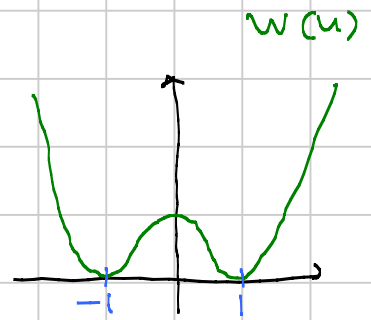


FUNZIONALE DI MODICA-MORTOLA

$$\min \left\{ \int_0^1 \varepsilon \dot{u}^2 + \underbrace{(u^2-1)^2}_{w(u)} : u(0)=0 \right\}$$

(doppio pozzo)



Idea: u vorrebbe essere ± 1 , una parte da 0.

[1] Per ogni $\varepsilon > 0$, il minimo esiste (solito metodo diretto)

[2] Detto m_ε il minimo, allora $m_\varepsilon \rightarrow 0$

(si può vedere in tanti modi, in fondo il Γ -limite è il funz.

$\int_0^1 (u^2-1)^2$ con perdita del dato al bordo).

[3] Riscaltiamo il problema ponendo

$$MM_\varepsilon(u) := \int_0^1 \varepsilon \dot{u}^2 + \frac{1}{\varepsilon} (u^2-1)^2$$

e considerando il pbm. di minimo

solo per fissare le
idee
↑

$$\min \left\{ MM_\varepsilon(u) : u \in C^1([0,1]), u(0)=0, \overbrace{u(x) \geq 0}^{\text{idee}} \text{ in } [0,1] \right\}$$

[4] Per ogni $\varepsilon > 0$ il minimo esiste ed è limitato dall'alto.

Si vede bene che $MM_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \text{costante}$

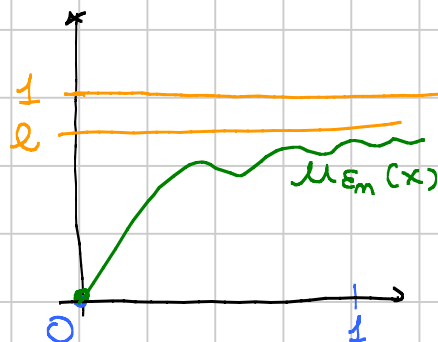


[5] Per ogni $\varepsilon > 0$, sia $\mu_\varepsilon(x)$ uno dei punti di min. di $MM_\varepsilon(u)$. Allora

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\max_{x \in [0,1]} \mu_\varepsilon(x) \right) \geq 1$$

Se non fosse così, vorrebbe dire che esiste $\ell < 1$ ed esiste una succ. $\varepsilon_m \rightarrow 0$ tale che

$$\max \mu_{\varepsilon_m}(x) \leq \ell \quad \forall m \in \mathbb{N}$$



Ma allora

$$MM_{\varepsilon_m}(\mu_{\varepsilon_m}) \geq \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon_m} (\mu_{\varepsilon_m}^2 - 1)^2 \geq \frac{1}{\varepsilon_m} (\ell^2 - 1)^2$$

$\downarrow$
 $+\infty$

mentre sappiamo che il LHS è limitato dall'alto.

[6] Per ogni $\varepsilon > 0$, il minimo è limitato dal basso da una costante strettamente positiva.

Detto meglio: considero la funzione

$$G(x) := \int_0^x |s^2 - 1| ds \quad = \text{primitiva di } \sqrt{w(s)}$$

Dico che, detto m_ε il minimo, vale

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m_\varepsilon \geq 2G(1) > 0$$

Disuguaglianza fondamentale

Sia u_ε una funzione C^1 qualunque, e sia $(c, d) \subseteq (0, 1)$ un sottointervallo.

Allora

$$\int_c^d \varepsilon \dot{u}_\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon^2 - 1)^2 \geq 2 \int_c^d |\dot{u}_\varepsilon| \cdot |u_\varepsilon^2 - 1|$$

$A^2 + B^2 \geq 2|A \cdot B|$

$$A = \sqrt{\varepsilon} \dot{u}_\varepsilon$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \dots$$

$$= 2 \int_c^d \left| \frac{d}{dx} G(u_\varepsilon) \right| dx$$

$$\geq 2 \left| \int_c^d \frac{d}{dx} G(u_\varepsilon) dx \right|$$

$$= 2 \left| \underbrace{G(u_\varepsilon(d)) - G(u_\varepsilon(c))}_{=0} \right|$$

Se $u_\varepsilon(x)$ è un p.to di minimo, applico il risultato con $c=0$ e $d_\varepsilon = \text{p.to di max di } u_\varepsilon(x) \text{ in } [0, 1]$

Per un p.to precedente sappiamo che $u_\varepsilon(d_\varepsilon)$ ha $\liminf \geq 1$ e quindi

$$u_\varepsilon \geq \int_0^{d_\varepsilon} \dots \geq 2 \left| G(u_\varepsilon(d_\varepsilon)) - \underbrace{G(0)}_{=0} \right|$$

Passando al $\liminf$ otteniamo

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u_\varepsilon \geq 2 G(1).$$

[7] Voglio dim. che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m_\varepsilon = 2G(1)$$

