}$.

Dim. Data $u \in L^2$ devo trovare $\{u_n\} \subseteq$ affini a tratti tale che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{e} \quad \hat{F}(u_n) \rightarrow \hat{F}(u)$$

La cosa è banale se $u \in H^1$: scelgo $u_n \equiv u$ ed è fatta.
aggiunto dopo video

La cosa è facile anche se $u \in H^1$, ma $\hat{F}(u) = +\infty$. Infatti per SCI a me basta ottenere che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \hat{F}(u_n) \leq \hat{F}(u)$$

Quindi ci basta ottenere la successione quando $u \in H^1$ e $\hat{F}(u) < +\infty$.

In questo lo slogan è : unire i puntini
 Dico che se ho ottenuto unendo
 i puntini verificano la tesi.

- $u_n \rightarrow u$ pure uniformemente
 (Questo segue dal fatto che u è
 unif. conti. in $[a,b]$: fisso $\varepsilon > 0$ e
 prendo il δ dell'unif. conti. ; appena
 gli intervallini sono lunghi $< \delta$ è fatto).



- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\hat{F}(u_n) \leq \hat{F}(u)$$

Se dimostro questa, la disug. con il limsup segue facil-
 mente.

Detti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ i p.ti della suddivisione,
 vale

$$\hat{F}(u_n) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(u_n) \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(u) = \hat{F}(u)$$

$\uparrow$
 in ogni tratto la retta è
 il p.to di min. con DBC fissate.
 — o — o —

Per completare la verifica di ③ basta mostrare che per ogni
 u affine a tratti esiste una recovery, cioè una succ.
 $\{u_n\} \subseteq C^\infty(a,b)$ tale che

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^2$$

$$\limsup F(u_n) \leq \hat{F}(u)$$

$\uparrow$
 senza cappuccio

Questo è uno dei tanti lemmi di approssimazione, del

tipo quello utilizzato per mostrare che l'inf in C^1 o in C^∞ di molti funzionali integrali è lo stesso.
Volevamo fare con le mani

Basta scegliere u_n che approssimi la u costante a tratti.

Occhio: u_n devono stare in C^∞ , ma l'approssimazione basta molto meno, ad esempio uniforme sui compatti che non convergono p.ti di salto.

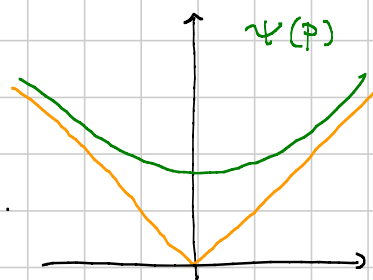


La crescita serve davvero, cioè se manca la crescita superlineare può accadere che $\hat{F}(u) < +\infty$ anche su funzioni u discontinue.

Esempio 1 $\int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} dx = F(u)$

La $\psi(p) := \sqrt{1+p^2}$ è a crescita lineare.

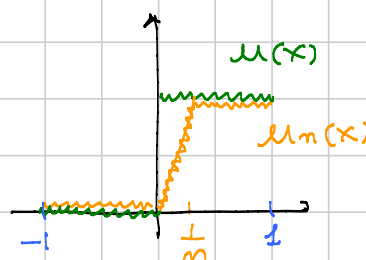
Considero $u = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0. \end{cases}$



Dico che esiste $u_n \rightarrow u$ in L^2 t.c. $F(u_n) \rightarrow$ numero
 $\uparrow$ di classe C^1 o C^∞ .

È evidente che $u_n \rightarrow u$

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \int_0^1 \sqrt{1+n^2} dx \\ &= \frac{1}{n} \sqrt{1+n^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$



Quindi $\hat{F}$, calcolato nella u con un salto, vale ≤ 1 .

Potrei anche fare $u_n \in C^1$ o C^∞ pagando pochissimo di più

Oss. Un salto alto J paga al max

$$F(u_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{1+n^2 J^2} dx$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{1+n^2 J^2} \rightarrow |J|$$

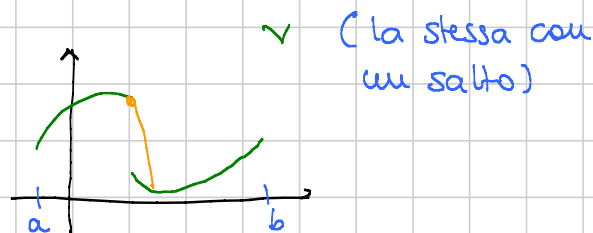
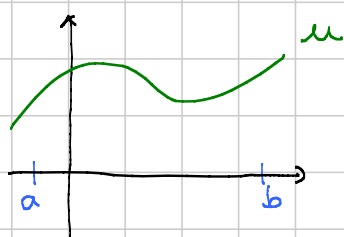


Oss. per il futuro: il caso a crescita lineare porta allo spazio BV (bounded variation) come spazio su cui il rilassato è finito.

Se invece la crescita è del tipo $\int |u|^p$, il rilassato è finito in $W^{1,p}$ se $p > 1$.

Esempio 2 $F(u) = \int_a^b e^u dx$

La crescita di $\gamma(p)$ è fin troppo per $p \rightarrow +\infty$, ma non c'è per $p \rightarrow -\infty$. In questo caso salti "in su" non sono possibili, ma salti in giù sono gratis



Allora $\hat{F}(u) = \hat{F}(v)$. Basta approssimare v opportunamente.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 38

Note Title

27/11/2017

Def. Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione qualunque.

Definiamo il suo involucro convesso come

$$\psi^{**}(x) := \sup \{ g(x) : g \text{ è convessa e } g(y) \leq \psi(y) \text{ per ogni } y \in \mathbb{R} \}$$

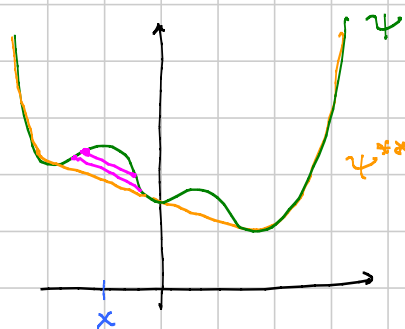
Oss. Affinché ψ^{**} sia ben definita occorre

→ o accettare funzioni con valori in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

→ o definire solo quando esiste a priori una funzione convessa $\leq \psi$ in $\mathbb{R}$.

Prop (Proprietà di ψ^{**})

- ① ψ^{**} è convessa
- ② $\psi^{**}(x) \leq \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- ③ Il sup nella def. è un max
- ④ Posso definire equivalentemente



$$\begin{aligned} \psi^{**}(x) &= \sup \{ \text{rette che stanno sotto } \psi \} \\ &= \sup \{ ux + m : m y + m \leq \psi(y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

- ⑤ $\psi^{**}(x)$ è l'inf. di tutti i segmenti che congiungono due pti del grafico, uno prima e uno dopo x .

Idee per la dimostrazione ② è ovvia

- ① Fatto di analisi 1: il sup di convesse è convessa (si dimostra o con la definizione o con il fatto che la convessità di una funzione è equiv. alla convessità del sopra-grafico + intersezione di convessi è convessa).

$$\textcircled{3} = \textcircled{1} + \textcircled{2}$$

④ Ogni funzione convessa sta sopra alla retta tangente (o ancora meglio ad un cono di possibili rette tangenti).

⑤ Prendo una retta tangente a ψ^{**} in x e la alzo un po'; se non toccasse ψ in due p.ti --

— o — o —

Consideriamo ora un funzionale del tipo

$$F(u) = \begin{cases} \int_a^b \psi(x) dx & \text{se } u \in C^1([a,b]) \text{ o } C^\infty \\ +\infty & \text{altrimenti in } L^2([a,b]) \end{cases}$$

Teorema Supponiamo che $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia

(i) superlineare (o ancora meglio più che quadratica).

Allora il rilassato è

$$\hat{F}(u) = \begin{cases} \int_a^b \psi^{**}(x) dx & \text{se } u \in \text{Sobolev opportuno} \\ +\infty & \text{(n' nel caso quadratico) altrimenti.} \end{cases}$$

Dim. Occorre fare le solite 3 verifiche.

① $\hat{F}(u) \leq F(u)$ sempre. Ovvio perché $\psi^{**} \leq \psi$.

② $\hat{F}(u)$ sia SCI. Sì, è come nella lezione scorsa, poiché ψ^{**} è convessa. Occhio: qui avevamo usato la crescita, ma se

$\psi(p) \geq Ap^2 - B \quad \forall p \in \mathbb{R} \quad (\text{con } A > 0)$
 allora pure

$$\psi^{**}(p) \geq \underline{Ap^2 - B} \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

contribuisce alla definizione
di ψ^{**}

Oss. Nel caso superlineare è leggermente più delicato

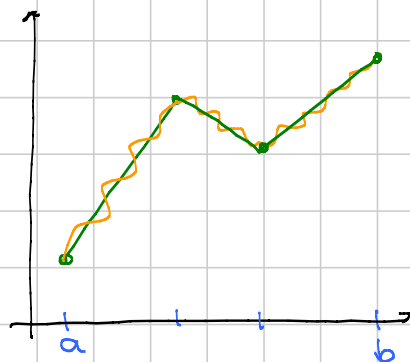
③ Senza l'esistenza di una recovery per ogni $u \in D \subseteq L^2$ denso in energia.

Uso come D le funzioni affini a tratti, che alla lez. precedente abbiamo dimostrato essere dense in energia per $\hat{F}(u)$.

Riduzione: ci basta dimostrare che per ogni retta
 $l(x) = mx + n$ e per ogni intervallo (c, d)
 esiste $v_m \in C^\infty$ o in C^1 t.c.

$$v_m \rightarrow l \quad \text{in } L^2 \quad \text{e} \quad \limsup_{m \rightarrow +\infty} F(v_m) \leq \hat{F}(l)$$

(se ho fatto questo, poi in ogni sottointervallo della affine a tratti approssimo la retta corrispondente, stando attento alle giunture)



Ci siamo quindi ridotti ad approssimare $l(x) = mx + n$.

→ Se $\psi(m) = \psi^{**}(m)$, allora uso banalmente $v_m(x) \equiv l(x)$

$$F(v_m) = \int_c^d \psi(m) = \int_c^d \psi^{**}(m) = \hat{F}(l)$$

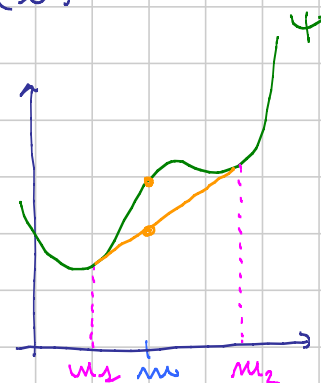
→ Se $\psi^{**}(m) < \psi(m)$, poniamo che esistano m_1 ed m_2 come in figura, cioè tali che

$$m = \lambda m_1 + (1-\lambda) m_2$$

e

$$\psi^{**}(m) = \lambda \psi(m_1) + (1-\lambda) \psi(m_2)$$

per un opportuno $\lambda \in (0,1)$.



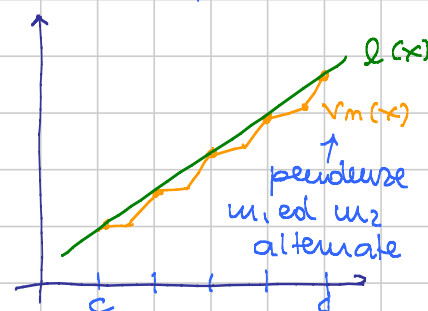
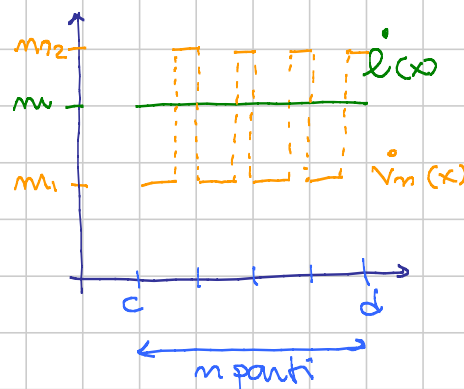
In questo caso costruisco $v_m(x)$ in questo modo:
divido l'intervallo (c,d) in n parti uguali,
e poi in ciascuna parte pongo $v_m(x) = m_1$ ed m_2
in proporzioni date da λ .

Quando vado a fare la prima
fira ottengo $v_m \rightarrow l$
uniformemente, e che coincidono
con $l(x)$ in tutti i punti della
suddivisione.

Ora

$$F(v_m) = (d-c) [\lambda \psi(m_1) + (1-\lambda) \psi(m_2)]$$

$$= (d-c) \psi^{**}(m) = \hat{F}(l)$$



In questo caso abbiamo proprio che $F(v_m) = \hat{F}(l)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Se lo voglio C^1 o C^∞ deve pagare un minimo in ogni raccordo.

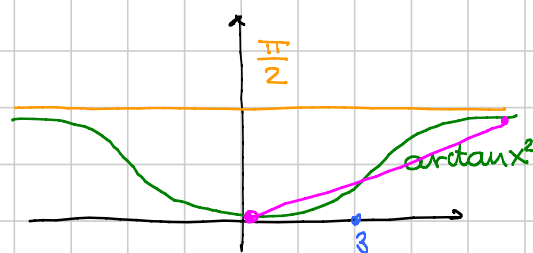
→ Se $\psi^{**}(u) < \psi(u)$, ma non esiste un segmento come in figura, per la proprietà ⑤ dell'involuppo esiste comunque un segmento tale che arriva a meno di ε , cioè

$$\psi^{**}(u) + \varepsilon \geq \lambda \psi(u_1) + (1-\lambda) \psi(u_2)$$

e quindi la costruzione è sostanzialmente la stessa.

