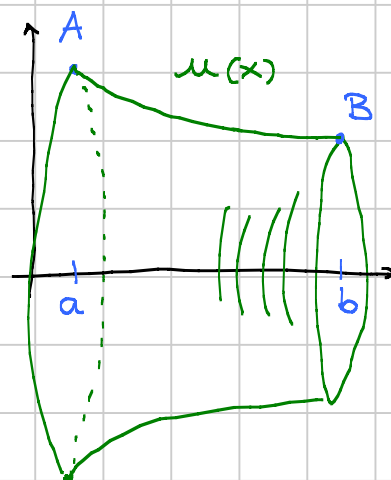


SUPERFICIE DI ROTAZIONE DI AREA MINIMA

1 Funzionale

Tra tutte le sup. di rotazione assegnate per $x=a$ e $x=b$, trovare quella di area minima

$$\text{Area} = \underbrace{2\pi \int_a^b u \sqrt{1+u'^2} dx}_{F(u)}$$



$$\min \{ F(u) : u \in C^1([a,b]), \underbrace{u(a)=A, u(b)=B}_{\text{DBC}}, \underbrace{u(x) \geq 0}_{\text{ostacolo}} \}$$

Cattive notizie:

$L(x, s, p) := s \sqrt{1+p^2}$ ha crescita lineare in p .

2 Equazione di Eulero (in forma Erdmann)

$$u' L_p(u, u') = c + L(u, u') \rightsquigarrow \frac{u u'^2}{\sqrt{1+u'^2}} = c + u \sqrt{1+u'^2}$$

$$\rightsquigarrow \cancel{u u'^2} = c \sqrt{1+u'^2} + u + \cancel{u u'^2} \rightsquigarrow \sqrt{1+u'^2} = -\frac{u}{c}$$

$$\rightsquigarrow 1+u'^2 = \frac{u^2}{c^2} \rightsquigarrow u'^2 = \frac{u^2-c^2}{c^2} \rightsquigarrow u' = \pm \sqrt{\frac{u^2-c^2}{c^2}}$$

Eq. diff. che integro separando le variabili

$$\int \frac{c}{\sqrt{u^2-c^2}} du = \int \pm dx \rightsquigarrow \text{pongo } u = cv \quad du = c dv$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \cdot c dv = \pm x + k \quad \leadsto$$

$$\leadsto \operatorname{arccosh} v = \pm \frac{x}{c} + k \quad \leadsto v(x) = \cosh\left(\pm \frac{x}{c} + k\right)$$

$$\leadsto v(x) = \cosh\left(\frac{x}{c} + k\right) \quad \leadsto u(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c} + k\right)$$

↑
cosh è pari

Teorema Per ogni valore ammissibile di c e k ($c > 0$ e $k \in \mathbb{R}$) la funzione

$$u(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c} + k\right)$$

risolve l'equazione di Eulero del problema.

Dim Basta sostituire. 😊

[3] Trovare c e k in modo da soddisfare le DBC.

Supponiamo WLOG che sia $a = -r$ e $b = r$ per qualche $r > 0$.

Davvvero risolvere

$$\begin{cases} c \cosh\left(-\frac{r}{c} + k\right) = A \\ c \cosh\left(\frac{r}{c} + k\right) = B \end{cases} \quad \text{Pongo } t := \frac{r}{c} \text{ e scrivo } C \text{ ed } S \text{ invece di } \cosh \text{ e } \sinh$$

$$C(-t+k) = \frac{A}{c} = \frac{A}{r} t$$

$$C(t+k) = \frac{B}{c} = \frac{B}{r} t$$

Uso le formule di addizione

$$\begin{cases} C(t)C(k) - S(t)S(k) = \frac{A}{2}t & C(t)C(k) = \frac{B+A}{2}t \\ C(t)C(k) + S(t)S(k) = \frac{B}{2}t & S(t)S(k) = \frac{B-A}{2}t \end{cases}$$

Ricavo quelli con il k e impongo $C(k)^2 - S(k)^2 = 1$

$$\left(\frac{B+A}{2}\right)^2 \frac{t^2}{C(t)^2} - \left(\frac{B-A}{2}\right)^2 \frac{t^2}{S(t)^2} = 1$$

