

# PROBLEMI DI OMOGENIZZAZIONE

Def. (Greche) Dati due numeri reali  $\alpha, \beta$  definiamo

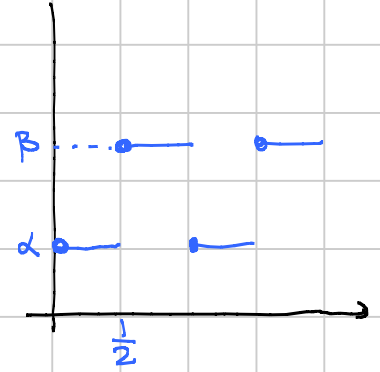
$$a(x) := \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Estendiamo  $a(x)$  a tutto  $\mathbb{R}$  per periodicità.

Dato  $n \geq 1$  intero poniamo

$$a_n(x) := a(nx)$$

↑ le oscillazioni hanno periodo  $\frac{1}{n}$ .



Esercizio  $a_n(x) \rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2}$  in ogni  $L^p$  con  $p < +\infty$  (conv. debole).

Consideriamo i funzionali

$$F_n(u) := \int_a^b u'^2 + a_n(x) u^2$$

$$F_n(u) := \int_a^b a_n(x) u'^2 + u^2$$

Problema:  $\Gamma$ -limite di queste due famiglie.

— o — o —

**Teorema** Sia  $a_n(x)$  una succ. di funzioni  $a_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supponiamo che

(i)  $a_n(x) \geq 0$  sempre

(ii)  $a_n(x) \leq M$  con  $M$  indipendente da tutto

(iii)  $a_n \rightarrow a_\infty$  ad esempio debole in  $L^2((a, b))$ .

Allora

$$F_n(u) = \int_a^b (\dot{u}^2 + a_n(x) u^2) dx \xrightarrow{\Gamma} \int_a^b (\dot{u}^2 + a_\infty(x) u^2) dx = F_\infty(u)$$

**Dim.** Occorre fare 2 verifiche (rispetto alla metrica di  $L^2$ )

**LIMSUP** Per ogni  $u \in L^2$  esiste  $u_n \rightarrow u$  t.c.  $F_n(u_n) \rightarrow F_\infty(u)$ .

Basta farlo per  $u \in C^1$  (denso in energia) nel qual caso  $u_n \equiv u$  è ok.

$$\int_a^b a_n(x) u^2 dx \xrightarrow{\uparrow \text{fisso e limitato (basterebbe } L^2 \text{)}} \int_a^b a_\infty(x) u^2 dx$$

Questo funziona anche per ogni  $u \in H^1$ .

**LIMINF** Data una qualunque  $u_n \rightarrow u_\infty$  devo dim. che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(u_n) \geq F_\infty(u_\infty)$$

WLOG posso supporre  $F_n(u_n) \leq M$ , quindi essendo  $a_n(x) \geq 0$  deduco

$$\int_a^b \dot{u}_n^2(x) \leq M$$

A meno di s. succ.  $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$  e quindi uso la SCI della norma

$$\liminf \int_a^b \dot{u}_n^2 \geq \int_a^b \dot{u}_\infty^2$$

Sul secondo pezzo ho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b a_n(x) u_n^2(x) dx = \int_a^b a_\infty(x) u_\infty^2(x) dx$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$   
 $a_\infty \quad u_\infty^2 \text{ unif}$   
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Oss. Non abbiamo usato davvero che  $a_n(x) \geq 0$ . Quello che basta è che  $a_n(x) \geq -c$  in maniera tale che

$$\int_a^b (u^2 - cu) \geq \varepsilon \int_a^b u^2 \quad (\text{vedi teoria funz. quadratiche})$$

$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Passiamo al caso

$$F_n(u) := \int_a^b a_n(x) u^2 + u^2 \quad (a_n = \text{greche})$$

Ci basta in realtà considerare  $F_n(u) := \int_a^b a_n(x) u^2$   
 (l'altro termine è perturb. continua)