— o — o —

Esempio 1 $\psi(x) = \arctan(x^2)$
 $= \log(1+x^2)$



In entrambi i casi $\psi^{**}(x) \equiv 0$ ma non esiste il segmento, ma è vero che $\psi^{**}(x)$ è l'inf di segmenti che congiungono punti del grafico, uno prima e uno dopo.

Esempio 2 $\min \left\{ \int_0^7 \arctan(x^2) + (u - e^x)^2 dx : \right.$
 $\left. u(0) = 0, u(7) = 2017 \right\}$

L'inf. è 0 e il minimo non esiste.

Detto $F(u)$ il funzionale, il suo inf è uguale all'inf del rilassato, per il quale basta fare l'inf della prima parte (discorso delle perturbazioni continue).

Per il teo. e l'esempio precedenti, il rilassato è

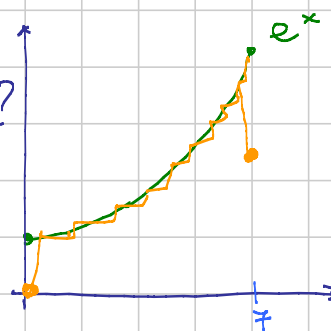
$$\hat{F}(u) = \int_0^7 (u - e^x)^2 dx$$

e questo ha $\inf = 0$.

Occhio! Avrei dovuto tenere conto delle DBC quando vado a fine le recovery, ma le posso realizzare facilmente nel 1° e ultimo tratto pagando quasi nulla (costano meno di $\frac{\pi}{2}$ · lunghezza del tratto in cui modifico).

Come sono fatte le succ. minimizzanti?

Devono tendere ad e^x , ad esempio sui compatti di $(0,7)$ e avere derivata che alterna 0 a valori enormi, come nei segmenti dell'esempio 1.



Calcolo delle variazioni

LEZIONE 039

Note Title

28/11/2017

GEODETTICHECaso dello spazio Euclideo

Dati $A \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^n$, trovare la curva più corta che unisce A e B .

Limitiamoci a curve regolari $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

(in 2 variabili $\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$)

Brutta notizia: la lagrangiana ha crescita lineare.

$$\min \left\{ \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt : \gamma(a) = A, \gamma(b) = B \right\}$$

Sospettiamo che il min sia dato dal segmento.

Prima possibile dimostrazione

Supponiamo $B \neq A$.

Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|\langle \dot{\gamma}(t), v \rangle| \leq \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot \|v\| \quad \text{se } v \neq 0$$

↑
c.s.

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \geq \frac{1}{\|v\|} \cdot |\langle \dot{\gamma}(t), v \rangle| \quad \text{e quindi}$$

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \geq \frac{1}{\|v\|} \int_a^b |\langle \dot{\gamma}(t), v \rangle| dt \geq \frac{1}{\|v\|} \left| \int_a^b \langle \dot{\gamma}(t), v \rangle dt \right|$$

$\underbrace{\int_a^b \langle \dot{\gamma}(t), v \rangle dt}_{\frac{d}{dt} \langle \gamma(t), v \rangle}$

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \geq \frac{1}{\|v\|} \left| \left[\langle \gamma(t), v \rangle \right]_a^b \right| = \frac{1}{\|v\|} \left| \langle B, v \rangle - \langle A, v \rangle \right|$$

$$= \frac{1}{\|v\|} \left| \langle B-A, v \rangle \right|$$

Usando $v = B-A$ ottengo che

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \geq \|B-A\| = \text{lunghezza segmento}$$

Seconda idea possibile Suppongo B ed A allineati con l'origine (a meno di trasl. posso)

$$|\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle| \leq \|\gamma(t)\| \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|$$

Se $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ posso dividere e trovo

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \geq \left| \frac{\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}{\|\gamma(t)\|} \right| \quad \text{da cui}$$



$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \geq \int_a^b \left| \frac{\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}{\|\gamma(t)\|} \right| dt \geq \left| \int_a^b \frac{\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}{\|\gamma(t)\|} dt \right|$$

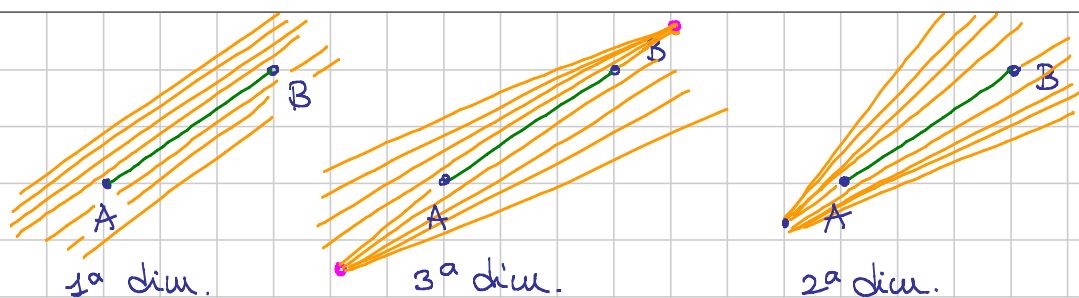
$$= \frac{d}{dt} \|\gamma(t)\|$$

(pensare in 2 o 3 variabili per convi.)

$$= \left| \left[\|\gamma(t)\| \right]_a^b \right| = \|B\| - \|A\|$$

$$= \|B-A\| \quad \text{se vale l'allineamento come in figura.}$$

Questo dimostra che il segmento è ottimale tra tutte le curve C^1 che non passano per l'origine.
(Basta spostare l'origine se serve)



Ci sono ∞ varianti possibili

— o — o —

Caso del cilindro

$$x(t) = r \cos \theta(t)$$

$$y(t) = r \sin \theta(t)$$

$$z(t)$$

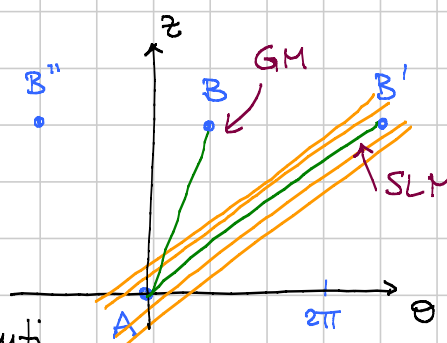
$$\text{lunghezza}(\sigma) = \int_a^b \sqrt{r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Dati 2 p.ti sul cilindro, posso mettere le coordinate in modo che il 1° sia $\theta = 0, z = 0$.

Per il punto B ci sono tante possibilità.

Supponiamo per sempl. $r=1$.

Il problema diventa la curva più corta tra A ed uno dei rappresentanti di B nel piano, quindi nello sviluppo è un segmento



Tra i vari segmenti uno è più corto degli altri.

Gli altri "fanno più giri" e sono SLM, come si vede calibrandoli con le parallele.

— o — o —

CASO DELLA SFERA

$$x(t) = \cos \varphi(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = \cos \varphi(t) \sin \theta(t)$$

$$z(t) = \sin \varphi(t)$$

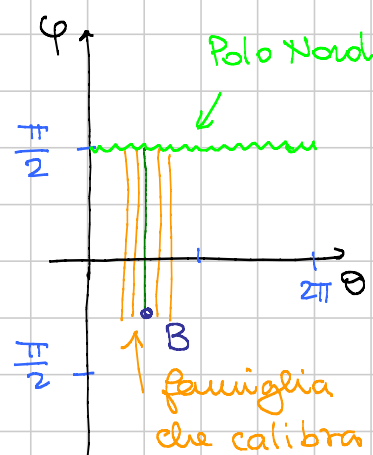
dove φ è la "latitudine" e θ la "longitudine"

$$\text{lunga}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \cos^2 \varphi \cdot \dot{\theta}^2} dt$$

Supponiamo dati 2 p.ti A e B e prendiamo A = polo N e supponiamo che B non sia il polo S.

Dico che la curva ottimale ha $\theta = \text{costante}$, cioè è un meridiano

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \cos^2 \varphi \dot{\theta}^2} dt &\geq \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2} \\ &= \int_a^b |\dot{\varphi}| dt = \text{differenza} \\ &\quad \text{latitudini.} \end{aligned}$$

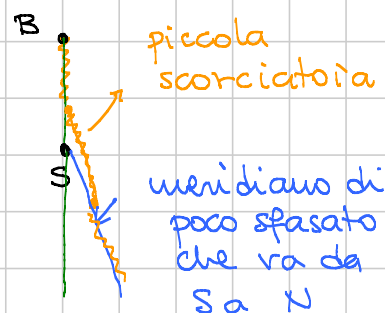


Cosa posso dire del meridiano "opposto" che fa il giro dall'altra parte?

→ Risolve ELE, ma non è nemmeno WLM.

Come ottengo curva vicino come posiz. e derivata, una più corta

Il polo S è il coniugato del polo N: le soluzioni che emanano dal polo N arrivano a finire nel S.



MIRACOLO DELLE GEODETICHE

Consideriamo ora curve a valori in una sottovarietà qualunque di $\mathbb{R}^n$

$$F_1(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

crescita lineare

$$F_2(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$$

crescita quadratica 😊
quindi posso fare metodo diretto, ottenere unicità,...

Il minimo di F_1 ed F_2 sono collegati

$$\begin{aligned} F_1(\gamma) &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \sqrt{b-a} \left\{ \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{b-a} \{F_2(\gamma)\}^{1/2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\min F_1(\gamma) \leq \sqrt{b-a} \{ \min F_2(\gamma) \}^{1/2} \quad \begin{array}{l} \text{Fissati} \\ \gamma(a) = A \\ \gamma(b) = B \end{array}$$

Nella disug. di Hölder vale il segno di $\Leftrightarrow$ se e solo se le due funzioni sono proporzionali, cioè se e solo se

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{costante} \quad (\text{indep. da } t)$$

I due minimi hanno il segno di = se vale questo Lemma

Lemma Data $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 , esiste una riparametrizzazione $\psi: [a,b] \rightarrow [a,b]$ monotona e sing. e abbastanza regolare t.c. $\gamma(\psi(t)) = \gamma_2$ ha la stessa lunghezza e $\|\dot{\gamma}_2(t)\| = \text{costante}$.

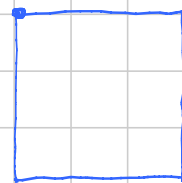
Se vale il lemma, allora

$$\min F_1(\delta) = \sqrt{b-a} \cdot \{\min F_2\}^{1/2}$$

Il secondo esiste, quindi esiste il 1°.

Oss. Il lemma, anche se fisicamente ragionevole, non è banale. Ad esempio

→ esiste una curva C^∞ che percorre un quadrato



→ la sua riparametrizzazione è lip. ma non C^1 .

— o — o —

Calcolo delle Variazioni

-

LEZIONE 40

Note Title

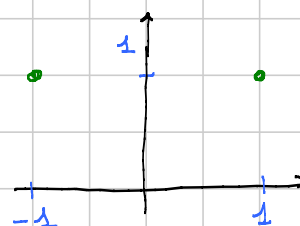
28/11/2017

Problemi con ostacoloEsempio motivazionale

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 u'^2 + 2017 u \quad : \quad u(-1) = u(1) = 1, \quad \boxed{u(x) \geq 0} \right\}$$

Possibili ostacoli

- $u(x) \geq \varphi(x) \quad \forall x \in [a, b]$
- $\varphi_1(x) \leq u(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$
- $\varphi_1(x) \leq u(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [c, d] \subseteq [a, b]$



- anche ostacoli puntuali $A_1 \leq \varphi(c) \leq B_1$

Posso anche pensare ostacoli sulla derivata, ad esempio

$$u'(x) \geq 7 \quad \forall x \in [a, b] \quad \quad u'(x) \leq 8u(x) \quad \forall x \in [c, d]$$

— o — o —

Esistenza

Gli ostacoli sulla funzione si comportano bene nel metodo diretto.

(Gli ostacoli sulla funzione passano al limite rispetto alla convergenza uniforme)

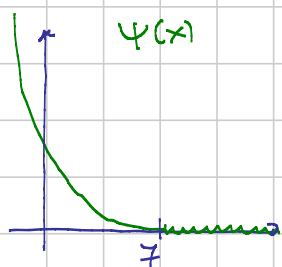
Nell'esempio si vede che il problema ammette minimo su $H^1((-1, 1))$.

Gli ostacoli sulla derivata sono più difficili da passare al limite, ma si può usare il trucco dell'integrale

Esempio Supponiamo $v_n(x) \geq \tau \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $v_n \rightarrow v_\infty$ in $L^2((a, b))$ debole

Vonci che fosse

$$v_\infty(x) \geq \tau \quad \text{per quasi ogni } x \in [a, b]$$



Considero $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa e come in figura

- $\psi(x) = 0$ per $x \geq \tau$
- $\psi(x) > 0$ per $x < \tau$
- ψ è convessa
- ψ è C^1

$$\int_a^b \psi(v_n(x)) dx = 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Essendo ψ convessa, per i teoremi di SCI vale

$$0 \leq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx \stackrel{\substack{\uparrow \\ \psi \geq 0}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_n(x)) dx \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{SCI}}}{=} 0$$

Ne segue che $\int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx = 0$ e quindi $v_\infty(x) \geq \tau$ q.o.