↑ osservo che $t \neq 0$ (>0)

Moltiplico per $\frac{C(t)^2}{t^2}$ e riorganizzo

$$\boxed{\frac{C(t)^2}{t^2} + \left(\frac{B-A}{2}\right)^2 \frac{1}{T(t)^2} = \left(\frac{B+A}{2}\right)^2}$$

Analisi 1: si verifica che $\frac{C(t)}{t}$, $\frac{1}{T(t)}$ e i loro quadrati sono funzioni convesse, quindi la loro somma è convessa.

A seconda dei valori di $A, B, 2$ possono esserci 0, 1, 2 soluzioni per t

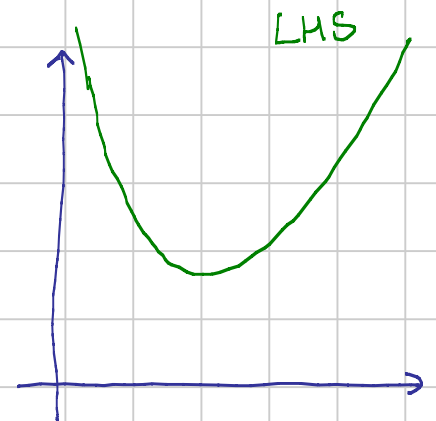
Dato t , poi trovo univocamente c e k

Domande:

- che succede quando ci sono 2 soluzioni?
- " " " non ci sono solus.?

— o — o —

[4] Caso speciale $A=B$ Si vede da $S(t)S(k) = \frac{B-A}{2}$ che deve essere $k=0$, cioè la solus. è simmetrica risp. asse y .

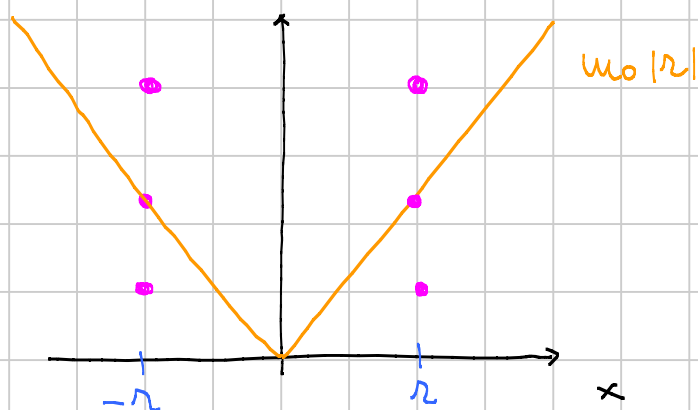
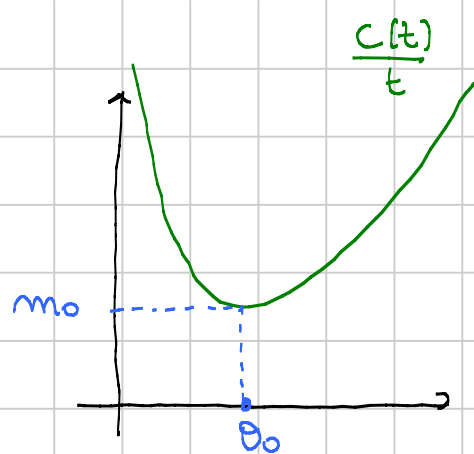


L'equazione per t diventa

$$\frac{C(t)^2}{t^2} = \left(\frac{A}{r}\right)^2 \leadsto \boxed{\frac{C(t)}{t} = \frac{A}{r}}$$

Quindi

- $A > u_0 r \leadsto 2 \text{ soluz.}$
- $A = u_0 r \leadsto 1 \text{ soluz.}$
- $A < u_0 r \leadsto 0 \text{ soluz.}$