Tutto sta ad avere uguaglianza al 1° passaggio

$$\varepsilon \dot{u}^2 + \frac{1}{\varepsilon} (u^2 - 1)^2 \geq 2 |\dot{u}| \cdot |u^2 - 1|$$

Vale = se e solo se "A = B" cioè se e solo se

$$\sqrt{\varepsilon} \dot{u} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (1 - u^2) \quad (\text{occhio ai segni})$$

$$\dot{u} = \frac{1}{\varepsilon} (1 - u^2)$$

Questa eq. diff. si integra $\frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{\varepsilon} dx$

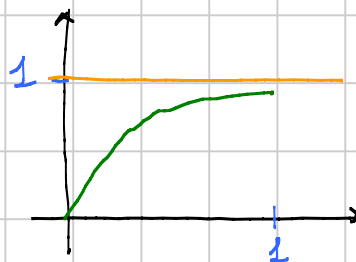
$$\arctan u = \frac{x}{\varepsilon} + k$$

$$u(x) = \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon} + k\right)$$

Tenendo conto che $u(0) = 0$ troviamo $k = 0$.

Quindi per avere uguaglianza basta porre

$$m_\varepsilon(x) = \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$



Oss. La funzione $m_\varepsilon(x)$ NON è mai p.to di min. di Ψm_ε ad ε fisso perché NON soddisfa la NBC che nasce in $x=1$.

Tuttavia è asintoticamente un "quasi-minimo" nel senso che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} MM_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) = 2G(1)$$

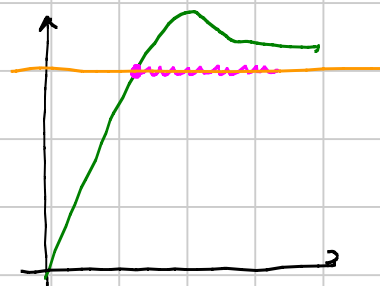
8 Mettendo insieme i pti 6 e 7 abbiamo il limite del valore del minimo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \min \{ MM_{\varepsilon}(u) : u(0) = 0, u(x) \geq 0 \text{ sempre} \}$$
$$= 2G(1)$$

9 Cosa possiamo dire dei pti di min $u_{\varepsilon}(x)$?

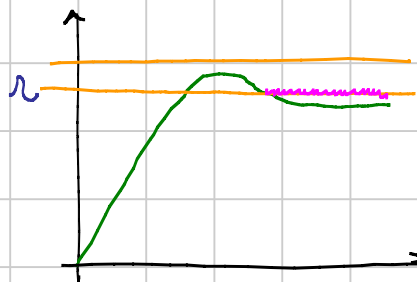
→ Stanno sempre ≤ 1

(Se raggiungo quota 1, è stupido non rimanerci)



→ Sono monotoni crescenti

Ancora una volta dopo aver toccato 2 volte la retta ε non conviene scendere ulteriormente.

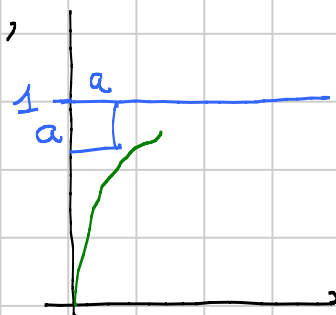


→ Detti $u_{\varepsilon}(x)$ i pti di minimo, si vede che

$$u_{\varepsilon}(x) \rightarrow 1$$

uniformemente in $[a, 1]$ per ogni $a > 0$.

Lemma Per ogni quadrato come in figura, si ha che $u_\varepsilon(x)$ per ε piccolo entra almeno una volta nel quadrato



Dim. Se $u_\varepsilon(x)$ non entra nel $\square$, allora

$$MM_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \int_0^a \frac{1}{\varepsilon} (u^2 - 1)^2 dx = \frac{1}{\varepsilon} a \underbrace{(a^2 - 1)^2}_{+\infty}$$

$\downarrow$ $2G(1)$

assunto.

— o — o —

Per monotonia, una volta entrata nel $\square$, $u_\varepsilon(x)$ NON scende più.

— o — o —

Finestra sul futuro Chi è il T-limite di $MM_\varepsilon(u)$?
Chiamiamolo $MM_0(u)$.

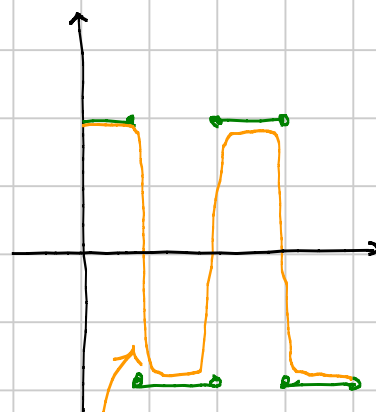
① $MM_0(u) < +\infty \Rightarrow u(x) = \pm 1$ per quasi ogni $x \in [0,1]$

② Data una funzione che assume solo i valori ± 1 , $MM_0(u)$ conta "il numero di transizioni" tra 1 e -1 .

③ $MM_0(u)$ è finito solo se u è del tipo in figura, ed in tal caso vale

numero salti $\cdot 4G(1)$

(ogni salto paga $4G(1)$)



recovery.
ottenuta ricollando roba
del tipo $\tanh(\frac{x}{\varepsilon})$