Oss. Se il vincolo era $v(x) \geq \tau \sin x$ consideravo

$$\psi(v(x) - \tau \sin x)$$

con ψ come in figura e osservare che



$$v_n \rightarrow v_\infty \Rightarrow v_n(x) - \tau \sin x \rightarrow v_\infty(x) - \tau \sin x$$

— 0 — 0 —

(ELE) + regolarità

Supponiamo di avere ostacolo del tipo
 $u(x) \geq \varphi(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Cosa risolve un p.to di min?

$$\varphi(t) = F(u + t v)$$

posso per $t \geq 0$ se $v(x) \geq 0$ sempre

Se u è minimo, allora φ ha minimo per $t=0$ ed essendo definita sdo per $t \geq 0$ trovo

$$\varphi'(0) \geq 0$$

$$\int_a^b L_s(x, u, \dot{u}) v + L_p(x, u, \dot{u}) \ddot{v} \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \text{ e } v(x) \geq 0$$

Integrandolo per parti e usando DBC

$$\int_a^b \{L_s(x, u, \dot{u}) - [L_p(x, u, \dot{u})]'\} v \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \text{ e } v(x) \geq 0$$

Per una variante semplice di FLCV otteniamo

$$L_s(x, u, \dot{u}) - [L_p(x, u, \dot{u})]' \geq 0$$

cioè volendo

$$[L_p(x, u, \dot{u})]' \leq L_s(x, u, \dot{u})$$

La vecchia ELE
 è diventata una
 disuguaglianza

Supponiamo $\varphi(x)$ continua e sia

$$K := \{x \in [a, b] : u(x) = \varphi(x)\} = \text{regione di contatto}$$

Allora

- (ELE) con $\leq$ vale per ogni $x \in [a, b]$
- (ELE) con $=$ vale per ogni $x \in [a, b] \setminus K$

(Se $x_0 \notin K$, allora posso usare v di segno arbitrario che sono $\neq 0$ solo vicino ad x_0 , e con queste ottengo ELE normale)

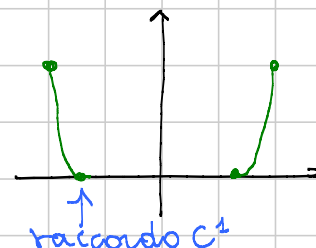
— o — o —

Regolarità

- se $\varphi \in C^4$, allora il contatto è C^1
- se $\varphi \in C^{2\frac{1}{2}}$, allora il contatto è $C^{1,1}$
(il minimo può non essere C^2)

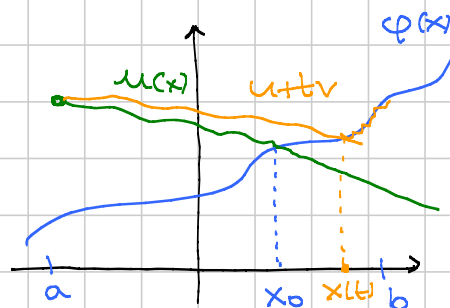
Per vedere che il min. non è C^2 basta l'esempio motivazionale

— o — o —



Dimostrazione del contatto C^1 in un caso particolare in cui non c'è contatto su $[a, x_0)$ e poi c'è su $[x_0, b]$.

Data $v \in C_c^\infty$ considero $u+tv$ e spero che ci sia un p.to di contatto $x(t)$.



Sia

$$\varphi(t) = \int_a^{x(t)} L(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) + \int_{x(t)}^b L(x, \varphi, \dot{\varphi})$$

Se u è minimo, allora $\varphi'(0) = 0$.

Accertiamoci dell'esistenza di $x(t)$

$$u(x(t)) + t v(x(t)) = \varphi(x(t))$$

$\Phi(x, t) = u(x) + t v(x) - \varphi(x)$
e speso nel teo. funz. implicite

$$\Phi(x_0, 0) = 0 \quad \Phi_x(x, t) = \dot{u}(x) + t \dot{v}(x) - \dot{\varphi}(x)$$

$$\Phi_x(x_0, 0) = \dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)$$

Se fosse $\Phi_x(x_0, 0) \neq 0$, potrei ricavare $x(t)$ in funzione di t .

$$\varphi'(t) = L(x(t), u(x(t)) + t v(x(t)), \dot{u}(x(t)) + t \dot{v}(x(t))) \dot{x}(t) - L(x(t), \varphi(x(t)), \dot{\varphi}(x(t))) \dot{x}(t) + \int_a^{x(t)} L_s(\dots) v + L_p(\dots) \dot{v}$$

Metto $t = 0$

$$0 = \varphi'(0) = L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) \dot{x}(0) - L(x_0, \varphi(x_0), \dot{\varphi}(x_0)) \dot{x}(0) + \int_a^{x_0} L_s(\dots) v + L_p(\dots) \dot{v}$$

$$\int_a^{x_0} (L_s - L_p') v + L_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) v(x_0) = 0 \text{ per ELE}$$

Ho ottenuto che

$$\left[L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) - L(x_0, \varphi(x_0), \dot{\varphi}(x_0)) \right] \dot{x}(0) + L_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) v(x_0)$$

Dal teo. funz. implicite $\dot{x}(0) = - \frac{\Phi_t(x_0, 0)}{\Phi_x(x_0, 0)}$

e quindi

$$\dot{x}(0) = - \frac{v(x_0)}{\dot{u}(x_0) - \dot{\bar{q}}(x_0)}$$

Andando a sostituire e semplificando $v(x_0)$, che posso assumere $\neq 0$, trovo

$$\begin{aligned} L_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) (\dot{u}(x_0) - \dot{\bar{q}}(x_0)) &= \\ &= L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) - L(x_0, u(x_0), \dot{\bar{q}}(x_0)) \end{aligned}$$

L'abbiamo dimostrata se $\dot{u}(x_0) \neq \dot{\bar{q}}(x_0)$, ma vale anche se sono uguali per ragioni ovvie.

MA non possono essere diversi se $L(x, s, p)$ è strettamente convessa in p

Sotto ipotesi di stretta convessità il contatto è C^1 .

— o — o —

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 41

Note Title

04/12/2017

EFFETTI DI LINEARIZZAZIONE

(Problemi con parametri "piccoli")

Esempio 1 $F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + \dot{u}^4 + u^2 - u^4 + u^6) dx$

$$m_\varepsilon := \min \{ F(u) : u(0) = 0, u(1) = \varepsilon \}$$

↑
par. piccolo

Facile: per ogni $\varepsilon > 0$ il problema ammette soluzione
(metodo diretto, grazie alla convessità in p e limitatezza dal basso in u)

Voglio capire se e come $m_\varepsilon \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Mi aspetto $u(x) = \varepsilon v(x)$. Sostituendo trovo

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^1 \varepsilon^2 \dot{v}^2 + \varepsilon^4 \dot{v}^4 + \varepsilon^2 v^2 - \varepsilon^4 v^4 + \varepsilon^6 v^6 \\ &= \varepsilon^2 \underbrace{\int_0^1 \dot{v}^2 + v^2 + \varepsilon^2 \dot{v}^4 - \varepsilon^2 v^4 + \varepsilon^4 v^6}_{G_\varepsilon(v)} \end{aligned}$$

e le DBC diventano $v(0) = 0, v(1) = 1$

Mi aspetto che $G_\varepsilon(v) \xrightarrow{\Gamma} \int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2)$ con equicoercività.

Se questo succede, allora $m_\varepsilon \sim \alpha \varepsilon^2$, con

$$\alpha := \min \left\{ \int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2) dx : v(0) = 0, v(1) = 1 \right\}$$

Dimostro la Gamma - convergenza

LIMINF Se $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ in $L^2((0,1))$, allora

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} G_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \int_0^1 u_0^2 + u_0^2$$

Ovvia se $LHS = +\infty$. A meno di s.succ. posso supporre che $\liminf = \lim$.

Quindi posso supporre che $G_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq M$. Al solito modo ottengo stima su $\|u_\varepsilon\|_{L^2}^2$ e quindi

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ debole}$$

Ora sulle parti con u_ε ho la semicontinuità della norma, il termine con $\varepsilon^2 u_\varepsilon^4$ lo posso eliminare ignorando, e sui termini con u_ε ho conv. unif.

LIMSUP Devo trovare recovery sequence. Basta farlo su un denso in energia per il presunto limite, ad esempio C^4 .

In questo caso posso usare le costanti.

EQUICOERCIVITÀ Da $G_\varepsilon(u) \leq M$ deduco $\|u\|_{L^2} \leq M_1$ e questo, insieme alle BC, basta per concludere.

Ho in realtà dimostrato di più, cioè che per ogni $M \in \mathbb{R}$ ogni famiglia u_ε con

$$G(u_\varepsilon) \leq M$$

ammette una sottosucc. convergente.

— o — o —

Esempio 2 $F(u) = \int_0^1 \sin u (\dot{u}^2) + \sin(u^2)$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \varepsilon$$

ANSATZ : $u(x) = \varepsilon v(x)$

$$F(u) = \int_0^1 \sin u (\varepsilon^2 \dot{v}^2) + \sin(\varepsilon^2 v^2)$$

$$= \varepsilon^2 \int_0^1 \underbrace{\frac{\sin u (\varepsilon^2 \dot{v}^2)}{\varepsilon^2} + \frac{\sin(\varepsilon^2 v^2)}{\varepsilon^2}}_{G_\varepsilon(v)}$$

Spero che $G_\varepsilon(v) \xrightarrow{\Gamma} \int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2)$

La dim. è come prima. Le osservazioni importanti sono che

$$\frac{\sin u (\varepsilon^2 \dot{v}^2)}{\varepsilon^2} \geq \dot{v}^2 \quad (\sin x \geq x \text{ per } x \geq 0)$$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{\sin u (\varepsilon^2 \dot{v}_\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \dot{v}_\varepsilon^2 \geq \int_0^1 \dot{v}_0^2$$

dopo aver guadagnato che $\dot{v}_\varepsilon \rightarrow \dot{v}_0$

Per il termine con la funzione basta osservare che

$$\frac{\sin(\varepsilon^2 x)}{\varepsilon^2} \rightarrow x \quad \text{unif. sui compatti}$$

$$\left| \frac{\sin(\varepsilon^2 x)}{\varepsilon^2} - x \right| = \left| \frac{\sin(\varepsilon^2 x) - \varepsilon^2 x}{\varepsilon^2} \right| \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor} \\ \text{Lagrange}}}{=} \frac{|\varphi''(\dots) \varepsilon^4 x^2|}{2 \varepsilon^2} \stackrel{\downarrow}{\rightarrow} 0$$

— 0 — 0 —

Esempio 3

$$\int_0^1 \underbrace{\dot{u}^2 + \dot{u}^4}_{\text{energia elastica}} + \underbrace{\varepsilon u}_{\text{forza esterne "peso"}}$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Ausatz 1: $u(x) = \varepsilon v(x)$

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^1 \varepsilon^2 \dot{v}^2 + \varepsilon^4 \dot{v}^4 + \varepsilon^2 v \\ &= \varepsilon^2 \underbrace{\int_0^1 \dot{v}^2 + \varepsilon^2 \dot{v}^4 + v}_{G_\varepsilon(v)} \end{aligned}$$

Sembra ragionevole che $G_\varepsilon(v) \rightarrow \int_0^1 (\dot{v}^2 + v) dx$

Dim. come sopra.

Esempio 4 $F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + \dot{u}^4 + \varepsilon u^3)$ $u(0) = u(1) = 0$

- Per ogni $\varepsilon > 0$ il minimo esiste (metodo diretto, e devo dire grazie a $\dot{u}^4$)
- La funzione $u_0(x) \equiv 0$ è stazionaria (ELE) ed è STM per ogni $\varepsilon > 0$

Basta calcolare $\delta^2 F(u_0, v) = \int_0^1 \dot{v}^2$ e questo verifica

(L^+) , (J^+) (infatti (JDE) è $\ddot{v} = 0$ e ha come soluz. delle rete) e anche (w^+) è gratis per la convessità in p della Lagrangiana 😊.

- Per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo $u_0(x) \equiv 0$ è GM.

$$\int_0^1 u^2 \geq \varepsilon_0 \int_0^1 u^2 \quad (\text{questo segue, volendo, da } (L^2) \text{ e } (W^1))$$

↑
costante positiva

Diamo un attimo per buono che $\exists \varepsilon_1 > 0$ t.c.

$$\int_0^1 u^4 \geq \varepsilon_1 \int_0^1 u^4 \quad \text{per ogni } u \text{ nulla al bordo.}$$

Ma allora

$$\int_0^1 u^2 + u^4 + \varepsilon u^3 \geq \int_0^1 (\varepsilon_0 u^2 + \varepsilon_1 u^4 + \varepsilon u^3) \geq 0$$

↑
se ε è piccolo

Basta infatti osservare che $\varepsilon_0 x^2 + \varepsilon_1 x^4 + \varepsilon x^3 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ se ε è piccolo

$$\geq 0 \quad \frac{x^2 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon x)}{\Delta < 0 \text{ per } \varepsilon \text{ piccolo}}$$

Resta da dim. che $\int_0^1 u^4 \geq \varepsilon_0 \int_0^1 u^4$.