Vogliamo dimostrare che, se  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , allora

$$F_n(u) \xrightarrow{\Gamma} c \int_a^b u^2 dx$$

dove  $c$  è la media armonica di  $\alpha$  e  $\beta$ , cioè

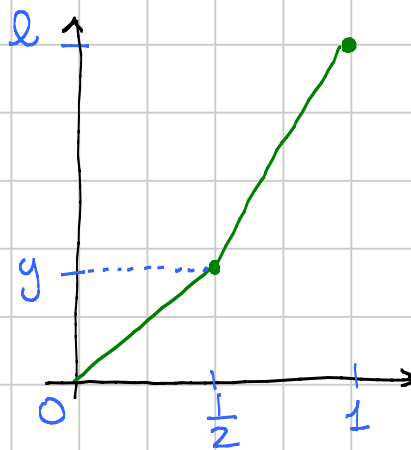
$$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}{2} \quad \leadsto \quad c = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

## PROBLEMA DI CELLA

$$\min \left\{ \int_0^1 a(x) u^2 : u(0) = 0, u(1) = l \right\}$$

Per cose già viste, il minimo è una retta in  $(0, \frac{1}{2})$  e  $(\frac{1}{2}, 1)$ , ma il coeff. ang. può essere diverso



$$\alpha (xy)^2 \cdot \frac{1}{2} + \beta (x(l-y))^2 \cdot \frac{1}{2} \rightsquigarrow \text{minimo in } y$$

$$2\alpha y - 2\beta(l-y) = 0 \rightsquigarrow y(2\alpha + 2\beta) = +2\beta l$$

$$\rightsquigarrow y = \frac{\beta}{\beta + \alpha} l$$

Sostituendo trovo il valore del minimo

$$\begin{aligned} 2 \left\{ \alpha \frac{\beta^2}{(\beta + \alpha)^2} l^2 + \beta \frac{\alpha^2}{(\beta + \alpha)^2} l^2 \right\} &= \frac{2\alpha\beta}{(\beta + \alpha)^2} (\beta + \alpha) l^2 \\ &= \boxed{\frac{2\alpha\beta}{\beta + \alpha}} l^2 = c \end{aligned}$$

Oss. Il minimo del problema di cella è lo stesso del pbm

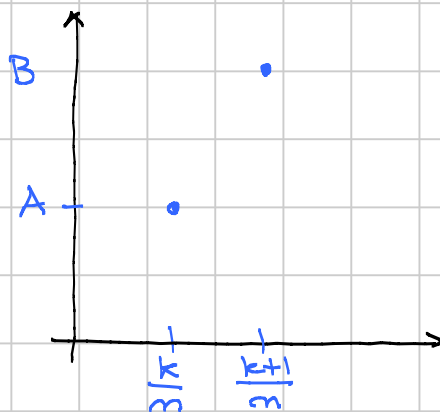
$$\min \left\{ \int_0^1 c u^2 : u(0) = 0, u(1) = l \right\}$$

$\uparrow$   
 media  
 armonica

## Problema di cella riscaldato

$$\min \left\{ \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} a(mx) u^2 : u\left(\frac{k}{m}\right) = A, u\left(\frac{k+1}{m}\right) = B \right\}$$

$$= c \frac{1}{m} [m(B-A)]^2 = cm(B-A)^2$$



Oss. Il minimo del problema riscaldato è lo stesso che se avessi minimizzato

$$\min \left\{ \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} c u^2, \quad \underbrace{u\left(\frac{k}{n}\right)}_A = A, \quad \underbrace{u\left(\frac{k+1}{n}\right)}_B = B \right\}$$

LIMINF in un caso speciale

Supponiamo che  $u_n \rightarrow u_\infty$  in  $L^2((0,1))$ . Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq C (u_\infty(1) - u_\infty(0))^2$$

Come al solito ci riduciamo a  $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$  e  $u_n \rightarrow u_\infty$  uniformemente.

$$F_n(u_n) = \int_0^1 a(nx) \dot{u}_n(x)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} a(nx) \dot{u}_n(x)^2 dx$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1} c n \left( \underbrace{u_n\left(\frac{k+1}{n}\right)}_B - \underbrace{u_n\left(\frac{k}{n}\right)}_A \right)^2$$

pbm.  
alla  
riscaldamento

$$= c n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left( u_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - u_n\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2$$

$$\geq c \left( \sum_{k=0}^{n-1} u_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - u_n\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2$$

c.s.

$$= C (u_n(1) - u_n(0))^2$$

Facendo il liminf e sfruttando la conv. unif. segue la tesi!

