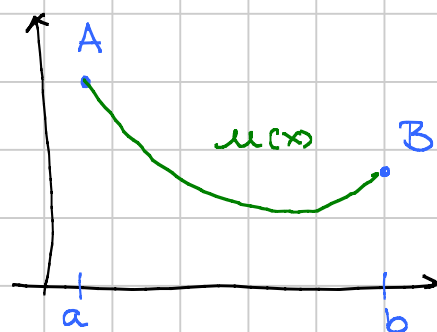


HEAVY CHAIN

Catena

- 1 Problema Trovare la forma assunta da un filo NON ESTENSIBILE sospeso tra due sostegni fissi.

Dalla fisica sappiamo che la posizione di equilibrio è quella più bassa possibile.



Matematicamente

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b u \sqrt{1+u^2} dx}_{\int_{\gamma} y ds} : u \in C^1 \dots + \text{DBC} + \underbrace{\int_a^b \sqrt{1+u^2} = l}_{\text{lunghezza fissa}} \right\}$$

- 2 Equazione di Eulero per problema vincolato

$$F(u) = \int_a^b u \sqrt{1+u^2} dx$$

$$G(u) = \int_a^b \sqrt{1+u^2} dx$$

Brutte notizie: crescita lineare rispetto ad u^2

Supponiamo u pto di min. Per il metodo dei moltip. ci sono due casi

$$\rightarrow \delta G(u, v) = 0 \text{ per ogni } v \dots$$

$$\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right)' = 0 \rightsquigarrow \boxed{\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}} = \text{cost.} \rightsquigarrow u = \text{retta}$$

iniettiva

$\rightsquigarrow$ impossibile tranne nel caso banale $l = \|B-A\|$

→ $\delta F(u, v) = \lambda \delta G(u, v)$, cioè $\delta (F - \lambda G)(u, v) = 0$
per ogni $v \dots$

→ u risolve (ELE) per $F - \lambda G$ che ha Lagrangiana

$$s\sqrt{1+p^2} - \lambda\sqrt{1+p^2} = (s-\lambda)\sqrt{1+p^2}$$

Scrivo (ELE) in forma Erdmann

$$\frac{(u-\lambda)\dot{u}}{\sqrt{1+\dot{u}^2}} = c + (u-\lambda)\sqrt{1+\dot{u}^2}$$

e osservo che $u(x)$ risolve questa se e solo se $u(x) - \lambda$
risolve la (ELE) per la sup. di rob. di area minima.
Quindi le soluzioni sono del tipo

$$u(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c} + k\right) + \lambda$$

③ Trovare il valore dei parametri. Calcolare c, k, λ
usando 2 DBC + lunghezza.

Come prima supponiamo $[a, b] = [-1, 1]$

$$c \cosh\left(-\frac{1}{c} + k\right) + \lambda = A$$

$$c \cosh\left(\frac{1}{c} + k\right) + \lambda = B$$

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1+\dot{u}(x)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{c} + k\right)} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \cosh\left(\frac{x}{c} + k\right) dx = \left[c \sinh\left(\frac{x}{c} + k\right) \right]_{x=-1}^{x=1}$$

$$c \sinh\left(\frac{1}{c} + k\right) - c \sinh\left(-\frac{1}{c} + k\right) = l$$

Ponendo come prima $t := \frac{\lambda}{c}$

$$C(-t+k) - C(t+k) = \frac{A-B}{c} = \frac{A-B}{\lambda} t$$

$$S(t+k) - S(-t+k) = \frac{\ell}{c} = \frac{\ell}{\lambda} t$$

Uso le formule di addizione:

$$\cancel{C(t)C(k)} - S(t)S(k) - \cancel{C(t)C(k)} - S(t)S(k) = \frac{A-B}{\lambda} t$$

$$S(t)C(k) + \cancel{C(t)S(k)} + S(t)C(k) - \cancel{C(t)S(k)} = \frac{\ell}{\lambda} t$$

$$\begin{cases} S(t)S(k) = \frac{B-A}{2\lambda} t \\ S(t)C(k) = \frac{\ell}{2\lambda} t \end{cases} \quad \text{Divido}$$

$$T(k) = \frac{B-A}{\ell}$$

Risolvibile univocamente se

$$\frac{B-A}{\ell} \in (-1, 1)$$

e questo è ovvio per la geometria del problema (cateto < ipotenusa < lung. corda)