Questa è omogenea, quindi posso supporre $\int_0^1 u^4 = 1$, e quindi vale con

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ \int_0^1 u^4 dx : \int_0^1 u^4 dx = 1, u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

e questo problema ha soluzione per il metodo diretto (e la sol. è positiva)

Esempio 5 $\int_0^1 u^2 + u^4 + \lambda u^3 \quad u(0) = u(1) = 0.$

Che succede per λ grande?

Ausatz : $u(x) = \lambda^\alpha v(x)$

$$F(u) = \int_0^1 \lambda^{2\alpha} \dot{v}^2 + \lambda^{4\alpha} v^4 + \lambda^{1+3\alpha} v^3$$

Se $\alpha=1$, allora il 2° e 3° esponente sono uguali. Metto $\alpha=1$!

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^1 \lambda^2 \dot{v}^2 + \lambda^4 \dot{v}^4 + \lambda^4 v^3 \\ &= \lambda^4 \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\lambda^2} \dot{v}^2 + \dot{v}^4 + v^3}_{G_\lambda(v)} \xrightarrow{\Gamma} \int_0^1 \dot{v}^4 + v^3 \end{aligned}$$

Questo mi dice che m_λ , cioè il min di $F(u)$ a λ fisso, è del tipo

$$m_\lambda \sim c \lambda^4 \quad \text{dove} \quad c := \min \left\{ \int_0^1 (\dot{v}^4 + v^3) : v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

— o — o —

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 42

Note Title

04/12/2017

PASSAGGI DISCRETO $\rightarrow$ CONTINUOApprossimazione delle derivate con rapporti incrementali

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^2)$$

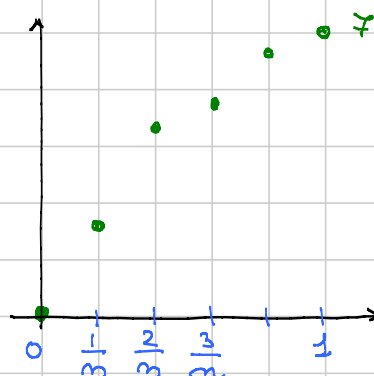
Mettiamo di avere DBC $u(0) = 0$, $u(1) = 7$

Fissato un intero n positivo, divido $[0,1]$ in n parti uguali, e penso u definita solo nei punti $\frac{k}{n}$ con $k=0, \dots, n$

Posso pensare di approssimare $\dot{u}$ con il rapporto incrementale

$$\dot{u}(x) = \frac{u(\frac{k+1}{n}) - u(\frac{k}{n})}{\frac{1}{n}}$$

per x che sta in $(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$



Posso poi definire, dati

$n-1$ numeri reali $u_1, \dots, u_{n-1}$, e averli estesi ponendo $u_0 = 0$ e $u_n = 7$,

$$F_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{\frac{1}{n}} \right)^2}_{\text{versione discreta di } \int_0^1 \dot{u}^2} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} u_k^2}_{\text{versione discreta di } \int_0^1 u^2}$$

Così approssimo un probl. in dim. infinita, con uno in dim. finita

Domanda: non è che $F_n \rightarrow F$ in qualche senso, e che anche minimi e p.ti di min. convergono in qualche senso?

Voglio dimostrare che c'è Gamma-convergenza. Ma dove e rispetto a cosa?

1° passo Immergo il mondo discreto in quello continuo.

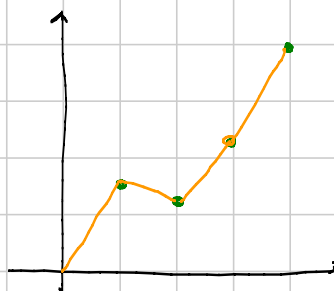
Ci sono almeno due strade:

→ costante a tratti

→ affine a tratti



costante a tratti PC_n



affine a tratti PA_n

In entrambi i casi posso

$$F_n(u) := \begin{cases} \text{la sommatoria} & \text{se } u \in PC_n \quad (PA_n) \\ +\infty & \text{se } u \in L^2(0,1) \setminus PC_n \\ & \quad \quad \quad \setminus PA_n \end{cases}$$

In questo modo F_n risulta definito su tutto L^2 e ha senso porsi il problema della Gamma-conv. rispetto alla metrica di L^2 .

Se ho scelto la strada affine a tratti, allora la somma toria con i rapp. increment. è esattamente

$$\int_0^1 \dot{u}^2$$

↑ deriv. debole

mentre la parte di derivata è una approx di $\int_0^1 u^2$

Se ho scelto la strada costante a tratti, allora la parte con u è il vero integrale di u^2 , mentre per le derivate no.

Esercizio: Gamma-convergenza per l'approccio affine a tratti.

LIMIT $u_n \rightarrow u_\infty$ in L^2 e sperare che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F_\infty(u_\infty) = \int_0^1 \dot{u}_\infty^2 + u_\infty^2$$

Come sempre posso supporre $F_n(u_n) \leq M$. Questo vuol dire che per ogni n le u_n sono affini a tratti e

$$\|u_n\|_{L^2}^2 \leq M.$$

Al solito modo $u_n \rightarrow u_\infty$ e quindi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \dot{u}_n^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{sommatoria con} \\ \text{i rapporti} \\ \text{incrementali}}} \geq \int_0^1 \dot{u}_\infty^2$$

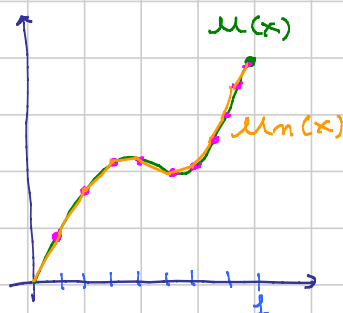
Inoltre $u_n \rightarrow u_\infty$ uniformemente, da cui il limite sulla seconda parte.

LIMSUP Devo trovare la recovery sequence per ogni $u \in L^2$.
 Basta un denso in energia, ad esempio C^1 , nel qual caso
 posso "unire i puntini".
 Se $u \in C^1$ si ha pure

$$u_n \rightarrow u \quad \text{unif.}$$

$$\text{e } \int_0^1 u_n^2 \leq \int_0^1 u^2$$

↑
 sarebbe vero per
 ogni Lagrangiana convessa in p.



Esercizio : Gamma-conv. per l'approccio costante a tratti

LIMINF In questo caso so soltanto che i rapporti incrementali, che sono funzioni costanti a tratti, sono equi- L^2 , quindi hanno una s. succ. convergente.

Cambiando notazione, poniamo

$$D^\varepsilon u(x) = \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon}$$

In questo modo, se $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il funzionale discreto diventa

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^1 |D^\varepsilon u(x)|^2 dx + |u(x)|^2$$

se $u \in PC_\varepsilon$, e $+\infty$ altrimenti.

Prendo $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ in L^2 con $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq M$ e so che

$$\|D^\varepsilon u_\varepsilon(x)\| \leq M$$

quindi a meno di s.succ.

$$D^\varepsilon u_\varepsilon(x) \longrightarrow v(x)$$

Vorrei tanto che $v(x) = u'_0(x)$, perché potrei usare la semicontinuità della norma.

Integrazione per parti discreta!

$$\int_0^1 D^\varepsilon g \cdot f = - \int_0^1 g \cdot D^{-\varepsilon} f$$

se almeno una delle
2 ha supporto
compatto

Dim: gioco con le sommatorie

Prendiamo ora $\varphi \in C_c^\infty((0,1))$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 D^\varepsilon u_\varepsilon(x) \cdot \varphi(x) &= - \int_0^1 u_\varepsilon(x) \cdot D^{-\varepsilon} \varphi(x) & u_\varepsilon &\xrightarrow{L^2} u_0 \\ & & D^{-\varepsilon} \varphi &\xrightarrow{\text{unif}} \varphi' \\ \int_0^1 v(x) \cdot \varphi(x) &= - \int_0^1 u_0(x) \cdot \varphi'(x) \end{aligned}$$

$\leadsto v(x) = u'_0(x)$ e completa la dimostrazione 😊

Equazione di Eulero discreta

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^1 |D^\varepsilon u|^2 + |u|^2$$

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u+tv) &= \int_0^1 |D^\varepsilon u + t D^\varepsilon v|^2 + |u+tv|^2 \\ &= \int_0^1 |D^\varepsilon u|^2 + \int_0^1 2t D^\varepsilon u D^\varepsilon v + t^2 \int_0^1 |D^\varepsilon v|^2 \\ &\quad + \int_0^1 u^2 + \int_0^1 2t uv + t^2 \int_0^1 v^2 = \varphi(t) \end{aligned}$$

Come al solito otteniamo

$$\varphi'(0) = 2 \int_0^1 D^\varepsilon u D^\varepsilon v + 2 \int_0^1 u v \quad \forall v \in PC_\varepsilon \text{ nulla al bordo}$$

Eulero discreta 1^a forma

Integrando per parti con la formula discreta diventa

$$\varphi'(0) = +2 \int_0^1 [-D^{-\varepsilon} D^\varepsilon u + u] v \quad \forall v \in PC_\varepsilon \text{ nulla al bordo}$$

Se u è un p.to di min per F_ε , al solito modo otteniamo che

$$D^{-\varepsilon} D^\varepsilon u(x) = u(x) \quad (\text{ELE Discreta})$$

Svolgendo i calcoli si trova

$$D^{-\varepsilon} D^\varepsilon u(x) = \frac{u(x+\varepsilon) + u(x-\varepsilon) - 2u(x)}{\varepsilon^2}$$

e questo è l'analogo discreto della derivata 2^a

$$u(x+\varepsilon) = u(x) + \varepsilon u'(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 u''(x) + o(\varepsilon^2)$$

$$u(x-\varepsilon) = u(x) - \varepsilon u'(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 u''(x) + o(\varepsilon^2)$$

quindi $D^{-\varepsilon} D^\varepsilon u(x) \sim u''(x)$

— o — o —

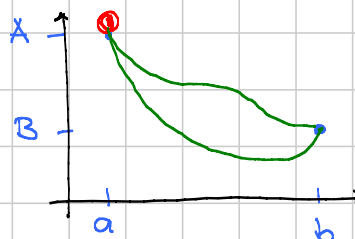
Calcolo delle Variazioni - LEZIONE 43

Note Title

05/12/2017

BRACHISTOCRONA

Problema: trovare la forma di una guida $u(x)$ tale una pallina seguendo la guida vada da (a, A) a (b, B) nel minor tempo possibile.



La soluzione non è ovvia, e non è detto nemmeno che non converga scendere sotto B.

1. **Descrizione del modello** $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è la guida

$(x(t), u(x(t)))$ $t \in [0, T]$ percorso della pallina

$$x(0) = a \quad x(T) = b$$

$$y(0) = A \quad y(T) = B$$

Calcolare la velocità della pallina al tempo t : conservazione dell'energia cinetica + potenziale

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{cinetico}} + \underbrace{g u(x(t))}_{\text{potenziale}} = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + \underbrace{g A}_{\substack{\uparrow \\ \text{parte} \\ \text{ferma}}}$$

Quindi

$$v^2(t) = g [A - u(x(t))] \frac{2}{m}$$

"

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \dot{x}(t)^2 + u'(x(t))^2 \dot{x}(t)^2$$

Da questa ricaviamo

$$\dot{x}(t)^2 = \frac{2g}{m} \frac{A - u(x(t))}{1 + \dot{u}(x(t))^2}$$

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2g}{m}} \sqrt{\frac{A - u(x(t))}{1 + \dot{u}(x(t))^2}}$$

Divido per la radice ed integro su $[0, T]$

$$\int_0^T \dot{x}(t) \sqrt{\frac{1 + \dot{u}(x(t))^2}{A - u(x(t))}} dt = \int_0^T \sqrt{\frac{2g}{m}} dt$$

" $x(t) = x$ " "

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1 + \dot{u}(x)^2}{A - u(x)}} dx = T \cdot \sqrt{\frac{2g}{m}}$$

Conclusione : minimizzare T vuol dire trovare

$$\min \left\{ \int_a^b \sqrt{\frac{1 + \dot{u}^2}{A - u}} dx : u(a) = A, u(b) = B \right\}$$

Funzionale integrale con Lagrangiana

$$L(x, s, p) := \sqrt{\frac{1 + p^2}{A - s}}$$

Brutte notizie:

→ l'integrale può essere improprio (denominatore)

→ La crescita su p è solo lineare.