$\leadsto 2 \text{ sol.}$

$\leadsto 1 \text{ sol.}$

$\leadsto 0 \text{ sol.}$

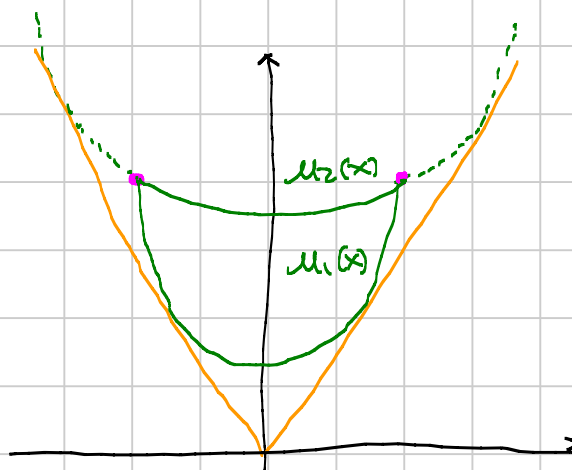
Mettiamoci nel caso $A > u_0 r$, come sono fatte le soluz.?
Sono del tipo

$$u(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

e ci sono 2 valori di c che vanno bene. Siano $c_1 < c_2$

$u_2(x)$ corrisponde a c_2

$u_1(x)$ corrisponde a c_1



Oss. Tutte le cicloidi della famiglia sono tangenti a $u_0|x|$:

$\rightarrow u_2(x)$ è tangente esternamente a $[-1, 1]$

$\rightarrow u_1(x)$ " " internamente a $[-1, 1]$

Dim. $c \cos R\left(\frac{x}{c}\right) \geq m_0 x \quad \frac{\cos R\left(\frac{x}{c}\right)}{\frac{x}{c}} \geq m_0$

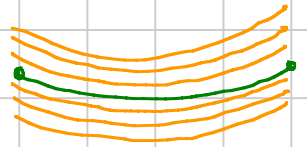
con uguaglianza se e solo $\frac{x}{c} = 0 \quad x = 0 \text{ o } c$

Da questo seguono le tesi.

Fatti :

- ① $u_2(x)$ è sempre SLM
- ② $u_2(x)$ è GM se c è abbastanza piccolo
- ③ $u_1(x)$ non è nemmeno DLM.

Dim ① Sente un campo di W . Basta usare le cicloidi con valori di c vicini
 $La(W^+)$ è gratis per la convessità in p della Lagrangiana



Dim ③ Manca la (J). Se fosse vera la (J) in $[-1, 1]$ sarebbe vera la (J⁺) in ogni sottointervallo, Ma allora troverei un campo di W che circonda la $u_2(x)$ in un intorno dei p.ti di tangenza, il che è impossibile perché le solus. stanno sopra $m_0/2$.

Dim. di ② Se io considero la $u_2(x)$ in un intervallo $[-r_0, r_0]$, con r_0 piccolo, allora lì è GM.

$\mu_2(x)$ è meglio di tutte le u che stanno nel campo.

Mostro che non conviene uscire.

Prenoliamo rett. di altezza h contenuto nel campo.

Sia $v(x)$ una sol. che esce in un certo c . Allora

$$\begin{aligned} \int_{-n}^n v \sqrt{1+\dot{v}^2} dx &\geq \int_{-n}^c v \sqrt{1+\dot{v}^2} dx \geq \int_{-n}^c v \cdot |\dot{v}| dx \\ &= \int_{-n}^c |v \dot{v}| dx \geq \left| \int_{-n}^c v \dot{v} dx \right| = \frac{1}{2} |v(c)^2 - v(-n)^2| \\ &= \text{cosa fissa che dipende da } h \\ &\geq \int_{-n}^n \mu_2 \sqrt{1+\dot{\mu}_2^2} dx \end{aligned}$$

vera per forza se n è abbastanza piccolo.

(gli n sono quelli chiamati n_0 nell'enunciato).

[5] Cosa succede se non esiste soluz.? Chi è il componente di $\mu_2(x)$ per essere GM?

Il componente è la soluzione che va subito a 0 che paga $2\pi A$ da ogni parte.



Geometricamente corrisponde a considerare 2 dischi uniti da un filo sottilissimo.

