

Problema di DIDONE - cartesiano (cercare mitologia Enea...)

In generale: trovare la regione di area max con perimetro assegnato.

Versione duale: tra tutte le regioni di area data, trovare quella di perimetro minimo.

Versione cartesiana

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b \sqrt{1+\dot{u}^2} dx}_{\text{lungh. grafico.}} : \underbrace{\int_a^b u(x) dx}_{\substack{\uparrow \\ \text{area sotto il} \\ \text{grafico}}} = m, \quad \substack{\uparrow \\ \text{dato}} u(a)=u(b)=0 \right\}$$

Problema di minimo vincolato con

$$F(u) := \int_a^b \sqrt{1+\dot{u}^2} dx \quad G(u) := \int_a^b u dx$$

$\uparrow$
Brutte notizie: crescita lineare

1) Metodo indiretto: supponiamo un p.to di min.

Allora vale almeno una delle 2 possibilità:

$$\rightarrow \delta G(u_0, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in \dots$$

$$\rightarrow \delta (F + \lambda G)(u_0, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in \dots$$

$\delta G(u_0, v) = 0 \Leftrightarrow u_0$ risolve (ELE) di G , cioè

$0 = 1$, il che è impossibile

$\delta (F + \lambda G)(u_0, v) = 0 \Leftrightarrow u_0$ risolve (ELE) di $F + \lambda G$
che ha Lagrangiana

$$\sqrt{1 + \dot{u}^2} + \lambda s$$

$$\left(\frac{\dot{u}}{\sqrt{1 + \dot{u}^2}} \right)' = \lambda$$

Brutal mode: $\frac{\dot{u}}{\sqrt{1 + \dot{u}^2}} = \lambda x + k$

$$\dot{u} = (\lambda x + k) \sqrt{1 + \dot{u}^2} \quad \leadsto \quad \dot{u}^2 = (\lambda x + k)^2 (1 + \dot{u}^2)$$

$$\leadsto \dot{u}^2 = \frac{(\lambda x + k)^2}{1 - (\lambda x + k)^2} \quad \leadsto \quad \dot{u}(x) = \pm \frac{\lambda x + k}{\sqrt{1 - (\lambda x + k)^2}}$$

La primitiva si vede a occhio!

$$u(x) = \pm \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda x + k)^2} + c$$

$$\lambda u(x) - c = \pm \sqrt{1 - (\lambda x + k)^2} \quad \leadsto$$

$$(\lambda u(x) - c)^2 + (\lambda x + k)^2 = 1$$

Quindi il grafico di u è contenuto in una circonferenza!

[2] Determinare il valore dei parametri

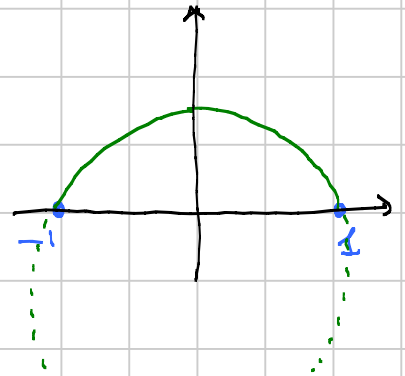
$$\min \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} dx : \int_{-1}^1 u(x) = m, u(-1) = u(1) = 0 \right\}$$

$\uparrow$
 $m > 0$

Parametri: λ, c, k e ho 3

equazioni

$$\begin{cases} u(1) = 0 \\ u(-1) = 0 \\ \text{area} = m \end{cases}$$



Si vuole per simmetria che $k=0$, cioè centro sull'asse y .
Le altre 2 condizioni determinano univocamente c e λ .

Sorpresa (nemmeno troppo): la soluzione esiste unica
se e solo se $m \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 $\uparrow$ area semicerchio

[3] Se $m \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'unico arco di circ. trovato risolve
(ELE)

Dm. Derivare e sostituire.

Domande che restano

- 1 - la soluzione di ELE è davvero minimo?
- 2 - è unica?
- 3 - che succede quando $m > \frac{\pi}{2}$?

[4] Se $m \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'arco di circ. è l'unico minimo.

Per un lemma visto prec. una cond. suff. è che $u_0(x)$
sia minimo non vincolato per $F + \lambda G$.

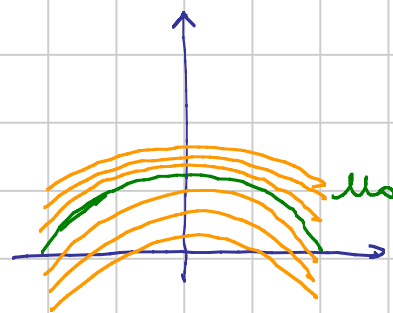
In questo caso è davvero minimo, e si può vedere in due modi

1 → Campi di Weierstrass.

Considero le traslate verticali di $u_0(x)$. Fabbiamo e risolviamo (ELE)

$$\left(\frac{\dot{u}}{\sqrt{1+\dot{u}^2}} \right)' = \lambda$$

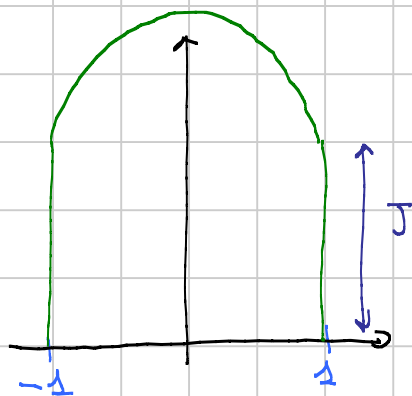
Se u_0 risolve, allora $u_0 + k$ risolve.
(w^+) segue dalla convessità in p .



2 → Per convessità, perché $\sqrt{1+p^2} + \lambda S$ è convessa nella coppia (S, p) .

5 Che succede per $u > \frac{\pi}{2}$

Non c'è il minimo, e l'inf è "realizzato" dallo STADIO



Questa paga $2J + \pi$
(verificare per approssimazione)
(vedi lezione sulle crescite lineari)

Perché questo è l'inf.?

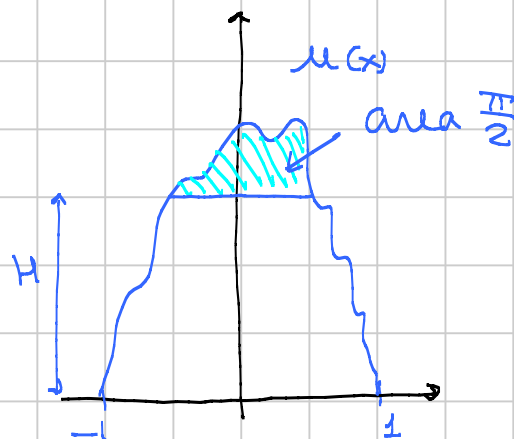
• Scelgo una altezza H tale che la parte alta abbia area $\frac{\pi}{2}$

• Osservo che

$$\text{lunghezza grafica} \geq 2H + \pi$$

↑
pezzi
lateral

↑
pezzo
centrale
(per risultato
precedente)



Resta da stimare H

$$m = \text{area sotto grafico} = \text{area alta} + \text{area bassa}$$

$$\leq \frac{\pi}{2} + 2H$$

Quindi $2H \geq m - \frac{\pi}{2}$ e quindi

$$\text{lunghezza grafico} \geq 2H + \pi \geq m - \frac{\pi}{2} + \pi = m + \frac{\pi}{2}$$

Per concludere basta verificare che $\text{lunghezza standard} = m + \frac{\pi}{2}$

— o — o —

Oss. Il problema "rilassato" ammette tratti verticali che pagano come la loro lunghezza.