Con passaggi quasi analoghi si ottiene una liminf + generale:

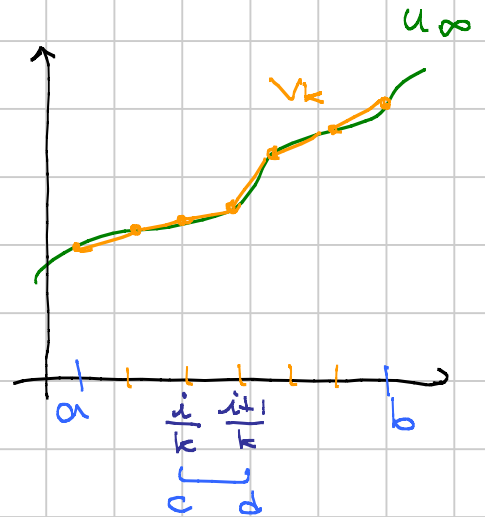
se  $u_n \rightarrow u_\infty$  in  $L^2((c,d))$ , allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_c^d a(x) u_n^2 \geq \underbrace{c}_{\substack{\uparrow \text{media} \\ \text{armonica} \\ \text{di } \alpha \text{ e } \beta}} \underbrace{(d-c)}_{\substack{\uparrow \text{lungh.} \\ \text{intervallo}}} \left( \frac{u_\infty(d) - u_\infty(c)}{d-c} \right)^2$$

**LIMINF GENERALE** Sia  $u_n \rightarrow u$  in  $L^2((a,b))$ .

Fisso un intero positivo  $k$  e divido  $(a,b)$  in  $k$  parti uguali, chiamando  $v_k$  la funzione che unisce i punti.

In ogni sottointervallo applico l'enunciato precedente, ottenendo



$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} a(x) u_n^2 &\geq c \cdot \frac{1}{k} \left( \frac{u_\infty(\frac{i+1}{k}) - u_\infty(\frac{i}{k})}{\frac{1}{k}} \right)^2 \\ &= \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} c v_k^2 \end{aligned}$$

Sommando su  $k$  troviamo

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F_\infty(v_k)$$

per ogni  $k \geq 1$  intero.

Facendo il sup su  $k$  sappiamo che

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} F_{\infty}(v_k) = F_{\infty}(u_{\infty})$$

per risultati precedenti del tipo "unisco i punti".

**LIMSOP** (Vedi annate precedenti)

Dato  $u$  speciale, devo trovare  $u_n \rightarrow u$  in  $L^2$  t.c.

$$F_n(u_n) \rightarrow F_{\infty}(u) = C \int_a^b u^2.$$

Scelgo come denso quelle affini a tratti.

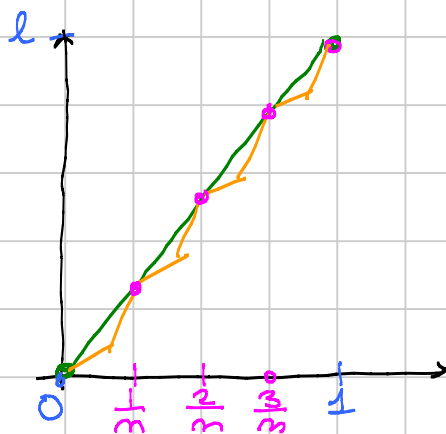
So approx le affini a tratti se so approssimare le rette.

So appro  $\times$  le rette se so approx la retta "canonica"

Dato  $n$ , divido  $(0,1)$  in  $n$  parti  
In ogni tratto  $a(nx)$  è metà  $\alpha$  e  
metà  $\beta$ .

In ogni tratto definisco  $u_n(x)$   
usando il pbm. di cella.

È evidente  $u_n \rightarrow u$  in  $L^2$  e che



$$F_n(u_n) = F_{\infty}(\text{retta}) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

— o — o —

Oss. Potevamo aspettarci la media armonica pensando  
all'eq. di Eulero

$$(a(nx) u')' = u$$

Quando vado ad esplicitare,  $a(nx)$  va al denominatore.

— o — o —