— o — o —

2 Soluzione brutale dell'eq. di Eulero

Partiamo da (ELE) in forma Erdmann

$$\dot{u} L_p(u, \dot{u}) = c + L(u, \dot{u})$$

$$\frac{\dot{u}^2}{\sqrt{1+\dot{u}^2} \sqrt{A-u}} = c + \frac{\sqrt{1+\dot{u}^2}}{\sqrt{A-u}}$$

Conti brutali: $\cancel{\dot{u}^2} = c \sqrt{1+\dot{u}^2} \sqrt{A-u} + 1 + \cancel{\dot{u}^2}$

$$\sqrt{1+\dot{u}^2} \cdot \sqrt{A-u} = c \leftarrow \text{può di cambiare } c$$

$$1+\dot{u}^2 = \frac{c^2}{A-u} \quad \leadsto \quad \dot{u}^2 = \frac{c^2}{A-u} - 1$$

$$\leadsto \dot{u} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{A-u} - 1} \quad (\text{eq. diff. a var. separabili})$$

$$\frac{du}{\sqrt{\frac{c^2}{A-u} - 1}} = \pm dx \quad \leadsto \text{integro}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{A-u} - 1}} du = \pm x + k$$

Pongo $A-u = c^2 \sin^2 z$
 $-du = 2c^2 \sin z \cos z$

$$-\int \frac{2c^2 \sin z \cos z}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 z} - 1}} dz = -2c^2 \int \sin^2 z dz$$

$$c^2 \int 2 \sin^2 z dz = \pm x + k$$

$$c^2 \int (1 - \cos(2z)) dz = c^2 z - \frac{c^2}{2} \sin(2z) = \frac{c^2}{2} (2z - \sin(2z))$$

Pongo $2z = \theta$ e ho ottenuto che

$$\pm x + k = \frac{c^2}{2} (\theta - \sin \theta)$$

$$u = A - \frac{c^2}{2} \sin^2 z = A - \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta)$$

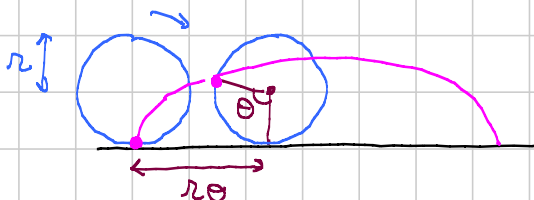
Ho espresso x e u in funzione di un parametro θ

$$x = \frac{c^2}{2} (\theta - \sin \theta) - k$$

$$u = A - \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta)$$

3 Famiglie di cicloidi Consideriamo le curve del tipo

$$\begin{cases} x = r (\theta - \sin \theta) \\ u = r (1 - \cos \theta) \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



La traiettoria descritta dal punto durante la rotazione ha le coordinate date dalla formula di sopra (θ = angolo di rotazione)

4 Tentativo di sistemazione rigorosa

Osservo che la funzione $\psi(\theta) = \theta - \sin \theta$ è monotona ed invertibile come funzione

$$\psi: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$$

Sia $g(x)$ la sua inversa. Poniamo $r = \frac{c^2}{2}$

$$\begin{aligned} x &= r (\theta - \sin \theta) - k \\ u &= A - r (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

$$u(x) = A - r \left[1 - \cos \left(g \left(\frac{x+k}{r} \right) \right) \right]$$

Teorema Per ogni valore ammissibile dei parametri (A, k, r) la funzione $u(x)$ definita sopra risolve (ELE) del funzionale.

Dim. Calcolo le derivate e sostituisco.

5 Verifica delle BC Voglio trovare r e k in modo che

$$u(a) = A \quad \text{e} \quad u(b) = B$$

Uso la descrizione parametrica e cerco r e θ_0 in modo tale che

$$\theta = 0 \quad \begin{cases} a = -k \\ A = A \end{cases} \quad \theta = \theta_0 \quad \begin{cases} b = r(\theta_0 - \sin \theta_0) - k \\ B = A - r(1 - \cos \theta_0) \end{cases}$$

$$b - a = r(\theta_0 - \sin \theta_0)$$

$$A - B = r(1 - \cos \theta_0)$$

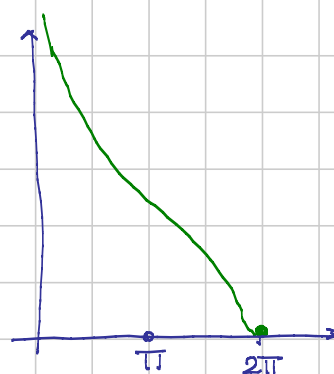
Dividendo tro $\frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0 - \sin \theta_0} = \boxed{\frac{A - B}{b - a}} > 0$

Considero la funzione

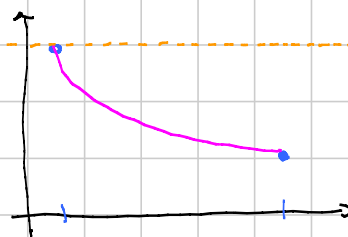
$$\psi(\theta) := \frac{1 - \cos \theta}{\theta - \sin \theta} \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

Miracolo di Analisi 1 (vedi lezioni 2015/16) : $\psi'(\theta) < 0$ sempre, quindi esiste un unico θ_0 che va bene.

Nota θ_0 , trovo $r \Rightarrow$ esiste un'unica cicloide che passa per le DBC assegnate!



Oss. La cicloide può avere minimo + basso del valore B ?



Tutto dipende dall'essere $\theta_0 \in (\pi, 2\pi)$
il che succede non appena

$$\frac{A-B}{b-a} < \psi(\pi) = \frac{2}{\pi}$$

6 Dimostrazione della unicità (dell'unica cicloide trovata)

Due dimostrazioni

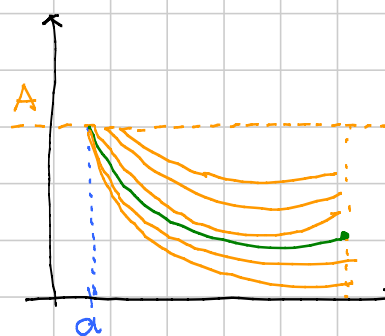
1 - Via campi di Weierstrass

Posso foliare il quadrante

$$x \geq a, u \leq A$$

con cicloidi, quindi soluzioni di ELE (uso quelle che emanano da (a, A) con raggi differenti.

Queste non si intersecano e formano un campo di W.



Per concludere basta (W^+) che è gratis per la convessità in p della Lagrangiana.

2 - Via trucco di convessità

$$F(u) = \int_a^b \sqrt{\frac{1+u^2}{A-u}} dx$$

Cambio variabile ponendo

$$A-u = \frac{1}{2} v^2$$

Riscrivo il funzionale nella nuova variabile:

$-\ddot{u} = v\dot{v}$, quindi

$$\hat{F}(v) = \int_a^b \sqrt{\frac{1+v^2\dot{v}^2}{v^2}} \cdot \sqrt{2} \, dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{1}{v^2}} \, dx \quad (\text{a meno di } \sqrt{2})$$

Ora con qualche conto si vede che

$$L(s,p) := \sqrt{p^2 + \frac{1}{s^2}}$$

è convessa nella coppia (s,p) !!!

Quindi le sol. di (ELE) (e le cicloidi riscritte nella variabile v lo sono) sono punti di minimo.

— o — o —

Calcolo delle Variazioni — LEZIONE 44

Note Title

05/12/2017

Problema di DIDONE - cartesiano (cercare mitologia Enea...)

In generale: trovare la regione di area max con perimetro assegnato.

Versione duale: tra tutte le regioni di area data, trovare quella di perimetro minimo.

Versione cartesiana

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b \sqrt{1+u^2} dx}_{\text{lungh. grafico.}} : \underbrace{\int_a^b u(x) dx}_{\substack{\uparrow \\ \text{area sotto il} \\ \text{grafico}}} = m, u(a)=u(b)=0 \right\}$$

$\uparrow$
dato

Problema di minimo vincolato con

$$F(u) := \int_a^b \sqrt{1+u^2} dx \quad G(u) := \int_a^b u dx$$

$\uparrow$
Brutte notizie: crescita lineare

1) Metodo indiretto: supponiamo un p.to di min.
Allora vale almeno una delle 2 possibilità:

$$\rightarrow \delta G(u_0, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in \dots$$

$$\rightarrow \delta (F + \lambda G)(u_0, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in \dots$$

$\delta G(u_0, v) = 0 \Leftrightarrow u_0$ risolve (ELE) di G , cioè

$0 = 1$, il che è impossibile

$\delta (F + \lambda G)(u_0, v) = 0 \Leftrightarrow u_0$ risolve (ELE) di $F + \lambda G$ che ha Lagrangiana

$$\sqrt{1 + \dot{u}^2} + \lambda s$$

$$\left(\frac{\dot{u}}{\sqrt{1 + \dot{u}^2}} \right)' = \lambda$$

Brutal mode: $\frac{\dot{u}}{\sqrt{1 + \dot{u}^2}} = \lambda x + k$

$$\dot{u} = (\lambda x + k) \sqrt{1 + \dot{u}^2} \quad \leadsto \quad \dot{u}^2 = (\lambda x + k)^2 (1 + \dot{u}^2)$$

$$\leadsto \dot{u}^2 = \frac{(\lambda x + k)^2}{1 - (\lambda x + k)^2} \quad \leadsto \quad \dot{u}(x) = \pm \frac{\lambda x + k}{\sqrt{1 - (\lambda x + k)^2}}$$

La primitiva si vede a occhio:

$$u(x) = \pm \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda x + k)^2} + c$$

$$\lambda u(x) - c = \pm \sqrt{1 - (\lambda x + k)^2} \quad \leadsto$$

$$(\lambda u(x) - c)^2 + (\lambda x + k)^2 = 1$$

Quindi il grafico di u è contenuto in una circonferenza!

2 Determinare il valore dei parametri

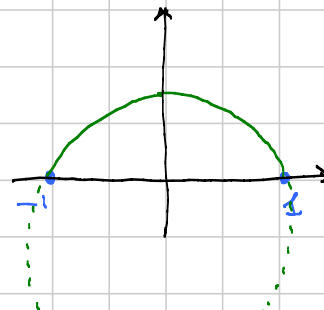
$$\min \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} dx : \int_{-1}^1 u(x) = m, u(-1) = u(1) = 0 \right\}$$

$\uparrow$
 $m > 0$

Parametri: λ, c, k e ho 3

equazioni

$$\begin{cases} u(1) = 0 \\ u(-1) = 0 \\ \text{area} = m \end{cases}$$



Si vuole per simmetria che $k=0$, cioè centro sull'asse y .
Le altre 2 condizioni determinano univocamente c e λ .

Sorpresa (nemmeno troppo): la soluzione esiste unica
se e solo se $m \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 $\uparrow$ area semicerchio

3 Se $m \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'unico arco di circ. trovato risolve
(ELE)

Dim. Derivare e sostituire.

Domande che restano

- 1 - la soluzione di ELE è davvero minimo?
- 2 - è unica?
- 3 - che succede quando $m > \frac{\pi}{2}$?

4 Se $m \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'arco di circ. è l'unico minimo.

Per un lemma visto prec. una cond. suff. è che $u_0(x)$
sia minimo non vincolato per $F + \lambda G$.

In questo caso è davvero minimo, e si può vedere in due modi

1 → Campi di Weierstrass.

Considero le traslate verticali di $u_0(x)$. Fabbiamo e risolviamo (ELE)

$$\left(\frac{\dot{u}}{\sqrt{1+\dot{u}^2}} \right)' = \lambda$$

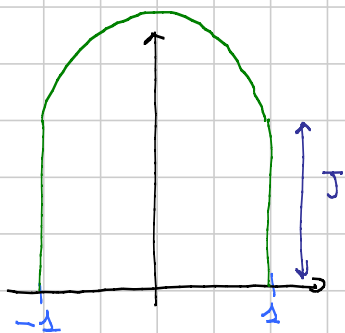
Se u_0 risolve, allora $u_0 + k$ risolve.
(w^+) segue dalla convessità in p .



2 → Per convessità, perché $\sqrt{1+p^2} + \lambda s$ è convessa nella coppia (s, p) .

5 Che succede per $m > \frac{\pi}{2}$

Non c'è il minimo, e l'inf è "realizzato" dallo STADIO



Questa paga $2J + \pi$
(verificare per approssimazione)
(vedi lezione sulle crescite lineari)

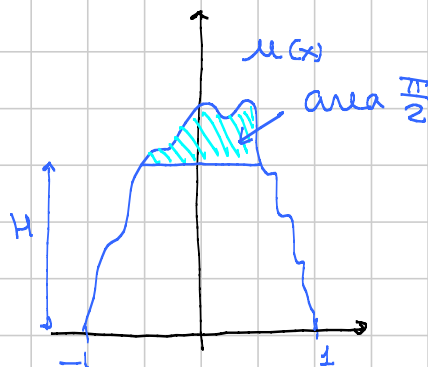
Perché questo è l'inf.?

- Scelgo una altezza H tale che la parte alta abbia area $\frac{\pi}{2}$
- Osservo che

$$\text{lunghezza grafica} \geq 2H + \pi$$

↑
pezzi
lateral

↑
pezzo
centrale
(per risultato
precedente)



Resta da stimare H

$$m = \text{area sotto grafico} = \text{area alta} + \text{area bassa}$$

$$\leq \frac{\pi}{2} + 2H$$

Quindi $2H \geq m - \frac{\pi}{2}$ e quindi

$$\text{lunghezza grafico} \geq 2H + \pi \geq m - \frac{\pi}{2} + \pi = m + \frac{\pi}{2}$$

Per concludere basta verificare che $\text{lunghezza stavolta} = m + \frac{\pi}{2}$
— o — o —

Oss. Il problema "rilassato" ammette tratti verticali che pagano come la loro lunghezza.

Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 45

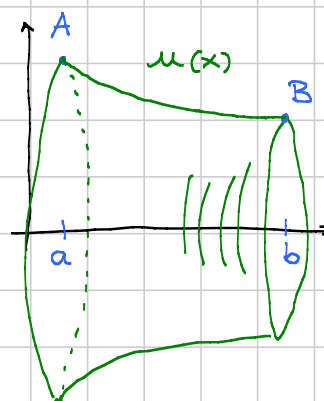
Note Title

12/12/2017

SUPERFICIE DI ROTAZIONE DI AREA MINIMA1) Funzionale

Tra tutte le sup. di rotazione assegnate per $x=a$ e $x=b$, trovare quella di area minima

$$\text{Area} = \underbrace{2\pi \int_a^b u \sqrt{1+u'^2} dx}_{F(u)}$$



$$\min \{ F(u) : u \in C^1([a,b]), \underbrace{u(a)=A, u(b)=B}_{\text{DBC}}, \underbrace{u(x) \geq 0}_{\text{ostacolo}} \}$$

Cattive notizie:

$$L(x, s, p) := s \sqrt{1+p^2} \text{ ha crescita lineare in } p.$$

2) Equazione di Eulero (con formula Erdmann)

$$u L_p(u, u') = c + L(u, u') \leadsto \frac{u u'^2}{\sqrt{1+u'^2}} = c + u \sqrt{1+u'^2}$$

$$\leadsto \cancel{u u'^2} = c \sqrt{1+u'^2} + u + \cancel{u u'^2} \leadsto \sqrt{1+u'^2} = -\frac{u}{c}$$

$$\leadsto 1+u'^2 = \frac{u^2}{c^2} \leadsto u'^2 = \frac{u^2-c^2}{c^2} \leadsto u' = \pm \sqrt{\frac{u^2-c^2}{c^2}}$$

Eq. diff. che integro separando le variabili

$$\int \frac{c}{\sqrt{u^2-c^2}} du = \int \pm dx \leadsto \text{pongo } u = cv \quad du = c dv$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \cdot c \, dv = \pm x + k \quad \leadsto$$

$$\leadsto \arccos R v = \pm \frac{x}{c} + k \quad \leadsto v(x) = \cos R \left(\pm \frac{x}{c} + k \right)$$

$$\leadsto v(x) = \cos R \left(\frac{x}{c} + k \right) \quad \leadsto u(x) = c \cos R \left(\frac{x}{c} + k \right)$$

↑
cos R è pari

Teorema Per ogni valore ammissibile di c e k ($c > 0$ e $k \in \mathbb{R}$) la funzione

$$u(x) = c \cos R \left(\frac{x}{c} + k \right)$$

risolve l'equazione di Eulero del problema.

Dim Basta sostituire. 😊

[3] Trovare c e k in modo da soddisfare le DBC.

Supponiamo WLOG che sia $a = -r$ e $b = r$ per qualche $r > 0$.
Dovrò risolvere

$$\begin{cases} c \cos R \left(-\frac{r}{c} + k \right) = A \\ c \cos R \left(\frac{r}{c} + k \right) = B \end{cases} \quad \text{Pongo } t := \frac{r}{c} \text{ e scrivo } C \text{ ed } S$$

invece di $\cos R$ e $\sin R$

$$C(-t+k) = \frac{A}{c} = \frac{A}{r} t$$

$$C(t+k) = \frac{B}{c} = \frac{B}{r} t$$

Uso le formule di addizione

$$\begin{cases} C(t)C(k) - S(t)S(k) = \frac{A}{2r}t & C(t)C(k) = \frac{B+A}{2r}t \\ C(t)C(k) + S(t)S(k) = \frac{B}{2r}t & S(t)S(k) = \frac{B-A}{2r}t \end{cases}$$

Ricavo quelli con il k e impongo $C(k)^2 - S(k)^2 = 1$

$$\left(\frac{B+A}{2r}\right)^2 \frac{t^2}{C(t)^2} - \left(\frac{B-A}{2r}\right)^2 \frac{t^2}{S(t)^2} = 1$$

↑ osservo che $t \neq 0$ (>0)

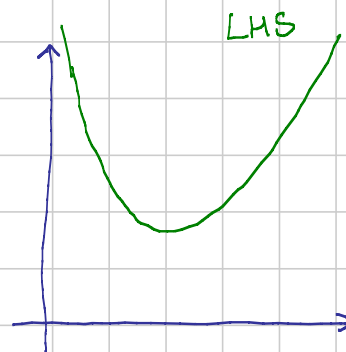
Moltiplico per $\frac{C(t)^2}{t^2}$ e riorganizzo

$$\boxed{\frac{C(t)^2}{t^2} + \left(\frac{B-A}{2r}\right)^2 \frac{1}{S(t)^2} = \left(\frac{B+A}{2r}\right)^2}$$

Analisi 1: si verifica che $\frac{C(t)}{t}$, $\frac{1}{S(t)}$ e i loro quadrati sono funzioni convesse, quindi la loro somma è convessa.

A seconda dei valori di A, B, r possono esserci 0, 1, 2 soluzioni per t

Dato t , poi trovo univocamente c e k



Domande:

→ che succede quando ci sono 2 soluzioni?

→ " " " non ci sono solus. ?

— o — o —

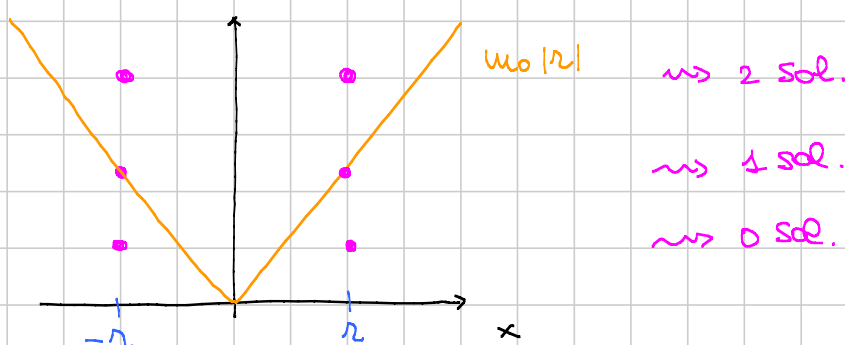
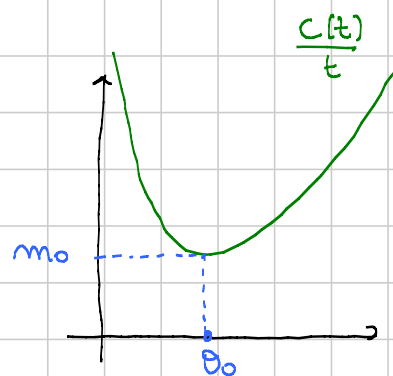
[4] Caso speciale $A=B$ Si vede da $S(t)S(k) = \frac{B-A}{2r}$ che deve essere $k=0$, cioè la solus. è simmetrica risp. asse y .

L'equazione per t diventa

$$\frac{C(t)^2}{t^2} = \left(\frac{A}{r}\right)^2 \quad \leadsto \quad \boxed{\frac{C(t)}{t} = \frac{A}{r}}$$

Quindi

- $A > u_0 r \leadsto 2$ soluz.
- $A = u_0 r \leadsto 1$ soluz.
- $A < u_0 r \leadsto 0$ soluz.



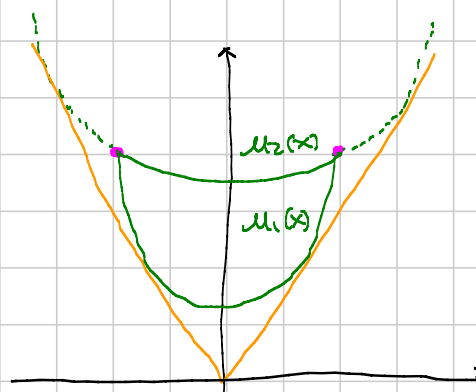
Mettiamoci nel caso $A > u_0 r$, come sono fatte le soluz.?
Sono del tipo

$$u(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

e ci sono 2 valori di c che vanno bene. Siano $c_1 < c_2$

$u_2(x)$ corrisponde a c_2

$u_1(x)$ corrisponde a c_1



Oss. Tutte le cicloidi della famiglia sono tangenti a $u_0|x|$:

→ $u_2(x)$ è tangente esternamente a $[-1, 1]$

→ $u_1(x)$ " " internamente a $[-1, 1]$

Dim. $c \cos R\left(\frac{x}{c}\right) \geq m_0 x \quad \frac{\cos R\left(\frac{x}{c}\right)}{\frac{x}{c}} \geq m_0$

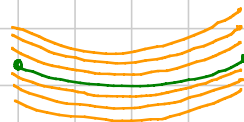
con uguaglianza se e solo $\frac{x}{c} = 0 \quad x = 0 = c$

Da questo seguono le tesi.

Fatti :

- ① $u_2(x)$ è sempre SLM
- ② $u_2(x)$ è GM se λ è abbastanza piccolo
- ③ $u_1(x)$ non è nemmeno DLM.

Dim ① Senza un campo di W . Basta usare le cicloidi con valori di c vicini
 La (w^+) è gratis per la convessità in p della Lagrangiana



Dim ③ Manca la (J) . Se fosse vera la (J) in $[-1, 1]$ sarebbe vera la (J^+) in ogni sottointervallo. Ma allora troverei un campo di W che circonda la $u_2(x)$ in un intorno dei p.ti di tangenza, il che è impossibile perché le solus. stanno sopra $m_0/2$.

Dim. di ② Se io considero la $u_2(x)$ in un intervallo $[-r_0, r_0]$, con r_0 piccolo, allora lì è GM.

$u_2(x)$ è meglio di tutte le u che stanno nel campo.

Mostro che non conviene uscire.

Prendiamo rett. di altezza h contenuto nel campo.

Sia $v(x)$ una sol. che esce in un certo c . Allora

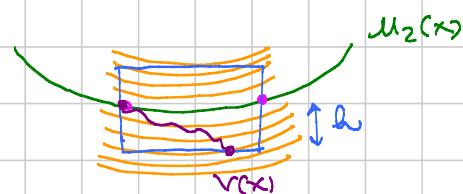
$$\int_{-n}^n v \sqrt{1+\dot{v}^2} dx \geq \int_{-n}^c v \sqrt{1+\dot{v}^2} dx \geq \int_{-n}^c v \cdot |\dot{v}| dx$$

$$= \int_{-n}^c |v \dot{v}| dx \geq \left| \int_{-n}^c v \dot{v} dx \right| = \frac{1}{2} |v(c)^2 - v(-n)^2|$$

= cosa fissa che dipende da h

$$\geq \int_{-n}^n u_2 \sqrt{1+\dot{u}_2^2} dx$$

↑
vera per forza se n è abbastanza piccolo.
(gli n sono quelli chiamati n_0 nell'enunciato).

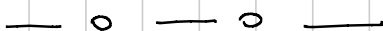


[5] Cosa succede se non esiste soluz.? Chi è il concorrente di $u_2(x)$ per essere G.M.?

Il concorrente è la soluzione che va subito a 0 che paga $2\pi A$ da ogni parte.



Geometricamente corrisponde a considerare 2 dischi uniti da un filo sottilissimo.



Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 46

Note Title

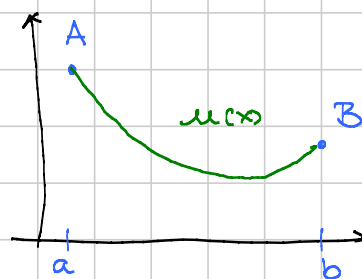
12/12/2017

HEAVY CHAIN

Catena

- [1] Problema Trovare la forma assunta da un filo **NON ESTENSIBILE** sospeso tra due sostegni fissi.

Dalla fisica sappiamo che la posizione di equilibrio è quella più bassa possibile.



Matematicamente

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b u \sqrt{1+u'^2} dx}_{\int y ds} : u \in C^1 \dots + \text{DBC} + \underbrace{\int_a^b \sqrt{1+u'^2} dx = l}_{\text{lunghezza fissa}} \right\}$$

- [2] Equazione di Eulero per problema vincolato

$$F(u) = \int_a^b u \sqrt{1+u'^2} dx$$

$$G(u) = \int_a^b \sqrt{1+u'^2} dx$$

Brutte notizie: crescita lineare rispetto ad u'

Supponiamo u p.to di min. Per il metodo dei moltip. ci sono due casi

$$\rightarrow \delta G(u, v) = 0 \text{ per ogni } v \dots$$

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \right)' = 0 \rightsquigarrow \boxed{\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}} = \text{cost.} \rightsquigarrow u' = \text{cost} \rightsquigarrow u = \text{retta}$$

iniettiva

$\rightsquigarrow$ impossibile tranne nel caso banale $l = \|B-A\|$

→ $\delta F(u, v) = \lambda \delta G(u, v)$, cioè $\delta (F - \lambda G)(u, v) = 0$
per ogni $v \dots$

→ u risolve (ELE) per $F - \lambda G$ che ha Lagrangiana

$$S\sqrt{1+p^2} - \lambda\sqrt{1+p^2} = (S-\lambda)\sqrt{1+p^2}$$

Scrivo (ELE) in forma Erdmann

$$\frac{(u-\lambda)u'}{\sqrt{1+u'^2}} = c + (u-\lambda)\sqrt{1+u'^2}$$

e osservo che $u(x)$ risolve questa se e solo se $u(x) - \lambda$ risolve la (ELE) per la sup. di rob. di area minima.