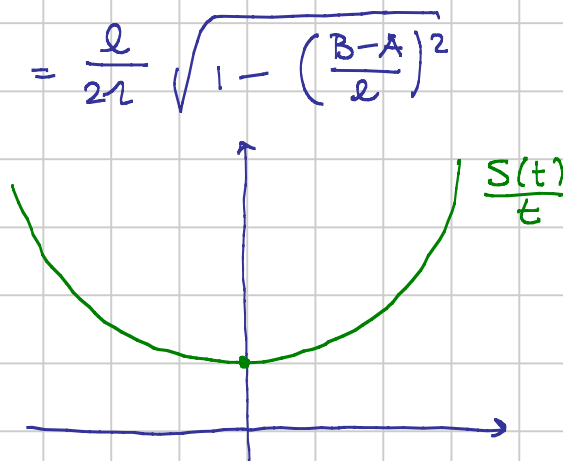
In questo modo trovo k unico. Come trovo t (cioè c)?

$$\text{Ad esempio come } \frac{S(t)}{t} = \frac{\ell}{2\lambda} \frac{1}{C(k)} = \frac{\ell}{2\lambda} \sqrt{1 - \frac{S(k)^2}{C(k)^2}}$$

Si verifica (Analisi 1) che

$\frac{S(t)}{t}$ è convessa, quindi avrà

2 soluzioni simmetriche se $RHS > 1$



$$\frac{l^2}{4l^2} \left(1 - \frac{(B-A)^2}{l^2} \right) > 1 \Leftrightarrow l^2 - (B-A)^2 > 4l^2$$

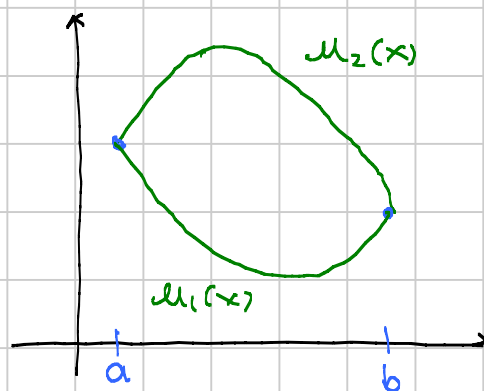
$$\Leftrightarrow \underbrace{4l^2 + (B-A)^2}_{\text{lunghezza che congiunge le DBC}} < l^2 \quad \text{☺}$$

Se $l >$ lunghezza segmento, allora (ELE) ha due soluzioni (λ segue univocamente), corrispondenti a valori di t , dunque di c , opposti.

4] Chi sono $\mu_1(x)$ e $\mu_2(x)$.

Si potrebbe dire che

- $\mu_1(x)$ è GM
- $\mu_2(x)$ è p.to di max globale.



Per dimostrarlo, basterebbe mostrare che max/min esistono, e per questo si potrebbe provare con il metodo diretto.

— o — o —

Parentesi su problema analogo, ma più semplice

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 u \sqrt{1+u^2} dx : u(-1) = u(1) = 0, \int_{-1}^1 u^2 dx = 7 \right\}$$

Cosa succede con il metodo diretto?

☺ Il vincolo integrale + BC $\leadsto$ compattezza succ. min. via Ascoli-Arzelà

(e anche di quelle con min., ad esempio massimizzanti).

☺ Passare al limite nel funzionale si può per la convessità rispetto ad u .

☹ Il vincolo integrale sulle derivate NON passa al limite rispetto alla debole sulle derivate.

USCITA CLASSICA

→ Rilassamento del vincolo

→ Saturazione del vincolo

① Considero il pbm

$$\min \{ \dots \text{ tutto uguale } \dots \int_{-1}^1 u^2 dx \leq 7 \}$$

Su questo il metodo diretto funziona $\leadsto$ p.to di cui u_0

② Dimostro che u_0 "satura il vincolo", cioè lo soddisfa con il segno di $=$. A quel p.to risolve pbm. originario.

Idea: se soddisfa il vincolo con $<$, posso modificare u_0 da qualche parte in modo da migliorare $F(u_0)$.

Queste idee si possono fare funzionare per la catenaria. Ad esempio si può scrivere il problema usando curve parametrizzate per lunghezze d'arco.

$\gamma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ che soddisfano le BC.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$x(0) = a \quad x(l) = b$$

$$y(0) = A \quad y(l) = B$$

$$F(x, y) := \int_0^l y(t) dt$$

$$\text{vincolo: } \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = 1 \quad \text{per ogni } t \in [0, l]$$

Minimizzo rilassando il vincolo: $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \leq 1 \quad \forall t$
(stabile per conv. debole: vedi def. pbm. con ostacolo puntuale)

Metodo diretto $\Rightarrow$ esistono curve che realizzano
max/min.
(e verificano la disug.)

Resta da dimostrare che saturano il vincolo.

Se sono più corte, avanza catena e posso ancora andare
un po' più in giù 😊