Quindi le soluzioni sono del tipo

$$u(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c} + k\right) + \lambda$$

[3] Trovare il valore dei parametri. Calcolare c, k, λ usando 2 DBC + lunghezza.

Come prima supponiamo $[a, b] = [-1, 1]$

$$\begin{aligned} c \cosh\left(-\frac{1}{c} + k\right) + \lambda &= A \\ c \cosh\left(\frac{1}{c} + k\right) + \lambda &= B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l &= \int_{-1}^1 \sqrt{1+u'(x)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{c} + k\right)} dx \\ &= \int_{-1}^1 \cosh\left(\frac{x}{c} + k\right) dx = \left[c \sinh\left(\frac{x}{c} + k\right) \right]_{x=-1}^{x=1} \end{aligned}$$

$$c \sinh\left(\frac{1}{c} + k\right) - c \sinh\left(-\frac{1}{c} + k\right) = l$$

Ponendo come prima $t := \frac{\lambda}{c}$

$$C(-t+k) - C(t+k) = \frac{A-B}{c} = \frac{A-B}{\lambda} t$$

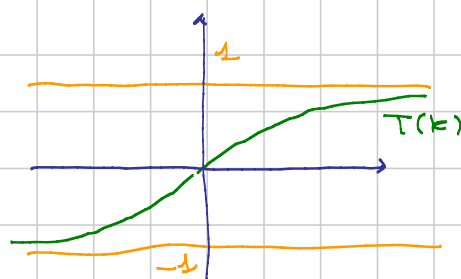
$$S(t+k) - S(-t+k) = \frac{\ell}{c} = \frac{\ell}{\lambda} t$$

Uso le formule di addizione:

$$\cancel{C(t)C(k)} - \cancel{S(t)S(k)} - \cancel{C(t)C(k)} - \cancel{S(t)S(k)} = \frac{A-B}{\lambda} t$$

$$\cancel{S(t)C(k)} + \cancel{C(t)S(k)} + S(t)C(k) - \cancel{C(t)S(k)} = \frac{\ell}{\lambda} t$$

$$\begin{cases} S(t)S(k) = \frac{B-A}{2\lambda} t \\ S(t)C(k) = \frac{\ell}{2\lambda} t \end{cases} \quad \text{Divido} \quad \boxed{T(k) = \frac{B-A}{\ell}}$$



Risolvibile univocamente se

$$\frac{B-A}{\ell} \in (-1, 1)$$

e questo è ovvio per la geometria del problema (cateto < ipotenusa < lunghezza corda)

In questo modo trovo k unico. Come trovo t (cioè c)?

$$\begin{aligned} \text{Ad esempio come } \frac{S(t)}{t} &= \frac{\ell}{2\lambda} \frac{1}{C(k)} = \frac{\ell}{2\lambda} \sqrt{1 - \frac{S(k)^2}{C(k)^2}} \\ &= \frac{\ell}{2\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{B-A}{\ell}\right)^2} \end{aligned}$$

Si verifica (Analisi 1) che

$\frac{S(t)}{t}$ è convessa, quindi avrà

2 soluzioni simmetriche se $RHS > 1$



$$\frac{l^2}{4r^2} \left(1 - \frac{(B-A)^2}{l^2} \right) > 1 \Leftrightarrow l^2 - (B-A)^2 > 4r^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{4r^2 + (B-A)^2}_{\text{lunghezza segm. che congiunge le DBC}} < l^2 \quad \text{☺}$$

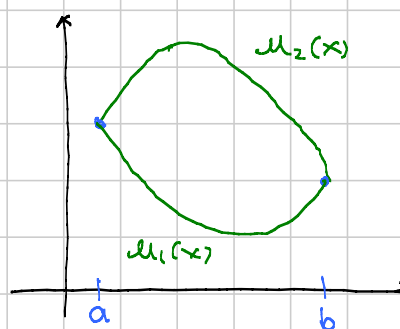
lunghezza segm. che
congiunge le
DBC

Se $l >$ lunghezza segmento, allora (ELE) ha due soluzioni (λ segue univocamente), corrispondenti a valori di t , dunque di c , opposti.

4 Chi sono $\mu_1(x)$ e $\mu_2(x)$.

Si potrebbe dire che

- $\mu_1(x)$ è GM
- $\mu_2(x)$ è p.to di max globale.



Per dimostrarlo, basterebbe mostrare che max/min esistono, e per questo si potrebbe provare con il metodo diretto.

— o — o —

Parentesi su problema analogo, ma più semplice

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 u \sqrt{1+u^2} dx : u(-1) = u(1) = 0, \int_{-1}^1 u^2 dx = 7 \right\}$$

Cosa succede con il metodo diretto?

☺ Il vincolo integrale + BC $\leadsto$ compattezza succ. min. via Ascoli-Arzelà (e anche di quelle non min., ad esempio massimizzanti).

☺ Passare al limite nel funzionale si può per la convessità rispetto ad u .

☹️ Il vincolo integrale sulle derivate NON passa al limite rispetto alla debole sulle derivate.

USCITA CLASSICA → Rilassamento del vincolo
→ Saturazione del vincolo

① Considero il pbm

$$\min \{ \dots \text{ tutto uguale } \dots \int_{-1}^1 u'^2 dx \leq 7 \}$$

Su questo il metodo diretto funziona $\leadsto$ p.to di cui u_0

② Dimostro che u_0 "satura il vincolo", cioè lo soddisfa con il segno di $=$. A quel p.to risolve pbm. originario.

Idea: se soddisfa il vincolo con $<$, posso modificare u_0 da qualche parte in modo da migliorare $F(u_0)$.

Queste idee si possono fare funzionare per la catenaria. Ad esempio si può scrivere il problema usando curve parametrizzate per lunghezze d'arco.

$\gamma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ che soddisfano le BC.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$x(0) = a \quad x(l) = b$$

$$y(0) = A \quad y(l) = B$$

$$F(x, y) := \int_0^l y(t) dt$$

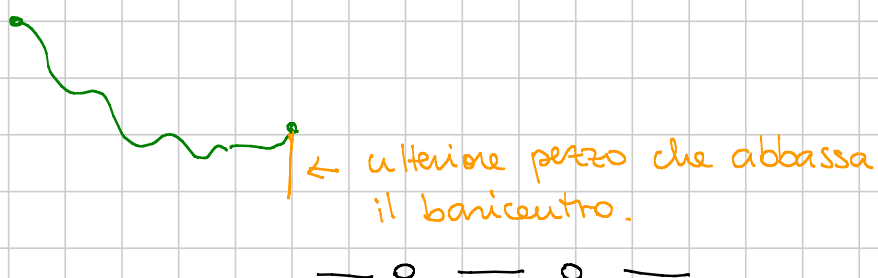
$$\text{vincolo: } \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = 1 \quad \text{per ogni } t \in [0, l]$$

Minimizzo rilassando il vincolo : $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \leq 1 \quad \forall t$
(stabile per conv. debole: vedi def. pbm. con ostacolo puntuale)

Metodo diretto $\Rightarrow$ esistono curve che realizzano
max/min.
(e verificano la disug.)

Resta da dimostrare che saturano il vincolo.

Se sono più corte, avanza catena e posso ancora andare
un po' più in giù 😊



Calcolo delle Variazioni

LEZIONE 47

Note Title

15/12/2017

PROBLEMI DI OMOGENIZZAZIONE

Def. (Greche) Dati due numeri reali α, β definiamo

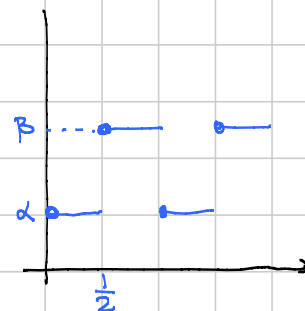
$$a(x) := \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Estendiamo $a(x)$ a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità.

Dato $n \geq 1$ intero poniamo

$$a_n(x) := a(nx)$$

↑ le oscillazioni hanno periodo $\frac{1}{n}$.



Esercizio $a_n(x) \rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2}$ in ogni L^p con $p < +\infty$ (conv. debole).

Consideriamo i funzionali

$$F_n(u) := \int_a^b u'^2 + a_n(x) u^2$$

$$F_n(u) := \int_a^b a_n(x) u'^2 + u^2$$

Problema: Γ -limite di queste due famiglie.

— o — o —

Teorema Sia $a_n(x)$ una succ. di funzioni $a_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $a_n(x) \geq 0$ sempre

(ii) $a_n(x) \leq M$ con M indipendente da tutto

(iii) $a_n \rightarrow a_\infty$ ad esempio debole in $L^2((a,b))$.

Allora

$$F_n(u) = \int_a^b (u^2 + a_n(x)u^2) dx \xrightarrow{\Gamma} \int_a^b (u^2 + a_\infty(x)u^2) dx = F_\infty(u)$$

Dim. Occorre fare 2 verifiche (rispetto alla metrica di L^2)

LIMSUP Per ogni $u \in L^2$ esiste $u_n \rightarrow u$ t.c. $F_n(u_n) \rightarrow F_\infty(u)$.

Basta farlo per $u \in C^1$ (denso in energia) nel qual caso $u_n \equiv u$ è ok.

$$\int_a^b a_n(x) u^2 dx \rightarrow \int_a^b a_\infty(x) u^2 dx$$

↑
fisso e
limitato (basterà L^2)

Questo funziona anche per ogni $u \in H^1$.

LIMINF Data una qualunque $u_n \rightarrow u_\infty$ devo dim. che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(u_n) \geq F_\infty(u_\infty)$$

WLOG posso supporre $F_n(u_n) \leq M$, quindi essendo $a_n(x) \geq 0$ deduco

$$\int_a^b u_n^2(x) \leq M$$

A meno di s. succ. $u_n \rightarrow u_\infty$ e quindi uso la SCI della norma

$$\liminf \int_a^b u_n^2 \geq \int_a^b u_\infty^2$$

Sul secondo pezzo ho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b a_n(x) u_n^2(x) dx = \int_a^b a_\infty(x) u_\infty^2(x) dx$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 a_∞ u_∞^2 unif
 — o — o —

Oss. Non abbiamo usato davvero che $a_n(x) \geq 0$. Quello che basta è che $a_n(x) \geq -c$ in maniera tale che

$$\int_a^b (u^2 - cu) \geq \varepsilon \int_a^b u^2 \quad (\text{vedi teoria funz. quadratiche})$$

— o — o —

Passiamo al caso

$$F_n(u) := \int_a^b a_n(x) u^2 + u^2 \quad (a_n = \text{greche})$$

Ci basta in realtà considerare $F_n(u) := \int_a^b a_n(x) u^2$
(l'altro termine è perturb. continua)

Vogliamo dimostrare che, se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, allora

$$F_n(u) \xrightarrow{T} c \int_a^b u^2 dx$$

dove c è la media armonica di α e β , cioè

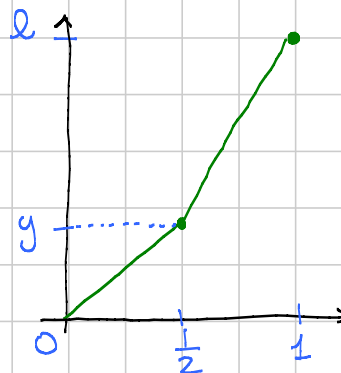
$$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}{2} \quad \rightsquigarrow \quad c = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

— o — o —

PROBLEMA DI CELLA

$$\min \left\{ \int_0^1 a(x) u^2 : u(0) = 0, u(1) = l \right\}$$

Per cose già viste, il minimo è una retta in $(0, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 1)$, ma il coeff. ang. può essere diverso



$$\alpha (2y)^2 \cdot \frac{1}{2} + \beta (2(l-y))^2 \cdot \frac{1}{2} \rightsquigarrow \text{minimo in } y$$

$$2\alpha y - 2\beta(l-y) = 0 \rightsquigarrow y(2\alpha + 2\beta) = +2\beta l$$

$$\rightsquigarrow y = \frac{\beta}{\beta + \alpha} l$$

Sostituendo trovo il valore del minimo

$$2 \left\{ \alpha \frac{\beta^2}{(\beta + \alpha)^2} l^2 + \beta \frac{\alpha^2}{(\beta + \alpha)^2} l^2 \right\} = \frac{2\alpha\beta}{(\beta + \alpha)^2} (\beta + \alpha) l^2$$

$$= \boxed{\frac{2\alpha\beta}{\beta + \alpha}} l^2 = c$$

Oss. Il minimo del problema di cella è lo stesso del pbm

$$\min \left\{ \int_0^1 c u^2 : u(0) = 0, u(1) = l \right\}$$

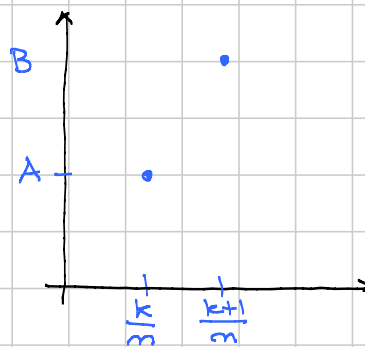
media
armonica

— o — o —

Problema di cella riscaldato

$$\min \left\{ \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} a(mx) u^2 : u\left(\frac{k}{n}\right) = A, u\left(\frac{k+1}{n}\right) = B \right\}$$

$$= c \frac{1}{n} [n(B-A)]^2 = c n (B-A)^2$$



Oss. Il minimo del problema riscaldato è lo stesso che se avessi minimizzato

$$\min \left\{ \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} c u^2, \quad \underbrace{u\left(\frac{k}{n}\right)}_A = A, \quad \underbrace{u\left(\frac{k+1}{n}\right)}_B = B \right\}$$

LIMINF in un caso speciale

Supponiamo che $u_n \rightarrow u_\infty$ in $L^2((0,1))$. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq C (u_\infty(1) - u_\infty(0))^2$$

Come al solito ci riduciamo a $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_\infty$ e $u_n \rightarrow u_\infty$ uniformemente.

$$F_n(u_n) = \int_0^1 a(x) \tilde{u}_n(x)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} a(x) \tilde{u}_n(x)^2 dx$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1} c n \left(\underbrace{u_n\left(\frac{k+1}{n}\right)}_B - \underbrace{u_n\left(\frac{k}{n}\right)}_A \right)^2$$

pbm.
alla
riscaldato

$$= c n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - u_n\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2$$

$$\geq c \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - u_n\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2$$

c.s.

$$= C (u_n(1) - u_n(0))^2$$

Facciamo il liminf e sfruttando la conv. unif. segue la tesi!

Con passaggi quasi analoghi si ottiene una *liminf* + generale:

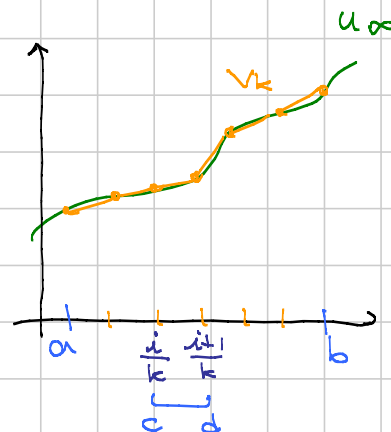
se $u_n \rightarrow u_\infty$ in $L^2((c,d))$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_c^d a(x) u_n^2 \geq c \underbrace{(d-c)}_{\substack{\text{media} \\ \text{armonica} \\ \text{di } a \in \beta}} \left(\underbrace{\frac{u_\infty(d) - u_\infty(c)}{d-c}}_{\substack{\text{lunghezza} \\ \text{intervallo}}} \right)^2$$

LIMINF GENERALE Sia $u_n \rightarrow u$ in $L^2((a,b))$.

Fisso un intero positivo k e divido (a,b) in k parti uguali, chiamando v_k la funzione che unisce i punti.

In ogni sottointervallo applico l'enunciato precedente, ottenendo



$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} a(x) u_n^2 &\geq c \cdot \frac{1}{k} \left(\frac{u_\infty\left(\frac{i+1}{k}\right) - u_\infty\left(\frac{i}{k}\right)}{\frac{1}{k}} \right)^2 \\ &= \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} c v_k^2 \end{aligned}$$

Sommando su k troviamo

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F_\infty(v_k)$$

per ogni $k \geq 1$ intero.

Facendo il sup su k sappiamo che

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} F_\infty(v_k) = F_\infty(u_\infty)$$

per risultati precedenti del tipo "unisco i puntini".

LIMSOP (Vedi annate precedenti)

Dato u speciale, devo trovare $u_n \rightarrow u$ in L^2 t.c.

$$F_n(u_n) \rightarrow F_\infty(u) = C \int_a^b u^2.$$

Scelgo come densa quelle affini a tratti.

So approx le affini a tratti se so approssimare le rette.

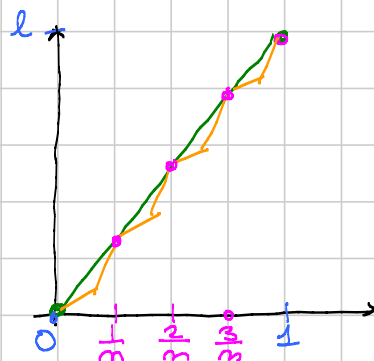
So approx le rette se so approx la retta "canonica"

Dato n , divido $(0,1)$ in n parti

In ogni tratto $a(mx)$ è metà α e metà β .

In ogni tratto definisco $u_n(x)$ usando il pbm. di cella.

È evidente $u_n \rightarrow u$ in L^2 e che



$$F_n(u_n) = F_\infty(\text{retta}) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Oss. Potevamo aspettarsi la media armonica pensando all'eq. di Eulero

$$(a(mx)u)' = u$$

Quando vado ad esplicitare, $a(mx)$ va al denominatore.

Calcolo delle Variazioni - LEZIONE 48

Note Title

15/12/2017

FUNZIONALE DI MODICA-MORTOLA

$$\min \left\{ \int_0^1 \varepsilon \dot{u}^2 + \underbrace{(u^2-1)^2}_{w(u)} : u(0)=0 \right\}$$

(doppio pozzo)



Idea: u vorrebbe essere ± 1 , una parte da 0.

1 Per ogni $\varepsilon > 0$, il minimo esiste (solito metodo diretto)

2 Detto m_ε il minimo, allora $m_\varepsilon \rightarrow 0$

(si può vedere in tanti modi, in fondo il Γ -limite è il funz.

$\int_0^1 (u^2-1)^2$ con perdita del dato al bordo).

3 Riscaltiamo il problema ponendo

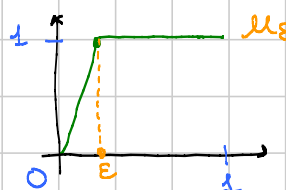
$$MM_\varepsilon(u) := \int_0^1 \varepsilon \dot{u}^2 + \frac{1}{\varepsilon} (u^2-1)^2$$

e considerando il pbm. di minimo

$$\min \left\{ MM_\varepsilon(u) : u \in C^1([0,1]), u(0)=0, \underbrace{u(x) \geq 0}_{\text{idea}} \text{ in } [0,1] \right\}$$

4 Per ogni $\varepsilon > 0$ il minimo esiste ed è limitato dall'alto.

Si vede bene che $MM_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \text{costante}$

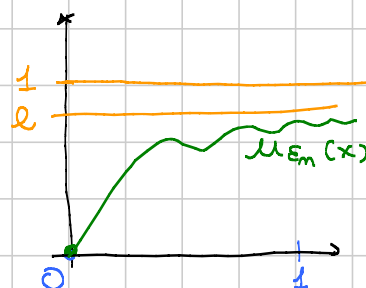


5 Per ogni $\varepsilon > 0$, sia $\mu_\varepsilon(x)$ uno dei punti di min. di $MM_\varepsilon(u)$. Allora

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\max_{x \in [0,1]} \mu_\varepsilon(x) \right) \geq 1$$

Se non fosse così, vorrebbe dire che esiste $\ell < 1$ ed esiste una succ. $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tale che

$$\max \mu_{\varepsilon_n}(x) \leq \ell \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



Ma allora

$$MM_{\varepsilon_n}(\mu_{\varepsilon_n}) \geq \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon_n} (\mu_{\varepsilon_n}^2 - 1)^2 \geq \frac{1}{\varepsilon_n} (\ell^2 - 1)^2$$

$\downarrow$
 $+\infty$

mentre sappiamo che il LHS è limitato dall'alto.

6 Per ogni $\varepsilon > 0$, il minimo è limitato dal basso da una costante strettamente positiva.

Detto meglio: considero la funzione

$$G(x) := \int_0^x |s^2 - 1| ds \quad = \text{primitiva di } \sqrt{w(s)}$$

Dico che, detto m_ε il minimo, vale

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m_\varepsilon \geq 2G(1) > 0$$

Disuguaglianza fondamentale

Sia u_ε una funzione C^1 qualunque, e sia $(c, d) \subseteq (0, 1)$ un sottointervallo.

Allora

$$\int_c^d \varepsilon u_\varepsilon'^2 + \frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon^2 - 1)^2 \geq 2 \int_c^d |u_\varepsilon| \cdot |u_\varepsilon^2 - 1|$$

$A^2 + B^2 \geq 2|A \cdot B|$

$$A = \sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon' \quad B = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \dots$$

$$= 2 \int_c^d \left| \frac{d}{dx} G(u_\varepsilon) \right| dx$$

$$\geq 2 \left| \int_c^d \frac{d}{dx} G(u_\varepsilon) dx \right|$$

$$\underset{0}{=} 2 \underset{0}{\left| G(u_\varepsilon(d)) - G(u_\varepsilon(c)) \right|}$$

Se $u_\varepsilon(x)$ è un p.to di minimo, applico il risultato con $c=0$ e $d_\varepsilon = \text{p.to di max di } u_\varepsilon(x) \text{ in } [0, 1]$

Per un p.to precedente sappiamo che $u_\varepsilon(d_\varepsilon)$ ha liminf ≥ 1 e quindi

$$u_\varepsilon \geq \int_0^{d_\varepsilon} \dots \geq 2 \left| G(u_\varepsilon(d_\varepsilon)) - \underset{0}{G(0)} \right|$$

Passando al liminf otteniamo

$$\boxed{\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u_\varepsilon \geq 2 G(1)}$$

7 Voglio dim. che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m_\varepsilon = 2G(1)$$

Tutto sta ad avere uguaglianza al 1° passaggio

$$\varepsilon \dot{u}^2 + \frac{1}{\varepsilon} (u^2 - 1)^2 \geq 2 |\dot{u}| \cdot |u^2 - 1|$$

Vale = se e solo se "A=B" cioè se e solo se

$$\sqrt{\varepsilon} \dot{u} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (1 - u^2) \quad (\text{occhio ai segni})$$

$$\dot{u} = \frac{1}{\varepsilon} (1 - u^2)$$

Questa eq. diff. si integra $\frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{\varepsilon} dx$

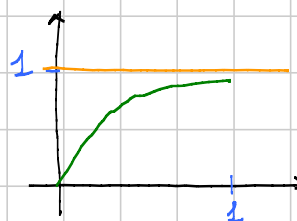
$$\arctan u = \frac{x}{\varepsilon} + k$$

$$u(x) = \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon} + k\right)$$

Tenendo conto che $u(0) = 0$ troviamo $k = 0$.

Quindi per avere uguaglianza basta porre

$$m_\varepsilon(x) = \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$



Oss. La funzione $m_\varepsilon(x)$ NON è mai p.to di min. di M_ε ad ε fisso perché NON soddisfa la NBC che nasce in $x=1$.

Tuttavia è asintoticamente un "quasi-minimo" nel senso che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} MM_\varepsilon(u_\varepsilon) = 2G(1)$$

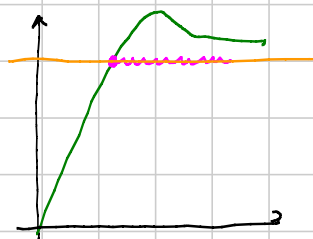
8 Mettendo insieme i pti 6 e 7 abbiamo il limite del valore del minimo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \min \{ MM_\varepsilon(u) : u(0) = 0, u(x) \geq 0 \text{ sempre} \} = 2G(1)$$

9 Cosa possiamo dire dei pti di min $u_\varepsilon(x)$?

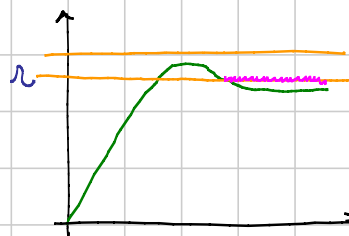
→ Stanno sempre ≤ 1

(Se raggiungo quota 1, è stupido non rimanerci)



→ Sono monotoni crescenti

Ancora una volta dopo aver toccato 2 volte la retta ε non conviene scendere ulteriormente.

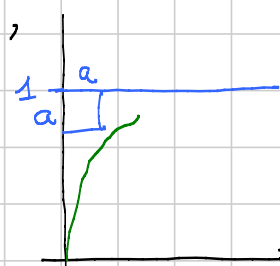


→ Detti $u_\varepsilon(x)$ i pti di minimo, si vede che

$$u_\varepsilon(x) \rightarrow 1$$

uniformemente in $[a, 1]$ per ogni $a > 0$.

Lemma Per ogni quadrato come in figura, si ha che $u_\varepsilon(x)$ per ε piccolo entra almeno una volta nel quadrato



Dim. Se $u_\varepsilon(x)$ non entra nel $\square$, allora

$$\text{MM}_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \int_0^a \frac{1}{\varepsilon} (u^2 - 1)^2 dx = \frac{1}{\varepsilon} a \underset{\downarrow +\infty}{(a^2 - 1)^2}$$

$\downarrow$
 $2G(1)$

assunto.

— o — o —

Per monotonia, una volta entrata nel $\square$, $u_\varepsilon(x)$ NON scende più.

— o — o —

Finestra sul futuro Chi è il Γ -limite di $\text{MM}_\varepsilon(u)$?
Chiamiamolo $\text{MM}_0(u)$.

① $\text{MM}_0(u) < +\infty \Rightarrow u(x) = \pm 1$ per quasi ogni $x \in [0,1]$

② Data una funzione che assume solo i valori ± 1 , $\text{MM}_0(u)$ conta "il numero di transizioni" tra 1 e -1 .

③ $\text{MM}_0(u)$ è finito solo se u è del tipo in figura, ed in tal caso vale

numero salti $\cdot 4G(1)$

(ogni salto paga $4G(1)$)



recovery.
ottenuta ricollando roba
del tipo $\tanh(\frac{x}{\varepsilon})$